1. 다음 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립할 때, xy의 값을 구하여라.

$$(2k+3)x+(3k-1)y+5k-9=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

k에 대하여 내림차순으로 정리하면

$(2x+3y+5)k+(3x-y-9)=0$

이것은 k에 대한 항등식이므로

$2x+3y+5=0$

$3x-y-9=0$

연립방정식을 풀면 $x=2,\ y=-3$

$\therefore\ xy=2\times(-3)=-6$

2. 다항식 $6x^3-7x^2+17x-3$을 $3x-2$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라 할 때, $Q(1)+R$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$6x^3-7x^2+17x-3=(3x-2)Q(x)+R$

양변에 $x=1$을 대입하면, $13=Q(1)+R$

$\therefore\ Q(1)+R=13$

해설

$6x^3-7x^2+17x-3$를 $3x-2$로 직접 나누거나 조립제법을 이용하여 몫과 나머지를 구할 수 있다.

3. $f(x) = 3x^3 + px^2 + qx + 12$ 가 $x+2$ 로도 나누어떨어지고, $x-1$ 로도 나누어떨어질 때, $\dfrac{q}{p}$ 의 값은?

① 9　　② 4　　③ -9　　④ -3　　⑤ -12

해설

$$f(-2) = -24 + 4p - 2q + 12 = 0$$

$$f(1) = 3 + p + q + 12 = 0$$

$$p = -3,\ q = -12,\ \frac{q}{p} = \frac{-12}{-3} = 4$$

4. $x^4 + 3x^2 + 4 = (x^2 + x + 2)(x^2 + ax + b)$ 일 때, 상수 a, b 의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$\begin{aligned}(\text{좌 변}) &= (x^2+2)^2 - x^2 \\ &= (x^2+x+2)(x^2-x+2)\end{aligned}$$

$\therefore\ a = -1,\ b = 2$

$\therefore ab = -1 \times 2 = -2$

5. 다음 계산 과정에서 최초로 틀린 부분은?

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}} &= \boxed{\text{㉠}}\ \frac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{-2}}{\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}} \\
&= \boxed{\text{㉡}}\ \frac{\sqrt{-16}}{\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}} \\
&= \boxed{\text{㉢}}\ \frac{\sqrt{-16}}{2} \\
&= \boxed{\text{㉣}}\ \frac{4i}{2} \\
&= \boxed{\text{㉤}} = \sqrt{-4}
\end{aligned}
$$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

해설

$\sqrt{-2}\sqrt{-2} = \sqrt{2}i\sqrt{2}i = 2i^2 = -2$

따라서 최초로 틀린 부분은 ㉢이다.

6. x에 대한 이차방정식 $(k^2-1)x^2-2(k-1)x+1=0$이 허근을 가질 때, $k>m$이다. m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$(k^2-1)x^2-2(k-1)x+1=0$이

허근을 가지려면

$$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2-1)<0$$

$$(k^2-2k+1)-(k^2-1)<0$$

$$-2k+2<0,\ k>1$$

$$\therefore\ m=1$$

7. $y = -\frac{1}{3}x^2$ 의 그래프와 모양이 같고 $x = -3$ 에서 최댓값 5 를 갖는 포물선의 식의 y 절편을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 2

해설

$y = -\frac{1}{3}x^2$ 의 그래프와 모양이 같고 $x = -3$ 에서 최댓값 5 를 갖는 포물선의 식은 $y = -\frac{1}{3}(x+3)^2+5$ 이다. $y = -\frac{1}{3}(x+3)^2+5 = -\frac{1}{3}x^2 - 2x + 2$

따라서 y 의 절편은 2 이다.

8. 함수 $y=-x^2-2x+5\ (-2 \le x \le 2)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $M+m$ 을 구하여라.

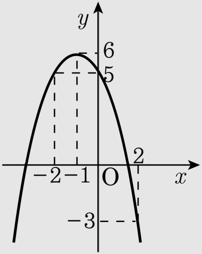
▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$y=-x^2-2x+5=-\left(x^2+2x+1-1\right)+5=-(x+1)^2+6$

점$(-1,6)$ 을 꼭지점으로 하고 위로 볼록한 포물선으로 다음 그림과 같다.



$f(-2)=5, f(2)=-3$

따라서 최댓값은 $x=-1$ 일 때 $f(-1)=6$ 이며

최솟값은 $x=2$ 일 때 $f(2)=-3$ 이다.

$\therefore\ M+m=6-3=3$

9. $x+y+z=1$, $xy+yz+zx=2$, $xyz=3$일 때, $(x+1)(y+1)(z+1)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$(x+1)(y+1)(z+1)$
$= xyz+xy+yz+zx+x+y+z+1$
$= 7$

10. 다음 식 $(3x^2 - x + 2)(4x^3 - 5x^2 + x + 1)^5$ 을 전개했을 때, 계수들의 총합은?

