

1. 다음 등식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립할 때, xy 의 값을 구하여라.

$$(2k + 3)x + (3k - 1)y + 5k - 9 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

k 에 대하여 내림차순으로 정리하면
 $(2x + 3y + 5)k + (3x - y - 9) = 0$
이것은 k 에 대한 항등식이므로
 $2x + 3y + 5 = 0$
 $3x - y - 9 = 0$
연립방정식을 풀면 $x = 2, y = -3$
 $\therefore xy = 2 \times (-3) = -6$

2. 다항식 $6x^3 - 7x^2 + 17x - 3$ 을 $3x - 2$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 이라 할 때, $Q(1) + R$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$$\begin{aligned} 6x^3 - 7x^2 + 17x - 3 &= (3x - 2)Q(x) + R \\ \text{양변에 } x = 1 \text{을 대입하면, } 13 &= Q(1) + R \\ \therefore Q(1) + R &= 13 \end{aligned}$$

해설

$6x^3 - 7x^2 + 17x - 3$ 를 $3x - 2$ 로 직접 나누거나 조립제법을 이용하여 몫과 나머지를 구할 수 있다.

3. $f(x) = 3x^3 + px^2 + qx + 12$ 가 $x + 2$ 로도 나누어떨어지고, $x - 1$ 로도 나누어떨어질 때, $\frac{q}{p}$ 의 값은?

① 9 ② 4 ③ -9 ④ -3 ⑤ -12

해설

$$f(-2) = -24 + 4p - 2q + 12 = 0$$

$$f(1) = 3 + p + q + 12 = 0$$

$$p = -3, q = -12, \frac{q}{p} = \frac{-12}{-3} = 4$$

4. $x^4 + 3x^2 + 4 = (x^2 + x + 2)(x^2 + ax + b)$ 일 때, 상수 a, b 의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$\begin{aligned}(\text{좌 변}) &= (x^2 + 2)^2 - x^2 \\ &= (x^2 + x + 2)(x^2 - x + 2) \\ \therefore a &= -1, b = 2 \\ \therefore ab &= -1 \times 2 = -2\end{aligned}$$

5. 다음 계산 과정에서 최초로 틀린 부분은?

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}} &= \boxed{\text{㉠}} \frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{-2}}{\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2}} \\ &= \boxed{\text{㉡}} \frac{\sqrt{-16}}{\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2}} \\ &= \boxed{\text{㉢}} \frac{\sqrt{-16}}{2} \\ &= \boxed{\text{㉣}} \frac{4i}{2} \\ &= \boxed{\text{㉤}} = \sqrt{-4}\end{aligned}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

해설

$\sqrt{-2}\sqrt{-2} = \sqrt{2}i\sqrt{2}i = 2i^2 = -2$
따라서 최초로 틀린 부분은 ㉢이다.

6. x 에 대한 이차방정식 $(k^2 - 1)x^2 - 2(k - 1)x + 1 = 0$ 이 허근을 가질 때, $k > m$ 이다. m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$(k^2 - 1)x^2 - 2(k - 1)x + 1 = 0$ 이

허근을 가지려면

$$\frac{D}{4} = (k - 1)^2 - (k^2 - 1) < 0$$

$$(k^2 - 2k + 1) - (k^2 - 1) < 0$$

$$-2k + 2 < 0, k > 1$$

$$\therefore m = 1$$

7. $y = -\frac{1}{3}x^2$ 의 그래프와 모양이 같고 $x = -3$ 에서 최댓값 5를 갖는 포물선의 식의 y 절편을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y = -\frac{1}{3}x^2$ 의 그래프와 모양이 같고 $x = -3$ 에서 최댓값 5를 갖는 포물선의 식은 $y = -\frac{1}{3}(x+3)^2+5$ 이다. $y = -\frac{1}{3}(x+3)^2+5 = -\frac{1}{3}x^2 - 2x + 2$ 따라서 y 의 절편은 2이다.

8. 함수 $y = -x^2 - 2x + 5$ ($-2 \leq x \leq 2$)의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$y = -x^2 - 2x + 5 = -(x^2 + 2x + 1 - 1) + 5 = -(x + 1)^2 + 6$$

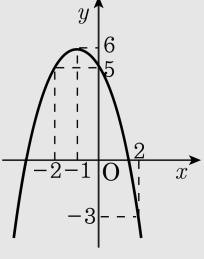
점 $(-1, 6)$ 을 꼭지점으로 하고 위로 볼록한 포물선으로 다음 그림과 같다.

$$f(-2) = 5, f(2) = -3$$

따라서 최댓값은 $x = -1$ 일 때 $f(-1) = 6$ 이며

최솟값은 $x = 2$ 일 때 $f(2) = -3$ 이다.

$$\therefore M + m = 6 - 3 = 3$$



9. $x + y + z = 1$, $xy + yz + zx = 2$, $xyz = 3$ 일 때, $(x + 1)(y + 1)(z + 1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$\begin{aligned} & (x + 1)(y + 1)(z + 1) \\ &= xyz + xy + yz + zx + x + y + z + 1 \\ &= 7 \end{aligned}$$

10. 다음 식 $(3x^2 - x + 2)(4x^3 - 5x^2 + x + 1)^5$ 을 전개했을 때, 계수들의 총합은?

