

1. 이차함수  $y = ax^2 + bx - 3$  이  $x = 2$  에서 최댓값 5 를 가질 때, 상수  $a, b$  의 합  $a + b$  의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

이차함수  $y = ax^2 + bx - 3$  이  
 $x = 2$  에서 최댓값 5 를 가지므로  
 $y = a(x-2)^2 + 5 = ax^2 - 4ax + 4a + 5$   
위의 식이  $y = ax^2 + bx - 3$  과 일치하므로  
 $-4a = b, 4a + 5 = -3$   
 $\therefore a = -2, b = 8$   
 $\therefore a + b = 6$

2. 이차함수  $y = -x^2 + 4x - 3$  의 최댓값을  $m$ , 이차함수  $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 3$  의 최솟값을  $n$  이라고 할 때,  $mn$  의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$y = -x^2 + 4x - 3 = -(x - 2)^2 + 1$$

최댓값  $m = 1$

$$y = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 3 = \frac{1}{3}(x + 3)^2$$

최솟값  $n = 0$

$$\therefore mn = 1 \times 0 = 0$$

3.  $-2 \leq x \leq 3$ 에서  $y = x^2 - 2x - 2$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

- ① 3      ② 7      ③ -2      ④ 0      ⑤ 1

해설

$y = (x - 1)^2 - 3$ 이고 꼭짓점의  $x$ 좌표가 주어진  $x$ 의 범위에 포함되므로

$x = 1$ 에서 최솟값을  $x = -2$ 에서 최댓값을 갖는다.

$$(\text{최댓값}) = (-2)^2 - 2(-2) - 2 = 6$$

$$(\text{최솟값}) = -3$$

4. 다음 함수의 최댓값 및 최솟값을 구하여라.

$$y = x^2 - 2x - 3 \quad (0 \leq x \leq 4)$$

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 최댓값 5

▷ 정답: 최솟값 -4

**해설**

먼저, 주어진 식을  $y = a(x - m)^2 + n$ 의 꼴로 변형하여 그래프를 그린 다음 주어진 구간 안에서 가장 높은 점과 가장 낮은 점을 조사한다.

$$y = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4$$

꼭짓점:  $x = 1$  일 때  $y = -4$

$$\text{양끝점: } \begin{cases} x = 0 \text{ 일 때 } y = -3 \\ x = 4 \text{ 일 때 } y = 5 \end{cases}$$

$x = 4$ 에서 최댓값 5,  $x = 1$ 에서 최솟값 -4

5. 다음 함수의 최댓값 및 최솟값을 구하여라.

$$y = -x^2 + 4x \quad (1 \leq x \leq 5)$$

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 최댓값 4

▷ 정답: 최솟값 -5

해설

$$y = -x^2 + 4x = -(x - 2)^2 + 4$$

꼭짓점:  $x = 2$  일 때  $y = 4$

$$\text{양끝점: } \begin{cases} x = 1 \text{ 일 때 } y = 3 \\ x = 5 \text{ 일 때 } y = -5 \end{cases}$$

$x = 2$ 에서 최댓값 4

$x = 5$ 에서 최솟값 -5

6. 이차함수  $y = -x^2 - 2x + 7$  ( $-3 \leq x \leq 1$ )의 최댓값을  $a$ , 최솟값을  $b$ 라 할 때,  $a + b$ 의 값을 구하면?

- ① 4      ② 7      ③ 8      ④ 11      ⑤ 12

해설

$y = -x^2 - 2x + 7 = -(x + 1)^2 + 8$ 이므로  
꼭짓점의 좌표는  $(-1, 8)$ 이고, 위로 볼록한 포물선이다.  
주어진 구간의 양 끝값을 구하면,  
 $x = -3$ 일 때  $y = -(-3 + 1)^2 + 8 = 4$   
 $x = 1$ 일 때  $y = -(1 + 1)^2 + 8 = 4$ 이다.  
따라서 최댓값  $a = 8$ 이고, 최솟값  $b = 4$ 이므로  $a + b = 12$

7. 이차함수  $y = -2 + 3x - x^2$  ( $-1 \leq x \leq 2$ )의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

- ①  $-\frac{23}{4}$     ②  $-\frac{16}{3}$     ③  $-\frac{3}{4}$     ④  $\frac{7}{4}$     ⑤  $\frac{11}{3}$

해설

$$y = -(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{1}{4} \text{ 이므로}$$

$x = \frac{3}{2}$ 가  $x$ 의 값의 범위  $-1 \leq x \leq 2$ 에 포함되므로

$x = \frac{3}{2}$ 에서 최솟값  $\frac{1}{4}$ 를 갖고,

$x = -1$ 에서 최댓값  $-6$ 을 갖는다.