① 4 ② -32 ③ -64 ④ 32 ⑤ 64

해설

다항식의 계수들의 총합을 구할 경우
$x = 1$을 대입한다.
$(3 - 1 + 2)(4 - 5 + 1 + 1)^5 = 4 \times 1 = 4$

11. 다항식 $(x+2)f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 9, 다항식 $(2x-3)f(3x-7)$을 $x-3$으로 나눈 나머지가 -3이다. 이때 다항식 $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나눈 나머지는?

① $-4x+7$　② $-4x-3$　③ $2x+3$
④ $2x-3$　⑤ $3x-1$

해설

나머지정리에 의하여
$(x+2)f(x)$에 $x=1$을 대입하면
$3f(1)=9$이므로 $f(1)=3 \cdots$ ㉠
$(2x-3)f(3x-7)$에 $x=3$을 대입하면
$3f(2)=-3$이므로 $f(2)=-1 \cdots$ ㉡
$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$에 ㉠, ㉡을 대입하면

$$\begin{cases} a+b=3 \\ 2a+b=-1 \end{cases}$$

이므로 $a=-4,\ b=7$

12. x에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+c를 $x-1$로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. $i=1$일 때, $a+b+c$의 값을 옳게 구한 것은?

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & a & b & c \\ & & d & e & f \\ \hline & 1 & g & h & \boxed{i} \end{array}$$

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

다항식 x^3+ax^2+bx+c를 $x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & a & b & c \\ & & 1 & a+1 & a+b+1 \\ \hline & 1 & a+1 & a+b+1 & \boxed{a+b+c+1} \end{array}$$

이때 $a+b+c+1=1$이므로

$a+b+c=0$

따라서 ③이다.

13. $(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$ 를 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x^2+cx+d)$ 이다. $a+b+c-d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x^2+x=A$ 로 치환하면

$(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$

$=\{(x-1)(x+2)\}\{(x-3)(x+4)\}+24$

$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)+24$

$=(A-2)(A-12)+24$

$=A^2-14A+48=(A-6)(A-8)$

$=(x^2+x-6)(x^2+x-8)$

$=(x-2)(x+3)(x^2+x-8)$

$\therefore\ a+b+c-d=-2+3+1-(-8)=10$

14. $x^4+2x^2+9=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$로 인수분해될 때, $|ab-cd|$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (x^2+3)^2-(2x)^2 \\ &= (x^2+2x+3)(x^2-2x+3)\end{aligned}$$

여기서 계수를 비교하면

$a=2,\ b=3,\ c=-2,\ d=3$

$\therefore |ab-cd| = |2\times 3-(-2)\times 3| = 12$

15. x^2+ax-9와 x^2+bx+c의 합은 $2x^2-4x-6$, 최소공배수는 x^3-x^2-9x+9이다. $a-b+c$의 값을 구하여라. (단, a, b, c는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$A = x^2 + ax - 9 = Gp$

$B = x^2 + bx + c = Gq$라 하면

$A + B = (p+q)G = 2x^2 - 4x - 6 = 2(x+1)(x-3)$

$L = pqG = x^3 - x^2 - 9x + 9 = x^2(x-1) - 9(x-1)$

$= (x-1)(x^2-9) = (x-1)(x+3)(x-3)$

따라서, $G = x-3$, $p = x+3$, $q = x-1$이다.

$\therefore\ A = (x+3)(x-3) = x^2 - 9$

$\quad B = (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$

$\therefore\ a = 0,\ b = -4,\ c = 3$

$\therefore\ a - b + c = 7$

16. 복소수 $z=x+yi$를 좌표평면 위에 점 $p(x,\ y)$에 대응시킬 때, $(3-4i)z$가 실수가 되게 하는 점 p의 자취가 나타내는 도형은?

① 기울기가 양인 직선
② 기울기가 음인 직선
③ 위로 볼록한 포물선
④ 아래로 볼록한 포물선
⑤ 원

해설

$$(3-4i)z=(3-4i)(x+yi)$$
$$=(3x+4y)+(-4x+3y)i$$

실수가 되려면 허수부 $-4x+3y=0$이다.

$\therefore y=\dfrac{4}{3}x$ (⇒기울기가 양인 직선)

17. 복소수 $(1+i)x^2-(1-4i)x-(2-3i)$가 실수일 때의 x값과 순허수일 때의 x값을 모두 곱한 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

준식을 전개하여 실수부와 허수부로 정리하면

$(x^2-x-2)+(x^2+4x+3)i$

실수가 되기위해서는 $x^2+4x+3=0$

$(x+1)(x+3)=0 \therefore\ x=-3,\ -1$

순허수가 되기 위해서는

$x^2-x-2=0$이고 $x^2+4x+3\neq 0$

$x=-1,\ 2$이고 $x\neq -3,\ -1 \therefore\ x=2$

$(-3)\times(-1)\times 2=6$

18. x, y가 양의 실수이고, $x^2 + xyi + y^2 - 5 - 2i = 0$일 때, $x + y$의 값을 구하여라.(단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

실수부와 허수부로 나눈다.