① 4 ② -32 ③ -64 ④ 32 ⑤ 64

해설

다항식의 계수들의 총합을 구할 경우

$x = 1$ 을 대입한다.

$$(3 - 1 + 2)(4 - 5 + 1 + 1)^5 = 4 \times 1 = 4$$

11. 다항식 $(x+2)f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지가 9, 다항식 $(2x-3)f(3x-7)$ 을 $x-3$ 으로 나눈 나머지가 -3 이다. 이때 다항식 $f(x)$ 를 $(x-1)(x-2)$ 로 나눈 나머지는?

① $-4x+7$

② $-4x-3$

③ $2x+3$

④ $2x-3$

⑤ $3x-1$

해설

나머지정리에 의하여

$(x+2)f(x)$ 에 $x=1$ 을 대입하면

$$3f(1)=9 \text{ 이므로 } f(1)=3 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$$

$(2x-3)f(3x-7)$ 에 $x=3$ 을 대입하면

$$3f(2)=-3 \text{ 이므로 } f(2)=-1 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$

$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$ 에 $\textcircled{\text{㉠}}$, $\textcircled{\text{㉡}}$ 을 대입하면

$$\begin{cases} a+b=3 \\ 2a+b=-1 \end{cases}$$

이므로 $a=-4$, $b=7$

12. x 에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+c 를 $x-1$ 로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. $i = 1$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 옳게 구한 것은?

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & a & b & c \\ & & d & e & f \\ \hline & 1 & g & h & i \end{array}$$

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

다항식 x^3+ax^2+bx+c 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & a & b & c \\ & & 1 & a+1 & a+b+1 \\ \hline & 1 & a+1 & a+b+1 & a+b+c+1 \end{array}$$

이때 $a+b+c+1 = 1$ 이므로
 $a+b+c = 0$
 따라서 ③이다.

13. $(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$ 를 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x^2+cx+d)$ 이다. $a+b+c-d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$$\begin{aligned}x^2+x=A \text{로 치환하면} \\(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24 \\&= \{(x-1)(x+2)\}\{(x-3)(x+4)\}+24 \\&= (x^2+x-2)(x^2+x-12)+24 \\&= (A-2)(A-12)+24 \\&= A^2-14A+48=(A-6)(A-8) \\&= (x^2+x-6)(x^2+x-8) \\&= (x-2)(x+3)(x^2+x-8) \\ \therefore a+b+c-d &= -2+3+1-(-8)=10\end{aligned}$$

14. $x^4 + 2x^2 + 9 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$ 로 인수분해될 때, $|ab - cd|$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (x^2 + 3)^2 - (2x)^2 \\ &= (x^2 + 2x + 3)(x^2 - 2x + 3)\end{aligned}$$

여기서 계수를 비교하면

$$a = 2, b = 3, c = -2, d = 3$$

$$\therefore |ab - cd| = |2 \times 3 - (-2) \times 3| = 12$$

15. x^2+ax-9 와 x^2+bx+c 의 합은 $2x^2-4x-6$, 최소공배수는 x^3-x^2-9x+9 이다. $a-b+c$ 의 값을 구하여라. (단, a, b, c 는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$A = x^2 + ax - 9 = Gp$
 $B = x^2 + bx + c = Gq$ 라 하면
 $A + B = (p + q)G = 2x^2 - 4x - 6 = 2(x + 1)(x - 3)$
 $L = pqG = x^3 - x^2 - 9x + 9 = x^2(x - 1) - 9(x - 1)$
 $= (x - 1)(x^2 - 9) = (x - 1)(x + 3)(x - 3)$
따라서, $G = x - 3, p = x + 3, q = x - 1$ 이다.
 $\therefore A = (x + 3)(x - 3) = x^2 - 9$
 $B = (x - 1)(x - 3) = x^2 - 4x + 3$
 $\therefore a = 0, b = -4, c = 3$
 $\therefore a - b + c = 7$

16. 복소수 $z = x + yi$ 를 좌표평면 위에 점 $p(x, y)$ 에 대응시킬 때, $(3 - 4i)z$ 가 실수가 되게 하는 점 p 의 자취가 나타내는 도형은?

- ① 기울기가 양인 직선 ② 기울기가 음인 직선
③ 위로 볼록한 포물선 ④ 아래로 볼록한 포물선
⑤ 원

해설

$$\begin{aligned}(3 - 4i)z &= (3 - 4i)(x + yi) \\ &= (3x + 4y) + (-4x + 3y)i\end{aligned}$$

실수가 되려면 허수부 $-4x + 3y = 0$ 이다.

$$\therefore y = \frac{4}{3}x \quad (\Rightarrow \text{기울기가 양인 직선})$$

17. 복소수 $(1+i)x^2 - (1-4i)x - (2-3i)$ 가 실수일 때의 x 값과 순허수일 때의 x 값을 모두 곱한 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

준식을 전개하여 실수부와 허수부로 정리하면

$$(x^2 - x - 2) + (x^2 + 4x + 3)i$$

실수가 되기 위해서는 $x^2 + 4x + 3 = 0$

$$(x + 1)(x + 3) = 0 \therefore x = -3, -1$$

순허수가 되기 위해서는

$$x^2 - x - 2 = 0 \text{ 이고 } x^2 + 4x + 3 \neq 0$$

$$x = -1, 2 \text{ 이고 } x \neq -3, -1 \therefore x = 2$$

$$(-3) \times (-1) \times 2 = 6$$

18. x, y 가 양의 실수이고, $x^2 + xyi + y^2 - 5 - 2i = 0$ 일 때, $x + y$ 의 값을 구하여라.(단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

실수부와 허수부로 나눈다.

$$(x^2 + y^2 - 5) + (xy - 2)i = 0$$

$$x^2 + y^2 - 5 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$xy - 2 = 0 \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하면

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 5 + 4 = 9$$

$$\therefore x + y = 3 \quad (\because x, y \text{ 는 양의 실수})$$

19. $i - 2i^2 + 3i^3 - 4i^4 + 5i^5 - 6i^6 + \cdots - 100i^{100} = a + bi$ 라고 할 때, $a + b$ 의 값은?