따라서 최솟값과 최댓값의 합은  $-\frac{23}{4}$ 이다.

8. 이차함수  $f(x) = ax^2 + bx + c$  가  $x = -1$  에서 최댓값 7 을 갖고,  $f(2) = -2$  를 만족할 때, 상수  $a + b + c$  의 값을 구하면?

① 3      ② 7      ③ 11      ④ -3      ⑤ -5

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x+1)^2 + 7, f(2) = -2 \\ \Rightarrow 3^2 \times a + 7 &= -2, a = -1 \\ \therefore f(x) &= -(x+1)^2 + 7 = -x^2 - 2x + 6 \\ \text{따라서 } a + b + c &= 3 \end{aligned}$$

9. 이차함수  $y = x^2 - 2ax + b$  가  $x = 1$  에서 최솟값 4를 가질 때,  $a + b$  의 값은?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$$y = x^2 - 2ax + b = (x - a)^2 + b - a^2$$

$x = 1$  일 때, 최솟값이 4 이므로

$$y = (x - 1)^2 + 4 \text{ 이다.}$$

따라서  $a = 1, b - 1 = 4, b = 5$  이다.

$$\therefore a + b = 6$$

10.  $0 \leq x \leq 3$  에서 이차함수  $y = -4x^2 + 4x + a$  의 최댓값과 최솟값의 합이 10 일 때, 상수  $a$  의 값을 구하면?

- ①  $\frac{11}{2}$     ② 11    ③  $\frac{33}{2}$     ④ 22    ⑤  $\frac{55}{2}$

해설

$$y = -4x^2 + 4x + a = -4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + a + 1$$

$0 \leq x \leq 3$  이므로  $x = \frac{1}{2}$  일 때,

최댓값을 갖고 최댓값은  $a + 1$  이다.

$x = 3$  일 때, 최솟값을 갖고

최솟값은  $a - 24$  이다.

최댓값과 최솟값의 합이 10 이므로

$$(a + 1) + (a - 24) = 10$$

$$\therefore a = \frac{33}{2}$$

11.  $-1 \leq x \leq 1$  에서 이차함수  $f(x) = x^2 - 4x - 2a$  의 최솟값이 1 일 때, 상수  $a$  의 값은?

① -2      ② -1      ③ 0      ④ 1      ⑤ 2

해설

$$f(x) = x^2 - 4x - 2a = (x-2)^2 - 2a - 4$$

이 때, 꼭짓점의  $x$  좌표 2 가  $-1 \leq x \leq 1$  에 속하지 않으므로

$f(-1), f(1)$  중 작은 값이 최솟값이다.

따라서, 최솟값은  $f(1) = -3 - 2a = 1$

$\therefore a = -2$

12.  $x$ 의 범위가  $-2 \leq x \leq 3$ 일 때, 함수  $f(x) = x^2 + 2x + C$ 의 최소값이 4가 되도록 상수  $C$ 의 값을 정할 때, 함수  $f(x)$ 의 최대값은?

- ① 8      ② 12      ③ 16      ④ 20      ⑤ 24

해설

$$f(x) = (x+1)^2 + C - 1$$

주어진 범위에서  $x = -1$ 일 때

최소값을 가지므로

$$f(-1) = C - 1 = 4 \Rightarrow C = 5$$

$$\Rightarrow f(x) = (x+1)^2 + 4$$

주어진 범위에서  $x = 3$ 일 때 최대값을 가진다.

$$\Rightarrow f(3) = 4^2 + 4 = 20$$

13.  $x^2 - 5x + 6 < 0$  일 때,  $P = x^2 + 5x + 6$  이 취할 수 없는 값은?

- ① 22      ② 24      ③ 26      ④ 28      ⑤ 30

해설

$$x^2 - 5x + 6 < 0, (x-2)(x-3) < 0 \quad \therefore 2 < x < 3$$

$$\text{이 때, } P = x^2 + 5x + 6 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \text{ 이므로}$$

$2 < x < 3$  인 구간에서의  $P$  는 증가함수이다.