$(x^2 + y^2 - 5) + (xy - 2)i = 0$

$x^2 + y^2 - 5 = 0 \cdots$ ㉠

$xy - 2 = 0 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 5 + 4 = 9$

$\therefore\ x + y = 3$ ($\because$ x, y 는 양의 실수)

19. $i-2i^2+3i^3-4i^4+5i^5-6i^6+\cdots-100i^{100}=a+bi$ 라고 할 때, $a+b$ 의 값은?

① -100 ② -50 ③ 0 ④ 25 ⑤ 50

해설

준식$=i+2-3i-4+5i+6-7i-8+\cdots$

$=\{(1+5+9+\cdots+97)-(3+7+\cdots+99)\}i$

$\quad+\{(2+6+\cdots+98)-(4+8+\cdots+100)\}$

$=(1225-1275)i+(1250-1300)=-50-50i$ 따라서 $a=-50$, $b=-50$ 이므로 $a+b=-100$

20. 이차방정식 $x^2 - x + m = 0$의 한 근이 2일 때, 다른 한 근을 구하여라. (단, m은 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2 - x + m = 0$의 한 근이 2이므로
$x = 2$를 대입하면
$2^2 - 2 + m = 0 \quad \therefore m = -2$
따라서 주어진 방정식은 $x^2 - x - 2 = 0$이다.
이 방정식을 풀면
$(x-2)(x+1) = 0$에서 $x = 2$ 또는 $x = -1$
이므로 다른 한 근은 -1이다.

21. 이차방정식 $(2-k)x^2+2kx+1=0$이 서로 다른 부호의 실근을 갖는 실수 k의 값의 범위는?

① $k<-2,\ k>1$ ② $k<-2$ ③ $k>0$

④ $k>2$ ⑤ $k<2$

해설

서로 다른 부호의 실근을 갖기 위한 조건은

$\alpha\beta<0$이므로 $\frac{1}{2-k}<0$

$\therefore\ 2-k<0$

$\therefore\ 2<k$

22. 이차함수$y = ax^2 - 5x - 2$ 의 그래프와 직선 $y = bx + a$ 의 교점의 x 좌표가 각각 $0, -3$ 일 때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

이차함수 $y = ax^2 - 5x - 2$ 의 그래프와
직선 $y = bx + a$ 의 교점의 x 좌표 $0, -3$ 은
이차방정식 $ax^2 - (b+5)x - a - 2 = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\text{두근의합}) = 0 + (-3) = \frac{b+5}{a}$$

$\therefore\ 3a + b = -5 \cdots$ ㉠

$$(\text{두 근의 곱}) = 0 \cdot (-3) = \frac{-a-2}{a}$$

$\therefore a = -2$

㉠에서 $b = 1$ 이므로 $a + b = -1$

23. $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$이고, $a = \sqrt{3} + 1$일 때, $a^{x^2} \div a^{2\sqrt{2}x+3}$의 값을 구하면?

① $\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$　② $\dfrac{4+\sqrt{3}}{4}$　③ $\dfrac{2\sqrt{3}-3}{4}$

④ $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$　⑤ $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$

해설

(i) $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$에서 $x - \sqrt{2} = \sqrt{3}$

$x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 3$

$\therefore\ x^2 - 2\sqrt{2}x = 1$

(ii) $a^{x^2} \div a^{2\sqrt{2}x+3} = a^{x^2-2\sqrt{2}x-3} = a^{-2}$

$$= \frac{1}{a^2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

24. $(4+3)(4^2+3^2)(4^4+3^4)(4^8+3^8)$을 간단히 하면?

① 4^8+3^8 ② $4^{15}-3^{15}$ ③ $4^{15}+3^{15}$

④ $4^{16}-3^{16}$ ⑤ $4^{16}+3^{16}$

해설

$$
\begin{aligned}
&(4+3)(4^2+3^2)(4^4+3^4)(4^8+3^8)\\
&=(4-3)(4+3)(4^2+3^2)(4^4+3^4)(4^8+3^8)\\
&=(4^2-3^2)(4^2+3^2)(4^4+3^4)(4^8+3^8)\\
&=(4^4-3^4)(4^4+3^4)(4^8+3^8)\\
&=(4^8-3^8)(4^8+3^8)\\
&=4^{16}-3^{16}
\end{aligned}
$$

25. $99 \times 101 \times (100^2 + 100 + 1) \times (100^2 - 100 + 1)$을 계산하면?