① -100 ② -50 ③ 0 ④ 25 ⑤ 50

해설

$$\begin{aligned} \text{준식} &= i + 2 - 3i - 4 + 5i + 6 - 7i - 8 + \cdots \\ &= \{(1 + 5 + 9 + \cdots + 97) - (3 + 7 + \cdots + 99)\}i \\ &\quad + \{(2 + 6 + \cdots + 98) - (4 + 8 + \cdots + 100)\} \\ &= (1225 - 1275)i + (1250 - 1300) = -50 - 50i \text{ 따라서 } a = -50, \\ &b = -50 \text{ 이므로 } a + b = -100 \end{aligned}$$

20. 이차방정식 $x^2 - x + m = 0$ 의 한 근이 2일 때, 다른 한 근을 구하여라.
(단, m 은 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2 - x + m = 0$ 의 한 근이 2이므로

$x = 2$ 를 대입하면

$$2^2 - 2 + m = 0 \quad \therefore m = -2$$

따라서 주어진 방정식은 $x^2 - x - 2 = 0$ 이다.

이 방정식을 풀면

$$(x - 2)(x + 1) = 0 \text{에서 } x = 2 \text{ 또는 } x = -1$$

이므로 다른 한 근은 -1이다.

21. 이차방정식 $(2-k)x^2 + 2kx + 1 = 0$ 이 서로 다른 부호의 실근을 갖는 실수 k 의 값의 범위는?

① $k < -2, k > 1$

② $k < -2$

③ $k > 0$

④ $k > 2$

⑤ $k < 2$

해설

서로 다른 부호의 실근을 갖기 위한 조건은

$$\alpha\beta < 0 \text{이므로 } \frac{1}{2-k} < 0$$

$$\therefore 2-k < 0$$

$$\therefore 2 < k$$

22. 이차함수 $y = ax^2 - 5x - 2$ 의 그래프와 직선 $y = bx + a$ 의 교점의 x 좌표가 각각 $0, -3$ 일 때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

이차함수 $y = ax^2 - 5x - 2$ 의 그래프와

직선 $y = bx + a$ 의 교점의 x 좌표 $0, -3$ 은

이차방정식 $ax^2 - (b+5)x - a - 2 = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\text{두근의합}) = 0 + (-3) = \frac{b+5}{a}$$

$$\therefore 3a + b = -5 \cdots \text{㉠}$$

$$(\text{두 근의 곱}) = 0 \cdot (-3) = \frac{-a-2}{a}$$

$$\therefore a = -2$$

$$\text{㉠에서 } b = 1 \text{ 이므로 } a + b = -1$$

23. $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ 이고, $a = \sqrt{3} + 1$ 일 때, $a^{x^2} \div a^{2\sqrt{2}x+3}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{2 - \sqrt{3}}{4}$

② $\frac{4 + \sqrt{3}}{4}$

③ $\frac{2\sqrt{3} - 3}{4}$

④ $\frac{2 - \sqrt{3}}{2}$

⑤ $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$

해설

(i) $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ 에서 $x - \sqrt{2} = \sqrt{3}$

$$x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 3$$

$$\therefore x^2 - 2\sqrt{2}x = 1$$

(ii) $a^{x^2} \div a^{2\sqrt{2}x+3} = a^{x^2-2\sqrt{2}x-3} = a^{-2}$

$$= \frac{1}{a^2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$$

24. $(4+3)(4^2+3^2)(4^4+3^4)(4^8+3^8)$ 을 간단히 하면?

① $4^8 + 3^8$

② $4^{15} - 3^{15}$

③ $4^{15} + 3^{15}$

④ $4^{16} - 3^{16}$

⑤ $4^{16} + 3^{16}$

해설

$$\begin{aligned} & (4+3)(4^2+3^2)(4^4+3^4)(4^8+3^8) \\ &= (4-3)(4+3)(4^2+3^2)(4^4+3^4)(4^8+3^8) \\ &= (4^2-3^2)(4^2+3^2)(4^4+3^4)(4^8+3^8) \\ &= (4^4-3^4)(4^4+3^4)(4^8+3^8) \\ &= (4^8-3^8)(4^8+3^8) \\ &= 4^{16}-3^{16} \end{aligned}$$

25. $99 \times 101 \times (100^2 + 100 + 1) \times (100^2 - 100 + 1)$ 을 계산하면?