따라서  $P_{x=2} < P < P_{x=3}$  이 성립한다.

$$P_{x=2} = 20, P_{x=3} = 30 \text{ 이므로 } 20 < P < 30$$

14. 이차함수  $y = x^2 + 2ax + 2a$  의 최솟값을  $m$  이라고 할 때,  $m$  의 최댓값을 구하여라. (단,  $a$  는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$y = x^2 + 2ax + 2a = (x + a)^2 - a^2 + 2a$$

$$\therefore m = -a^2 + 2a = -(a - 1)^2 + 1$$

따라서  $m$  의 최댓값은 1 이다.

15. 이차함수  $y = 2x^2 - 2ax - 2a - 4$ 의 최솟값을  $m$  이라고 할 때,  $m$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

$$\begin{aligned}y &= 2x^2 - 2ax - 2a - 4 \\ &= 2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{2} - 2a - 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y \text{의 최솟값} : m &= -\frac{a^2}{2} - 2a - 4 \\ &= -\frac{1}{2}(a+2)^2 - 2\end{aligned}$$

$m$ 의 최댓값: -2

16.  $-1 \leq x \leq 1$  에서 함수  $y = (x^2 - 2x + 2)^2 - 4(x^2 - 2x + 2) + 1$  의 최댓값을  $M$ , 최솟값을  $m$  이라 할 때,  $M \times m$  의 값은?

- ① 18      ② 9      ③ 7      ④ -9      ⑤ -18

해설

$(x^2 - 2x + 2) = t$  로 치환하면,  
 $t^2 - 4t + 1 = (t - 2)^2 - 3$ .  
 $t$  의 범위는  $x$  에 의해  $1 \leq t \leq 5$  가 된다.  
 $\begin{cases} t = 2 \text{일때, } y = -3 \\ t = 5 \text{일때, } y = 6 \end{cases}$   
 $\therefore M \times m = -18$

17. 차가 14 인 두 수의 곱의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -49

해설

두 수를  $x$ ,  $x + 14$  라 하고, 두 수의 곱을  $y$  라고 하면  $y = x(x + 14) = x^2 + 14x = (x + 7)^2 - 49$   
따라서  $x = -7$  일 때, 최솟값  $-49$  를 갖는다.

18.  $x, y$ 가 실수일 때,  $x^2 - 6x + 2y^2 + 4y + 7$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답:  $-4$

해설

$$\begin{aligned} & x^2 - 6x + 2y^2 + 4y + 7 \\ &= (x-3)^2 + 2(y+1)^2 - 4 \text{ 이므로} \\ & x=3, y=-1 \text{ 일 때, 최솟값 } -4 \text{ 를 갖는다.} \end{aligned}$$

19.  $x, y, z$ 가 실수일 때,  $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 8z + 25$ 의 최솟값은?

- ① -5      ② -3      ③ -1      ④ 1      ⑤ 3

해설

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 8z + 25 \\ &= (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 - 1 \end{aligned}$$

이 때,  $x, y, z$ 가 실수이므로  
 $(x+1)^2 \geq 0, (y-3)^2 \geq 0, (z-4)^2 \geq 0$   
 $\therefore x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 8z + 25 \geq -1$   
따라서  $x = -1, y = 3, z = 4$ 일 때,  
주어진 식의 최솟값은  $-1$ 이다.

20. 이차함수  $y = x^2 - 4kx + 2k^2 + k - 1$  의 최솟값을  $m$  이라 할 때,  $m$  의 최댓값은?

- ㉠  $-\frac{7}{8}$       ㉡  $-1$       ㉢  $\frac{1}{8}$       ㉣  $1$       ㉤  $-\frac{9}{8}$

해설

$$y = x^2 - 4kx + 2k^2 + k - 1 = (x - 2k)^2 - 2k^2 + k - 1$$

$$m = -2k^2 + k - 1 = -2\left(k - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{7}{8} \text{ 이므로 } m \text{ 의 최댓값은 } -\frac{7}{8} \text{ 이다.}$$

21.  $x, y$  가 실수일 때,  $2x^2 - 4x + y^2 + 6y + 16$  의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$$2x^2 - 4x + y^2 + 6y + 16 = 2(x-1)^2 + (y+3)^2 + 5$$

이 때,  $x, y$  가 실수이므로

$$(x-1)^2 \geq 0, (y+3)^2 \geq 0$$

$$\therefore 2x^2 - 4x + y^2 + 6y + 16 \geq 5$$

따라서 구하는 최솟값은 5이다.