① $100^6 - 1$　② $100^6 + 1$　③ $100^9 - 1$

④ $100^9 + 1$　⑤ 1

해설

$100 = a$로 치환 하면

$$
\begin{aligned}
(\text{준식}) &= (a-1)(a+1)(a^2+a+1)(a^2-a+1) \\
&= \left(a^3-1\right)\left(a^3+1\right) \\
&= a^6 - 1 \\
&= 100^6 - 1
\end{aligned}
$$

26. $x+\frac{1}{x}=1$ 일 때, $x^{101}+\frac{1}{x^{101}}$ 의 값은?

① 1 ② -1 ③ -2 ④ 2 ⑤ 101

해설

$x+\frac{1}{x}=1$ 에서 $x^2+1=x$

$\therefore\ x^2-x+1=0,\ x^3=-1$

$$(\text{준 식})=(x^3)^{33}\cdot x^2+\frac{1}{(x^3)^{33}\cdot x^2}$$

$$=-x^2+\frac{-1}{x^2}=-\frac{x^4+1}{x^2}=-\frac{-x+1}{x^2}$$

$$=\frac{x-1}{x^2}=1$$

27. 3차 이하의 다항식 $f(x)$에 대하여

$$\frac{f(x)}{x(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2} + \frac{d}{x-3}$$ 가 성립할 때, 다음 중 d와 같은 것은? (단, a, b, c, d는 실수이다.)

① $f(0)$ ② $f(1)$ ③ $\frac{f(2)}{2}$ ④ $\frac{f(3)}{6}$ ⑤ 0

해설

준 식을 정리하면

$f(x) = a(x-1)(x-2)(x-3) + bx(x-2)(x-3) + cx(x-1)(x-3) + dx(x-1)(x-2)$

$x=3$일 때,

$f(3) = d \cdot 3(3-1)(3-2)$

$\therefore\ d = \frac{f(3)}{6}$

28. 두 다항식 $f(x), g(x)$ 에 대하여 $f(x)+g(x)$ 를 $x+1$ 로 나누면 나누어 떨어지고, $f(x)-g(x)$ 를 $x+1$ 로 나누면 나머지가 2이다. 다음 [보기]의 다항식 중에서 $x+1$ 로 나누어 떨어지는 것을 모두 고르면?

㉠ $x+f(x)$	㉡ $x-g(x)$
㉢ $x+f(x)g(x)$	

① ㉠　　② ㉢　　③ ㉠,㉡

④ ㉠,㉢　　⑤ ㉠,㉡,㉢

해설

$f(x)+g(x)=(x+1)Q(x)$

$f(x)-g(x)=(x+1)Q'(x)+2$

$x=-1$ 을 두 식에 각각 대입하면

$f(-1)+g(-1)=0\cdots$①

$f(-1)-g(-1)=2\cdots$②

①, ②을 연립하여 풀면 $f(-1)=1, g(-1)=-1$

보기의 식 중에서 $x+1$ 로 나누어 떨어지는 것은 $x=-1$ 을 대입하면 식의 값이 0 이 된다.

㉠ $-1+f(-1)=-1+1=0$

㉡ $-1-g(-1)=-1+1=0$

㉢ $-1+f(-1)g(-1)=-1+1\times(-1)=-2$

$\therefore$ ㉠, ㉡

29. 자연수 $N = 5 \cdot 29^3 + 15 \cdot 29^2 + 15 \cdot 29 + 5$ 의 양의 약수의 개수는?

① 20 개 ② 40 개 ③ 60 개

④ 80 개 ⑤ 100 개

해설

주어진 N 의 값을 직접 계산하여 다시 소인수분해 하기는 너무 복잡하므로,
주어진 수들을 하나의 문자로 생각하여 5로 묶으면
$N = 5(29^3 + 3 \cdot 29^2 + 3 \cdot 29 + 1)$
$= 5(29+1)^3$
$= 5 \cdot 30^3$
$= 5 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5)^3$
$= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^4$
따라서 N 의 양의 약수의 개수는
$(3+1)(3+1)(4+1) = 80$

30. 두 다항식 $A=x^3+ax^2-4x+2$ 와 $B=x^3+bx^2-2$ 의 최대공약수가 이차식일 때, $a+b$ 의 값을 구하면? (단, a, b 는 상수)

① -3 ② -1 ③ 2 ④ 4 ⑤ 7

해설

$A=Gf(x), B=Gg(x)$ 라 하면
$A+B=G(f(x)+g(x)), A-B=G(f(x)-g(x))$ 이므로
공통인수는 G 를 포함한다.

$$\begin{cases} A+B=2x^3+(a+b)x^2-4x \\ \qquad\quad =x\{2x^2+(a+b)x-4\} \\ A-B=(a-b)x^2-4x+4 \end{cases}$$

$A+B$ 에서 x 는 $A-B$ 의 인수가 아니므로 G 가 될 수 없다.
그러므로 $G=2x^2+(a+b)x-4$
$\therefore\ A-B=-G=-2x^2-(a+b)x+4$
계수비교하면 $a-b=-2,\ a+b=4$

31. $x^2 - x + 1 = 0$ 의 한 근을 z라 한다. $p = \dfrac{1+z}{3-z}$ 일 때, $7p \cdot \overline{p}$ 의 값을 구하면?