- ① $100^6 - 1$ ② $100^6 + 1$ ③ $100^9 - 1$
④ $100^9 + 1$ ⑤ 1

해설

$$\begin{aligned} 100 &= a \text{로 치환 하면} \\ (\text{준식}) &= (a-1)(a+1)(a^2+a+1)(a^2-a+1) \\ &= (a^3-1)(a^3+1) \\ &= a^6-1 \\ &= 100^6-1 \end{aligned}$$

26. $x + \frac{1}{x} = 1$ 일 때, $x^{101} + \frac{1}{x^{101}}$ 의 값은?

- ① 1 ② -1 ③ -2 ④ 2 ⑤ 101

해설

$$x + \frac{1}{x} = 1 \text{ 에서 } x^2 + 1 = x$$

$$\therefore x^2 - x + 1 = 0, x^3 = -1$$

$$\begin{aligned} (\text{준 식}) &= (x^3)^{33} \cdot x^2 + \frac{1}{(x^3)^{33} \cdot x^2} \\ &= -x^2 + \frac{-1}{x^2} = -\frac{x^4 + 1}{x^2} = -\frac{-x + 1}{x^2} \\ &= \frac{x - 1}{x^2} = 1 \end{aligned}$$

27. 3차 이하의 다항식 $f(x)$ 에 대하여

$\frac{f(x)}{x(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2} + \frac{d}{x-3}$ 가 성립할 때, 다음 중 d 와 같은 것은? (단, a, b, c, d 는 실수이다.)

- ① $f(0)$ ② $f(1)$ ③ $\frac{f(2)}{2}$ ④ $\frac{f(3)}{6}$ ⑤ 0

해설

준 식을 정리하면

$$f(x) = a(x-1)(x-2)(x-3) + bx(x-2)(x-3) + cx(x-1)(x-3) + dx(x-1)(x-2)$$

$x=3$ 일 때,

$$f(3) = d \cdot 3(3-1)(3-2)$$

$$\therefore d = \frac{f(3)}{6}$$

28. 두 다항식 $f(x), g(x)$ 에 대하여 $f(x) + g(x)$ 를 $x + 1$ 로 나누면 나누어 떨어지고, $f(x) - g(x)$ 를 $x + 1$ 로 나누면 나머지가 2이다. 다음 [보기]의 다항식 중에서 $x + 1$ 로 나누어 떨어지는 것을 모두 고르면?

- $\textcircled{\tiny \text{㉠}}$ $x + f(x)$

$\textcircled{\tiny \text{㉡}}$ $x - g(x)$
- $\textcircled{\tiny \text{㉢}}$ $x + f(x)g(x)$

- $\textcircled{\tiny \text{㉠}}$ $\textcircled{\tiny \text{㉠}}$

$\textcircled{\tiny \text{㉡}}$ $\textcircled{\tiny \text{㉢}}$

$\textcircled{\tiny \text{㉢}}$ $\textcircled{\tiny \text{㉠}}, \textcircled{\tiny \text{㉡}}$
- $\textcircled{\tiny \text{㉣}}$ $\textcircled{\tiny \text{㉠}}, \textcircled{\tiny \text{㉢}}$

$\textcircled{\tiny \text{㉤}}$ $\textcircled{\tiny \text{㉠}}, \textcircled{\tiny \text{㉡}}, \textcircled{\tiny \text{㉢}}$

해설

$f(x) + g(x) = (x + 1)Q(x)$
 $f(x) - g(x) = (x + 1)Q'(x) + 2$
 $x = -1$ 을 두 식에 각각 대입하면
 $f(-1) + g(-1) = 0 \cdots \textcircled{\tiny \text{㉠}}$
 $f(-1) - g(-1) = 2 \cdots \textcircled{\tiny \text{㉡}}$
 $\textcircled{\tiny \text{㉠}}, \textcircled{\tiny \text{㉡}}$ 을 연립하여 풀면 $f(-1) = 1, g(-1) = -1$
보기의 식 중에서 $x + 1$ 로 나누어 떨어지는 것은 $x = -1$ 을 대입하면 식의 값이 0 이 된다.
 $\textcircled{\tiny \text{㉠}}$ $-1 + f(-1) = -1 + 1 = 0$
 $\textcircled{\tiny \text{㉡}}$ $-1 - g(-1) = -1 + 1 = 0$
 $\textcircled{\tiny \text{㉢}}$ $-1 + f(-1)g(-1) = -1 + 1 \times (-1) = -2$
 $\therefore \textcircled{\tiny \text{㉠}}, \textcircled{\tiny \text{㉡}}$

29. 자연수 $N = 5 \cdot 29^3 + 15 \cdot 29^2 + 15 \cdot 29 + 5$ 의 양의 약수의 개수는?

① 20 개

② 40 개

③ 60 개

④ 80 개

⑤ 100 개

해설

주어진 N 의 값을 직접 계산하여 다시 소인수분해 하기는 너무 복잡하므로,

주어진 수들을 하나의 문자로 생각하여 5로 묶으면

$$N = 5(29^3 + 3 \cdot 29^2 + 3 \cdot 29 + 1)$$

$$= 5(29 + 1)^3$$

$$= 5 \cdot 30^3$$

$$= 5 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5)^3$$

$$= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^4$$

따라서 N 의 양의 약수의 개수는

$$(3 + 1)(3 + 1)(4 + 1) = 80$$

30. 두 다항식 $A = x^3 + ax^2 - 4x + 2$ 와 $B = x^3 + bx^2 - 2$ 의 최대공약수가 이차식일 때, $a + b$ 의 값을 구하면? (단, a, b 는 상수)