22.  $x, y, z$ 가 실수일 때, 다음 식의 최댓값을 구하여라.

$$4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$$

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$$\begin{aligned} &4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5 \\ &= -(x^2 - 4x) - y^2 - z^2 + 5 \\ &= -(x-2)^2 - y^2 - z^2 + 9 \end{aligned}$$

$x, y, z$ 는 실수이므로  
 $(x-2)^2 \geq 0, y^2 \geq 0, z^2 \geq 0$   
따라서  $4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$ 는  
 $x-2=0, y=0, z=0$ 일 때,  
최댓값 9를 갖는다.

23.  $x, y$ 가 실수일 때, 다음 식의 최댓값을 구하여라.

$$2x - x^2 + 4y - y^2 + 3$$

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

$$\begin{aligned} & 2x - x^2 + 4y - y^2 + 3 \\ &= -(x^2 - 2x) - (y^2 - 4y) + 3 \\ &= -(x-1)^2 - (y-2)^2 + 8 \end{aligned}$$

$x, y$ 는 실수이므로  $(x-1)^2 \geq 0, (y-2)^2 \geq 0$   
따라서  $2x - x^2 + 4y - y^2 + 3$ 은  
 $x-1=0, y-2=0$ 일 때 최댓값 8을 갖는다.

24. 함수  $f(x) = (x^2 - 4x + 2)^2 - 4(x^2 - 4x + 2)$  일 때,  $0 \leq x \leq 3$ 에서 함수  $f(x)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

$$f(x) = (x^2 - 4x + 2)^2 - 4(x^2 - 4x + 2)$$

$$t = x^2 - 4x + 2 = (x - 2)^2 - 2 \text{라 하면}$$

$$0 \leq x \leq 3 \text{에서 } -2 \leq t \leq 2$$

$$f(t) = t^2 - 4t = (t - 2)^2 - 4$$

$$\therefore -2 \leq t \leq 2 \text{에서 } -4 \leq f(t) \leq 12$$

따라서  $0 \leq x \leq 3$ 에서  $f(x)$ 의 최솟값은 -4이다.

25. 함수  $y = -(x^2 + 4x + 5)^2 - 2(x^2 + 4x) - 6$  이  $x = m$  에서 최댓값  $M$  을 갖는다. 이 때,  $M + m$  의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$y = -(x^2 + 4x + 5)^2 - 2(x^2 + 4x) - 6$  에서  
 $x^2 + 4x + 5 = t$  로 놓으면  
 $y = -(x^2 + 4x + 5)^2 - 2(x^2 + 4x) + 4$   
 $= -t^2 - 2t + 4 = -(t + 1)^2 + 5$   
그런데  $t = x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1 \geq 1$  이므로  
 $t = 1$ , 즉  $x = -2$  일 때 최댓값 1 을 갖는다.  
따라서,  $m = -2$ ,  $M = 1$   
 $\therefore M + m = -1$

26. 함수  $f(x) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2x + 3) + 3x^2 - 6x$  의 최솟값은?

- ① -2      ② -1      ③ 0      ④ 1      ⑤ 2

해설

$x^2 - 2x + 2 = t$  로 놓으면

$t = (x-1)^2 + 1 \geq 1$  이고

$f(x) = g(t) = t(t+1) + 3t - 6$

$= t^2 + 4t - 6$

$= (t+2)^2 - 10 \quad (t \geq 1)$

따라서 구하는 최솟값은

$g(1) = (1+2)^2 - 10 = -1$

27.  $-1 \leq x \leq 1$  에서 함수  $y = (x^2 + 2x)^2 - 4(x^2 + 2x) + 2$  의 최댓값과 최솟값의 합은?

- ① 1      ② 3      ③ 5      ④ 7      ⑤ 9

해설

$x^2 + 2x = t$  로 놓으면,  $t = (x+1)^2 - 1$  이므로  
 $-1 \leq x \leq 1$  에서  $-1 \leq t \leq 3$   
이 때, 주어진 함수는  $y = t^2 - 4t + 2 = (t-2)^2 - 2$   
즉,  $t = 2$  일 때,  $y$  의 최솟값은  $-2$  이고,  
 $t = -1$  일 때,  $y$  의 최댓값은  $7$  이다.  
따라서 최댓값과 최솟값의 합은  $5$  이다.