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

$x^2 - x + 1 = 0$ 의 근이 z, $\overline{z}$ 이므로

$z + \overline{z} = 1,\ z\overline{z} = 1$

$$\begin{aligned} 7p \cdot \overline{p} &= 7\left(\frac{1+z}{3-z}\right)\left(\overline{\frac{1+z}{3-z}}\right) \\ &= 7\left(\frac{1+z}{3-z}\right)\left(\frac{1+\overline{z}}{3-\overline{z}}\right) \\ &= 7\left\{\frac{1+(z+\overline{z})+z\cdot\overline{z}}{9-3(z+\overline{z})+z\cdot\overline{z}}\right\} \\ &= 3 \end{aligned}$$

32. 양의 실수 a, b에 대하여 다음 복소수 중 $z = a(1+i) + b(1-i)$ (i는 허수단위) 의 꼴로 나타낼 수 있는 것은?

① $-3+i$　② $2+3i$　③ $5-2i$

④ $1-3i$　⑤ $-4-2i$

해설

$z = (a+b) + (a-b)i \in A \ (a > 0,\ b > 0)$

① $a+b=-3,\ a-b=1$

$\therefore\ a=-1,\ b=-2$ (부적당)

② $a+b=2,\ a-b=3$

$\therefore\ a=\dfrac{5}{2},\ b=-\dfrac{1}{2}$ (부적당)

③ $a+b=5,\ a-b=-2$

$\therefore\ a=\dfrac{3}{2},\ b=\dfrac{7}{2}$ (양의 실수)

④ $a+b=1,\ a-b=-3$

$\therefore\ a=-1,\ b=2$ (부적당)

⑤ $a+b=-4,\ a-b=-2$

$\therefore\ a=-3,\ b=-1$ (부적당)

33. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 3일 때, 방정식 $f(2x+1)=0$의 두 근의 합을 구하면?

① $\frac{1}{2}$ ② 2 ③ $\frac{1}{3}$ ④ 3 ⑤ $\frac{1}{4}$

해설

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 할 때,
$\alpha+\beta=3$
한편, $f(2x+1)=0$의 두 근은 $2x+1=\alpha$, $2x+1=\beta$
즉, $x=\frac{\alpha-1}{2}$, $\frac{\beta-1}{2}$이다.

$$\frac{\alpha-1}{2}+\frac{\beta-1}{2}=\frac{\alpha+\beta-2}{2}=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}$$

해설

$f(x)=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta=3$
$f(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)$라 하면
$f(2x+1)=k(2x+1-\alpha)(2x+1-\beta)$
$f(2x+1)=0$의 두 근은 $x=\frac{\alpha-1}{2}$, $\frac{\beta-1}{2}$

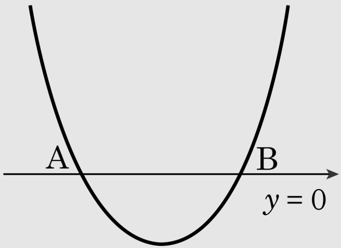
$$\therefore \frac{\alpha-1}{2}+\frac{\beta-1}{2}=\frac{\alpha+\beta-2}{2}=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}$$

34. 이차함수 $y = x^2 + ax + a$ 가 x 축과 두 점 A, B 에서 만날 때, $\overline{\mathrm{AB}} = 2\sqrt{3}$ 이 되도록 하는 양수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 6$

해설



A(α, 0) B(β, 0) 이라고 하면 ($\because$ $\alpha < \beta$)

$\alpha + \beta = -a$

$\alpha\beta = a$ 이므로

($\because$ $y = x^2 + ax + a$)

$(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = a^2 - 4a$

$\overline{\mathrm{AB}} = \beta - \alpha = 2\sqrt{3}$ 이므로

$a^2 - 4a = 12$

$(a - 6)(a + 2) = 0$

$\therefore$ $a = -2,\ 6$

35. 이차함수 $y = x^2 - (a^2 - 4a + 3)x$ 의 그래프와 직선 $y = x + 12 - a^2$ 이 서로 다른 두 점에서 만나고, 두 교점이 원점에 대하여 대칭일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

이차함수 $y = x^2 - (a^2 - 4a + 3)x$ 의 그래프와 직선 $y = x + 12 - a^2$ 의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2 - (a^2 - 4a + 3)x = x + 12 - a^2$

즉, $x^2 - (a^2 - 4a + 4)x + a^2 - 12 = 0$ 의 두 근이다.