- ① -3
- ② -1
- ③ 2
- ④ 4
- ⑤ 7

해설

$A = Gf(x), B = Gg(x)$ 라 하면
 $A + B = G(f(x) + g(x)), A - B = G(f(x) - g(x))$ 이므로
공통인수는 G 를 포함한다.

$$\begin{cases} A + B = 2x^3 + (a + b)x^2 - 4x \\ \qquad = x(2x^2 + (a + b)x - 4) \\ A - B = (a - b)x^2 - 4x + 4 \end{cases}$$

$A + B$ 에서 x 는 $A - B$ 의 인수가 아니므로 G 가 될 수 없다.
그러므로 $G = 2x^2 + (a + b)x - 4$
 $\therefore A - B = -G = -2x^2 - (a + b)x + 4$
계수비교하면 $a - b = -2, a + b = 4$

31. $x^2 - x + 1 = 0$ 의 한 근을 z 라 한다. $p = \frac{1+z}{3-z}$ 일 때, $7p \cdot \bar{p}$ 의 값을 구하면?

- ① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

$x^2 - x + 1 = 0$ 의 근이 $z, \bar{z}$ 이므로

$$z + \bar{z} = 1, z\bar{z} = 1$$

$$\begin{aligned} 7p \cdot \bar{p} &= 7 \left(\frac{1+z}{3-z} \right) \left(\frac{\overline{1+z}}{\overline{3-z}} \right) \\ &= 7 \left(\frac{1+z}{3-z} \right) \left(\frac{1+\bar{z}}{3-\bar{z}} \right) \\ &= 7 \left\{ \frac{1+(z+\bar{z})+z \cdot \bar{z}}{9-3(z+\bar{z})+z \cdot \bar{z}} \right\} \\ &= 3 \end{aligned}$$

32. 양의 실수 a, b 에 대하여 다음 복소수 중 $z = a(1+i) + b(1-i)$ (i 는 허수단위)의 꼴로 나타낼 수 있는 것은?

- ① $-3+i$
- ② $2+3i$
- ③ $5-2i$
- ④ $1-3i$
- ⑤ $-4-2i$

해설

$z = (a+b) + (a-b)i \in A \ (a > 0, b > 0)$

- ① $a+b = -3, a-b = 1$
 $\therefore a = -1, b = -2$ (부적당)
- ② $a+b = 2, a-b = 3$
 $\therefore a = \frac{5}{2}, b = -\frac{1}{2}$ (부적당)
- ③ $a+b = 5, a-b = -2$
 $\therefore a = \frac{3}{2}, b = \frac{7}{2}$ (양의 실수)
- ④ $a+b = 1, a-b = -3$
 $\therefore a = -1, b = 2$ (부적당)
- ⑤ $a+b = -4, a-b = -2$
 $\therefore a = -3, b = -1$ (부적당)

33. 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근의 합이 3일 때, 방정식 $f(2x + 1) = 0$ 의 두 근의 합을 구하면?

- ㉠ $\frac{1}{2}$ ㉡ 2 ㉢ $\frac{1}{3}$ ㉣ 3 ㉤ $\frac{1}{4}$

해설

이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때,
 $\alpha + \beta = 3$
한편, $f(2x + 1) = 0$ 의 두 근은 $2x + 1 = \alpha, 2x + 1 = \beta$
즉, $x = \frac{\alpha - 1}{2}, \frac{\beta - 1}{2}$ 이다.
$$\frac{\alpha - 1}{2} + \frac{\beta - 1}{2} = \frac{\alpha + \beta - 2}{2} = \frac{3 - 2}{2} = \frac{1}{2}$$

해설

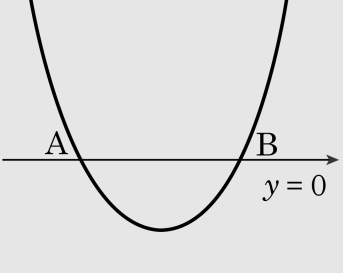
$f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha + \beta = 3$
 $f(x) = k(x - \alpha)(x - \beta)$ 라 하면
 $f(2x + 1) = k(2x + 1 - \alpha)(2x + 1 - \beta)$
 $f(2x + 1) = 0$ 의 두 근은 $x = \frac{\alpha - 1}{2}, \frac{\beta - 1}{2}$
 $\therefore \frac{\alpha - 1}{2} + \frac{\beta - 1}{2} = \frac{\alpha + \beta - 2}{2} = \frac{3 - 2}{2} = \frac{1}{2}$

34. 이차함수 $y = x^2 + ax + a$ 가 x 축과 두 점 A, B 에서 만날 때, $\overline{AB} = 2\sqrt{3}$ 이 되도록 하는 양수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 6$

해설



A(α , 0) B(β , 0) 이라고 하면 ($\therefore \alpha < \beta$)
 $\alpha + \beta = -a$
 $\alpha\beta = a$ 이므로
($\therefore y = x^2 + ax + a$)
 $(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = a^2 - 4a$
 $\overline{AB} = \beta - \alpha = 2\sqrt{3}$ 이므로
 $a^2 - 4a = 12$
 $(a - 6)(a + 2) = 0$
 $\therefore a = -2, 6$

35. 이차함수 $y = x^2 - (a^2 - 4a + 3)x$ 의 그래프와 직선 $y = x + 12 - a^2$ 이 서로 다른 두 점에서 만나고, 두 교점이 원점에 대하여 대칭일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

이차함수 $y = x^2 - (a^2 - 4a + 3)x$ 의 그래프와 직선 $y = x + 12 - a^2$ 의 교점의 x 좌표는 이차방정식 $x^2 - (a^2 - 4a + 3)x = x + 12 - a^2$

즉, $x^2 - (a^2 - 4a + 4)x + a^2 - 12 = 0$ 의 두 근이다.

그런데 두 교점이 원점에 대하여 대칭이므로 위의 이차방정식의

두 근의 합은 0이고, 두 근의 곱은 음이다.

따라서, 근과 계수의 관계에 의하여

$$a^2 - 4a + 4 = 0 \text{ 에서 } (a - 2)^2 = 0 \quad \therefore a = 2$$

$$a^2 - 12 < 0 \text{ 에서 } -2\sqrt{3} < a < 2\sqrt{3}$$

$$\therefore a = 2$$

36. $x^3 = 1$ 의 세 근이 a, b, c 이다. $22a^{21} + 21b^{22} + 22c^{21}$ 의 값이 실수 일 때, 이 실수 값을 구하면?

① 60

② 65

③ 68

④ 72

⑤ 75

해설

$x^3 = 1 \Rightarrow a^3 = 1 \quad b^3 = 1 \quad c^3 = 1$
 $\Rightarrow (x-1)(x^2+x+1) = 0 \quad \dots \quad \textcircled{1}$
 $\therefore 22a^{21} + 21b^{22} + 22c^{21}$
 $= 22(a^3)^7 + 21(b^3)^7b + 22(c^3)^7$
 $= 21b + 44$ 이 값이 실수이므로
①에서 $b = 1$ 이다.
 $\therefore 21b + 44 = 65$

37. 두 이차방정식 $3x^2 - (k+1)x + 4k = 0$, $3x^2 + (2k-1)x + k = 0$ 이
단 하나의 공통인 근 α 를 가질 때, $3k + \alpha$ 의 값은? (단, k 는 실수인
상수)

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

공통근이 α 이므로
 $3\alpha^2 - (k+1)\alpha + 4k = 0$
 $3\alpha^2 + (2k-1)\alpha + k = 0$
두 식을 변변끼리 빼면 $3k(\alpha - 1) = 0$
 $k = 0$ 또는 $\alpha = 1$
 $k = 0$ 이면 두 식이 같아지므로
조건에 맞지 않는다.
 $\therefore \alpha = 1$ 을 대입하면
 $3 - (k+1) + 4k = 0, \quad k = -\frac{2}{3}$
 $\therefore 3k + \alpha = -1$

38. x 의 다항식 $f(x)$ 에 대하여 $f(x^2) = x^3 f(x+1) - 2x^4 + 2x^2$ 이 성립할 때, $f(x)$ 를 구하면? (단, $f(0) = f(1) = f(2) = 0$)

- ① $f(x) = x(x-1)(x-2)$ ② $f(x) = x^2(x-1)(x-2)$
③ $f(x) = x(x-1)^2(x-2)$ ④ $f(x) = x(x-1)(x-2)^2$
⑤ $f(x) = x^2(x-1)^2(x-2)$

해설

- (i) $f(x)$ 를 n 차의 식이라하면
좌변 : $2n$ 차 = 우변 : $n+3$ 차
 $\therefore n = 3$
(ii) $f(x) = kx(x-1)(x-2)$ (단, $k \neq 0$)
($\because f(0) = f(1) = f(2) = 0$)
좌변 = $kx^6 - 3kx^4 + 2kx^2$
우변 = $kx^6 - (k+2)x^4 + 2x^2$
 $\therefore kx^6 - 3kx^4 + 2kx^2 = kx^6 - (k+2)x^4 + 2x^2$
 $-3k = -(k+2)$
 $k = 2$ 에서 $k = 1$
 $\therefore f(x) = x(x-1)(x-2)$

39. $P(x) = x^2 + x + 1$ 에 대하여 $P(x^6)$ 을 $P(x)$ 로 나눈 나머지를 구하면?

① $x - 4$

② $4x - 1$

③ 5

④ 4

⑤ 3

해설

$$P(x^6) = x^{12} + x^6 + 1$$

$x^2 + x + 1 = 0$ 의 해를 w 라 하자.

$$w^2 + w + 1 = 0, \text{ 양변에 } (w - 1) \text{ 을 곱하면}$$

$$w^3 - 1 = 0, w^3 = 1$$

$$x^{12} + x^6 + 1 = (x^2 + x + 1)Q(x) + ax + b \text{ 에}$$

w 를 대입하면,

$$(w^3)^4 + (w^3)^2 + 1 = (w^2 + w + 1)Q(w) + aw + b$$

$$3 = aw + b$$

w 는 허수, a, b 는 실수 이므로, $a = 0, b = 3$

$\therefore$ 나머지= 3

40. 자연수 n 에 대하여 $f(n) = ni^n$ 을 만족할 때, $f(1) + f(2) + \dots + f(100) + f(101) = x + yi$ 이다. 이 때, 실수 x, y 에 대하여 $y - x$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\begin{aligned} & f(1) + f(2) + \dots + f(100) + f(101) \\ &= i + 2i^2 + 3i^3 + \dots + 100i^{100} + 101i^{101} \\ &= i - 2 - 3i + 4 + 5i + \dots + 100 + 101i \\ &= (-2 + 4 - 6 + 8 + \dots - 98 + 100) \\ &\quad + (1 - 3 + 5 - 7 + \dots + 97 - 99 + 101)i \\ &= 2 \times 25 + (-2) \times 25 + 101i \\ &= 50 + 51i \\ &\therefore x = 50, y = 51, y - x = 51 - 50 = 1 \end{aligned}$$