그런데 두 교점이 원점에 대하여 대칭이므로 위의 이차방정식의 두 근의 합은 0이고, 두 근의 곱은 음이다.

따라서, 근과 계수의 관계에 의하여

$a^2 - 4a + 4 = 0$ 에서 $(a-2)^2 = 0 \quad \therefore a = 2$

$a^2 - 12 < 0$ 에서 $-2\sqrt{3} < a < 2\sqrt{3}$

$\therefore a = 2$

36. $x^3 = 1$의 세 근이 a, b, c이다. $22a^{21} + 21b^{22} + 22c^{21}$의 값이 실수 일 때, 이 실수 값을 구하면?

① 60　　② 65　　③ 68　　④ 72　　⑤ 75

해설

$x^3 = 1 \quad \Rightarrow \quad a^3 = 1 \quad b^3 = 1 \quad c^3 = 1$

$\Rightarrow \quad (x-1)(x^2 + x + 1) = 0 \quad \cdots \quad ①$

$\therefore \quad 22a^{21} + 21b^{22} + 22c^{21}$

$= 22(a^3)^7 + 21(b^3)^7 b + 22(c^3)^7$

$= 21b + 44$이 값이 실수이므로

①에서 $b = 1$이다.

$\therefore \quad 21b + 44 = 65$

37. 두 이차방정식 $3x^2-(k+1)x+4k=0$, $3x^2+(2k-1)x+k=0$이 단 하나의 공통인 근 α를 가질 때, $3k+\alpha$의 값은? (단, k는 실수인 상수)

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

공통근이 α이므로

$3\alpha^2-(k+1)\alpha+4k=0$

$3\alpha^2+(2k-1)\alpha+k=0$

두 식을 변변끼리 빼면 $3k(\alpha-1)=0$

$k=0$ 또는 $\alpha=1$

$k=0$이면 두 식이 같아지므로

조건에 맞지 않는다.

$\therefore\ \alpha=1$을 대입하면

$3-(k+1)+4k=0,\quad k=-\dfrac{2}{3}$

$\therefore\ 3k+\alpha=-1$

38. x의 다항식 $f(x)$에 대하여 $f(x^2)=x^3f(x+1)-2x^4+2x^2$이 성립할 때, $f(x)$를 구하면? (단, $f(0)=f(1)=f(2)=0$)

① $f(x)=x(x-1)(x-2)$
② $f(x)=x^2(x-1)(x-2)$
③ $f(x)=x(x-1)^2(x-2)$
④ $f(x)=x(x-1)(x-2)^2$
⑤ $f(x)=x^2(x-1)^2(x-2)$

해설

(i) $f(x)$를 n차의 식이라하면

좌변 :$2n$차=우변 :$n+3$차

$\therefore\ n=3$

(ii) $f(x)=kx(x-1)(x-2)$(단, $k\neq 0$)

($\because\ f(0)=f(1)=f(2)=0$)

좌변 $=kx^6-3kx^4+2kx^2$

우변 $=kx^6-(k+2)x^4+2x^2$

$\therefore\ kx^6-3kx^4+2kx^2=kx^6-(k+2)x^4+2x^2$

$-3k=-(k+2)$

$k=2$에서 $k=1$

$\therefore\ f(x)=x(x-1)(x-2)$

39. $P(x) = x^2 + x + 1$ 에 대하여 $P(x^6)$ 을 $P(x)$ 로 나눈 나머지를 구하면?

① $x - 4$　　② $4x - 1$　　③ 5

④ 4　　⑤ 3

해설

$P(x^6) = x^{12} + x^6 + 1$

$x^2 + x + 1 = 0$ 의 해를 w 라 하자.

$w^2 + w + 1 = 0$, 양변에 $(w - 1)$ 을 곱하면

$w^3 - 1 = 0$, $w^3 = 1$

$x^{12} + x^6 + 1 = (x^2 + x + 1)Q(x) + ax + b$ 에

w 를 대입하면,

$(w^3)^4 + (w^3)^2 + 1 = (w^2 + w + 1)Q(w) + aw + b$

$3 = aw + b$

w 는 허수, a, b 는 실수 이므로, $a = 0, b = 3$

$\therefore$ 나머지$= 3$

40. 자연수 n에 대하여 $f(n) = ni^n$을 만족할 때, $f(1) + f(2) + ... + f(100) + f(101) = x + yi$이다. 이 때, 실수 x, y에 대하여 $y - x$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(100) + f(101)$$
$$= i + 2i^2 + 3i^3 + \cdots + 100i^{100} + 101i^{101}$$
$$= i - 2 - 3i + 4 + 5i + \cdots + 100 + 101i$$
$$= (-2 + 4 - 6 + 8 + \cdots - 98 + 100)$$
$$+ (1 - 3 + 5 - 7 + \cdots + 97 - 99 + 101)i$$
$$= 2 \times 25 + \{(-2) \times 25 + 101\}i$$
$$= 50 + 51i$$
$$\therefore\ x = 50,\ y = 51,\ y - x = 51 - 50 = 1$$