41. 서로 다른 두 복소수 x, y 가 $x^2 - y = i$, $y^2 - x = i$ 를 만족할 때, $x^3 + y^3$ 의 값을 구하시오. (단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $2 - 3i$

해설

$x^2 - y = i \cdots \textcircled{1}$, $y^2 - x = i \cdots \textcircled{2}$ 에서

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 하면 : $(x + y)(x - y) + (x - y) = 0$,
 $(x - y)(x + y + 1) = 0$

조건에서 $x \neq y$ 이므로 $x + y = -1$ 이다.

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 하면 $x^2 + y^2 - x - y = 2i$

식을 변형하면 $(x + y)^2 - 2xy - (x + y) = 2i$

$\therefore xy = 1 - i$

$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$
 $= (-1)^3 - 3(1 - i)(-1)$
 $= 2 - 3i$

42. $x^2 + xy - 2y^2 + 2x + 7y + k = f(x, y)$ 라 할 때, $f(x, y) = 0$ 이 두 개의 직선을 나타내도록 k 의 값을 정하면?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

$$f(x, y) = x^2 + (y + 2)x - 2y^2 + 7y + k = 0$$

주어진 식이 두 개의 직선을 나타내려면

x, y 에 관한 일차식으로 인수분해되어야 하므로

근의 공식에서 근호 안의 식($= D$)이 완전제곱꼴이어야 한다.

$$D = (y + 2)^2 - 4(-2y^2 + 7y + k)$$

$$= 9y^2 - 24y + 4 - 4k \quad \cdots (i)$$

(i)이 완전제곱식이어야 하므로

(i)의 판별식

$$\frac{D}{4} = (-12)^2 - 9(4 - 4k) = 0$$

$$108 + 36k = 0 \quad \therefore k = -3$$

43. 이차방정식 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $(1 - \alpha)(1 - \beta) + (2 - \alpha)(2 - \beta) + \cdots + (5 - \alpha)(5 - \beta)$ 의 값을 구하면?

① 50 ② 40 ③ 10 ④ 30 ⑤ 20

해설

$x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로

$$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = -1$$

$$\therefore (1 - \alpha)(1 - \beta) + (2 - \alpha)(2 - \beta) + \cdots + (5 - \alpha)(5 - \beta)$$

$$= (1 - (\alpha + \beta) + \alpha\beta) + (4 - 2(\alpha + \beta) + \alpha\beta) + \cdots +$$

$$\{25 - 5(\alpha + \beta) + \alpha\beta\}$$

$$= (1 + 4 + 9 + 16 + 25) - (1 + 2 + 3 + 4 + 5)(\alpha + \beta) + 5\alpha\beta$$

$$= 55 - 15 \times 2 - 5 = 55 - 30 - 5 = 20$$

44. 서로 다른 두 실수 a, b 에 대하여 두 방정식 $x^2 + 2ax + b = 0$ 과 $x^2 + 2bx + a = 0$ 의 두 근의 차가 서로 같을 때, a, b 의 관계식은?

- ① $a + b = 0$ ② $a - b - 1 = 0$ ③ $a - b + 1 = 0$
④ $a + b - 1 = 0$ ⑤ $a + b + 1 = 0$

해설

$x^2 + 2ax + b = 0$ 의 해를 α, β
 $x^2 + 2bx + a = 0$ 의 해를 γ, δ 라 하면
 $|\alpha - \beta| = |\gamma - \delta|$ 에서
 $(\alpha - \beta)^2 = (\gamma - \delta)^2$,
 $(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (\gamma + \delta)^2 - 4\gamma\delta$
 $(-2a)^2 - 4b = (-2b)^2 - 4a$
 $\therefore (a - b)(a + b + 1) = 0$
 $a \neq b$ 이므로 $a + b + 1 = 0$

45. 세 실수 x, y, z 에 대하여 $(x-1) : (y-3) : (z+2) = 2 : 1 : 3$ 일 때, $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{2}$

해설

$(x-1) : (y-3) : (z+2) = 2 : 1 : 3$ 이므로

$x-1 = 2k$ 에서 $x = 2k + 1$

$y-3 = k$ 에서 $y = k + 3$

$z+2 = 3k$ 에서 $z = 3k - 2$

$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2$ 에 대입하면

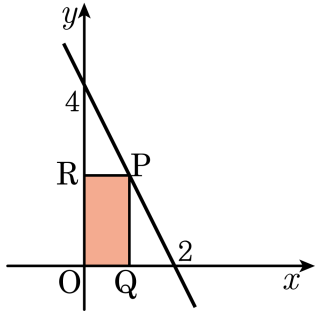
$(k-2)^2 + (-2k+5)^2 + (k-3)^2$

$= 6k^2 - 30k + 38$

$= 6\left(k - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$

따라서 $k = \frac{5}{2}$ 일 때, 최솟값이 $\frac{1}{2}$ 이다.