41. 서로 다른 두 복소수 x, y 가 $x^2 - y = i,\ y^2 - x = i$ 를 만족할 때, $x^3 + y^3$ 의 값을 구하시오. (단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $2 - 3i$

해설

$x^2 - y = i \cdots$①, $y^2 - x = i \cdots$②에서

① - ② 하면 : $(x+y)(x-y) + (x-y) = 0$,

$(x-y)(x+y+1) = 0$

조건에서 $x \neq y$이므로 $x + y = -1$이다.

① + ②하면 $x^2 + y^2 - x - y = 2i$

식을 변형하면 $(x+y)^2 - 2xy - (x+y) = 2i$

$\therefore\ xy = 1 - i$

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) \\ &= (-1)^3 - 3(1-i)(-1) \\ &= 2 - 3i \end{aligned}$$

42. $x^2 + xy - 2y^2 + 2x + 7y + k = f(x, y)$라 할 때, $f(x, y) = 0$이 두 개의 직선을 나타내도록 k의 값을 정하면?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

$f(x,\ y) = x^2 + (y+2)x - 2y^2 + 7y + k = 0$

주어진 식이 두 개의 직선을 나타내려면

$x,\ y$에 관한 일차식으로 인수분해되어야 하므로

근의 공식에서 근호 안의 식 $(= D)$이 완전제곱꼴이어야 한다.

$D = (y+2)^2 - 4(-2y^2 + 7y + k)$

$\quad = 9y^2 - 24y + 4 - 4k \quad \cdots (\text{i})$

(i)이 완전제곱식이어야 하므로

(i)의 판별식

$\dfrac{D}{4} = (-12)^2 - 9(4 - 4k) = 0$

$108 + 36k = 0 \qquad \therefore\ k = -3$

43. 이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $(1-\alpha)(1-\beta)+(2-\alpha)(2-\beta)+\cdots+(5-\alpha)(5-\beta)$의 값을 구하면?

① 50 ② 40 ③ 10 ④ 30 ⑤ 20

해설

$x^2-2x-1=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-1$

$\therefore (1-\alpha)(1-\beta)+(2-\alpha)(2-\beta)+\cdots+(5-\alpha)(5-\beta)$

$=(1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta\}+\{4-2(\alpha+\beta)+\alpha\beta\}+\cdots+\{25-5(\alpha+\beta)+\alpha\beta\}$

$=(1+4+9+16+25)-(1+2+3+4+5)(\alpha+\beta)+5\alpha\beta$

$=55-15\times2-5=55-30-5=20$

44. 서로 다른 두 실수 a, b에 대하여 두 방정식 $x^2 + 2ax + b = 0$과 $x^2 + 2bx + a = 0$의 두 근의 차가 서로 같을 때, a, b의 관계식은?

① $a + b = 0$　② $a - b - 1 = 0$　③ $a - b + 1 = 0$

④ $a + b - 1 = 0$　⑤ $a + b + 1 = 0$

해설

$x^2 + 2ax + b = 0$의 해를 α, β

$x^2 + 2bx + a = 0$의 해를 γ, δ라 하면

$|\alpha - \beta| = |\gamma - \delta|$에서

$(\alpha - \beta)^2 = (\gamma - \delta)^2$,

$(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (\gamma + \delta)^2 - 4\gamma\delta$

$(-2a)^2 - 4b = (-2b)^2 - 4a$

$\therefore\ (a - b)(a + b + 1) = 0$

$a \neq b$이므로 $a + b + 1 = 0$

45. 세 실수 x, y, z 에 대하여 $(x-1):(y-3):(z+2)=2:1:3$ 일 때, $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{1}{2}$

해설

$(x-1):(y-3):(z+2)=2:1:3$ 이므로

$x-1=2k$ 에서 $x=2k+1$

$y-3=k$ 에서 $y=k+3$

$z+2=3k$ 에서 $z=3k-2$

$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$ 에 대입하면

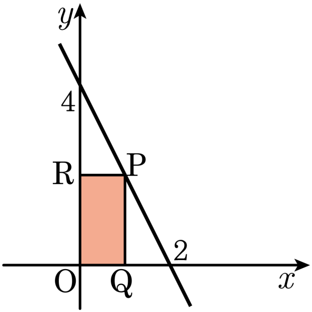
$(k-2)^2+(-2k+5)^2+(k-3)^2$

$=6k^2-30k+38$

$=6\left(k-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}$

따라서 $k=\dfrac{5}{2}$ 일 때, 최솟값이 $\dfrac{1}{2}$ 이다.