46. 직선 $y = -2x + 4$ 위의 제1 사분면에 있는 한 점 P 에서 x 축, y 축에 수선을 그어 그때의 수선의 발을 각각 Q, R 이라 할 때, 사각형 OQPR 의 넓이의 최댓값은?



- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 7

해설

$$\begin{aligned} y &= x(-2x + 4) \quad (0 < x < 2) \\ &= -2x^2 + 4x \\ &= -2(x^2 - 2x + 1 - 1) \\ &= -2(x - 1)^2 + 2 \\ x &= 1 \text{ 일 때 최댓값 } 2 \end{aligned}$$

47. 지면으로부터 20 m 높이의 옥상에서 초속 20 m 로 쏘아 올린 물체의 t 초 후의 높이를 h m 라 할 때, 관계식 $h = 20t - t^2 + 20$ 이 성립한다. 높이가 가장 높을 때는 던진 후 몇 초 후인가?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$$\begin{aligned} h &= 20t - t^2 + 20 \\ &= -(t^2 - 20t) + 20 \\ &= -(t - 10)^2 + 120 \end{aligned}$$

따라서 $t = 10$ 일 때 최댓값 120 를 가진다.

48. 사차방정식 $x^4 - 2x^2 + ax + b = 0$ 이 허근 $1 + 2i$ 를 가질 때, 실근 α, β 와 a, b 의 합 $\alpha + \beta + a + b$ 의 값은? (단, a, b 는 실수이고 $i = \sqrt{-1}$)

① -3

② -1

③ 2

④ 5

⑤ 7

해설

계수가 실수이므로 $1 + 2i$ 가 근이면 $1 - 2i$ 도 근이다.

따라서 $f(x) = x^4 - 2x^2 + ax + b$ 는 $\{x - (1 + 2i)\} \{x - (1 - 2i)\}$

즉, $x^2 - 2x + 5$ 로 나누어 떨어져야 한다.

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + ax + b = (x^2 - 2x + 5)(x^2 + 2x - 3) + (a - 16)x + b + 15$$

$$\text{따라서, } a = 16, b = -15$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \text{에서 } a + \beta = -2$$

$$\therefore \alpha + \beta + a + b = -1$$

49. x, y, z 에 대한 다음 연립방정식의 근의 곱이 음의 정수이고, 합이 양의 정수일 때, $x + y + z$ 의 최댓값을 구하면?

$$\begin{cases} 2x - y + z = a & \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\ x + 2y + 2z = 3a - 11 & \cdots \cdots \textcircled{㉡} \\ 3x - y + 2z = 2a - 2 & \cdots \cdots \textcircled{㉢} \end{cases}$$

- ① 2 ② -2 ③ 3 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ -3

해설

$$\textcircled{㉠} \times 2 - \textcircled{㉡} \text{에서 } 3x - 4y = -a + 11$$

$$\textcircled{㉡} - \textcircled{㉢} \text{에서 } -2x + 3y = a - 9$$

$$\therefore x = a - 3, y = a - 5,$$

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } z = 1$$

$$xyz = (a - 3)(a - 5) \cdot 1 < 0$$

$$\therefore 3 < a < 5 \cdots \cdots \textcircled{㉣}$$

$$x + y + z = (a - 3) + (a - 5) + 1 = 2a - 7 > 0$$

$$\therefore a > \frac{7}{2} \cdots \cdots \textcircled{㉤}$$

$$\textcircled{㉣}, \textcircled{㉤} \text{에서 } \frac{7}{2} < a < 5 \cdots \cdots \textcircled{㉥}$$

그런데 $x + y + z$ 는 정수이므로 $2a - 7$ 은 정수이고 $2a$ 도 정수이다.

$$\textcircled{㉥} \text{에서 } 7 < 2a < 10$$

$$\therefore 2a = 8 \text{ 또는 } 9 (\because 2a \text{는 정수})$$

$$\therefore a = 4 \text{ 또는 } \frac{9}{2}$$

$$\therefore x = 1, y = -1, z = 1 \text{ 또는 } x = \frac{3}{2}, y = -\frac{1}{2}, z = 1$$

$$\therefore x + y + z = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 2$$

50. 이차방정식 $x^2 + (k + 1)x + 2k + 1 = 0$ 의 두 근이 모두 정수일 때, 양수 k 의 값을 구하면?

- ① 5
- ② 6
- ③ 7
- ④ 8
- ⑤ 9

해설

두 근을 α, β ($\alpha \geq \beta$) 라 하면 근과 계수와의 관계에서

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -(k + 1) & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ \alpha\beta = 2k + 1 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$\textcircled{1} \times 2 + \textcircled{2}$ 을 하면 $\alpha\beta + 2(\alpha + \beta) = -1$

$\alpha\beta + 2\alpha + 2\beta + 4 = 3, \quad (\alpha + 2)(\beta + 2) = 3$

α, β 가 정수이므로 $(\alpha + 2, \beta + 2) = (3, 1), (-1, -3)$

$\therefore (\alpha, \beta) = (1, -1), (-3, -5)$

$\textcircled{1}$ 에서

$k = -(\alpha + \beta + 1)$ 이므로 $k = -1, 7$

$k > 0$ 이므로 $k = 7$