46. 직선 $y=-2x+4$ 위의 제1 사분면에 있는 한 점 P 에서 x 축, y 축에 수선을 그어 그때의 수선의 발을 각각 Q, R 이라 할 때, 사각형 OQPR 의 넓이의 최댓값은?



① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 7

해설

$$\begin{aligned} y &= x(-2x+4)(0<x<2) \\ &= -2x^2+4x \\ &= -2(x^2-2x+1-1) \\ &= -2(x-1)^2+2 \end{aligned}$$

$x=1$ 일 때 최댓값 2

47. 지면으로부터 20 m 높이의 옥상에서 초속 20 m 로 쏘아 올린 물체의 t 초 후의 높이를 h m 라 할 때, 관계식 $h = 20t - t^2 + 20$ 이 성립한다. 높이가 가장 높을 때는 던진 후 몇 초 후인가?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$$
\begin{aligned}
h &= 20t - t^2 + 20 \\
&= -(t^2 - 20t) + 20 \\
&= -(t - 10)^2 + 120
\end{aligned}
$$

따라서 $t = 10$ 일 때 최댓값 120 를 가진다.

48. 사차방정식 $x^4-2x^2+ax+b=0$이 허근 $1+2i$를 가질 때, 실근 α,β와 a,b의 합 $\alpha+\beta+a+b$의 값은? (단, a,b는 실수이고 $i=\sqrt{-1}$)

① -3　② -1　③ 2　④ 5　⑤ 7

해설

계수가 실수이므로 $1+2i$가 근이면 $1-2i$도 근이다.
따라서 $f(x)=x^4-2x^2+ax+b$는 $\{x-(1+2i)\}\{x-(1-2i)\}$
즉, x^2-2x+5로 나누어 떨어져야 한다.
$f(x)=x^4-2x^2+ax+b=(x^2-2x+5)(x^2+2x-3)+(a-16)x+b+15$
따라서, $a=16,\ b=-15$
$x^2+2x-3=0$에서 $\alpha+\beta=-2$
$\therefore\ \alpha+\beta+a+b=-1$

49. x, y, z에 대한 다음 연립방정식의 근의 곱이 음의 정수이고, 합이 양의 정수일 때, $x+y+z$의 최댓값을 구하면?

$$\begin{cases} 2x-y+z=a & \cdots\cdots \text{㉠} \\ x+2y+2z=3a-11 & \cdots\cdots \text{㉡} \\ 3x-y+2z=2a-2 & \cdots\cdots \text{㉢} \end{cases}$$

① 2　　② -2　　③ 3　　④ $\frac{3}{2}$　　⑤ -3

해설

㉠ $\times 2-$ ㉡에서 $3x-4y=-a+11$

㉡ $-$ ㉢에서 $-2x+3y=a-9$

$\therefore\ x=a-3,\ y=a-5,$

㉠에서 $z=1$

$xyz=(a-3)(a-5)\cdot 1<0$

$\therefore\ 3<a<5 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ㉣

$x+y+z=(a-3)+(a-5)+1=2a-7>0$

$\therefore\ a>\frac{7}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ㉤

㉣, ㉤에서 $\frac{7}{2}<a<5 \cdots\cdots$ ㉥

그런데 $x+y+z$는 정수이므로 $2a-7$은 정수이고 $2a$도 정수이다.

㉥에서 $7<2a<10$

$\therefore\ 2a=8$ 또는 $9(\because\ 2a$는 정수$)$

$\therefore\ a=4$ 또는 $\frac{9}{2}$

$\therefore\ x=1,\ y=-1,\ z=1$또는 $x=\frac{3}{2},\ y=-\frac{1}{2},\ z=1$

$\therefore\ x+y+z=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+1=2$

50. 이차방정식 $x^2+(k+1)x+2k+1=0$ 의 두 근이 모두 정수일 때, 양수 k의 값을 구하면?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

두 근을 $\alpha,\ \beta\ (\alpha \geq \beta)$ 라 하면 근과 계수와의 관계에서

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-(k+1) & \cdots\cdots ① \\ \alpha\beta=2k+1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①$\times 2+$②을 하면 $\alpha\beta+2(\alpha+\beta)=-1$

$\alpha\beta+2\alpha+2\beta+4=3,\quad (\alpha+2)(\beta+2)=3$

$\alpha,\ \beta$ 가 정수이므로 $(\alpha+2,\ \beta+2)=(3,\ 1),\ (-1,\ -3)$

$\therefore\ (\alpha,\ \beta)=(1,\ -1),\ (-3,\ -5)$

①에서

$k=-(\alpha+\beta+1)$ 이므로 $k=-1,\ 7$

$k>0$ 이므로 $k=7$