

1. 다음 중 다항식  $a^3 - a^2b + ab^2 + ac^2 - b^3 - bc^2$  의 인수인 것은?

①  $a + c$

②  $a - b^2$

③  $a^2 - b^2 + c^2$

④  $a^2 + b^2 + c^2$

⑤  $a^2 + b^2 - c^2$

해설

$$\begin{aligned} & a^3 - a^2b + ab^2 + ac^2 - b^3 - bc^2 \\ &= a^3 - b^3 + (a - b)c^2 - ab(a - b) \\ &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) + (a - b)c^2 - ab(a - b) \\ &= (a - b)(a^2 + ab + b^2 + c^2 - ab) \\ &= (a - b)(a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

2.  $x$ 에 대한 다항식  $x^3 - 2x^2 - x + 2$ 가  $(x+a)(x+b)(x+c)$ 로 인수분해될 때,  $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값은? (단,  $a, b, c$ 는 상수)

- ① 5      ② 6      ③ 7      ④ 8      ⑤ 9

해설

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x+1)(x-1)(x-2)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = (-1)^2 + 1^2 + 2^2 = 6$$

3. 이차함수  $y = ax^2 + bx - 3$  은  $x = 2$  일 때 최댓값 5를 가진다. 이때,  $a + b$ 의 값은? (단,  $a, b$ 는 상수)

- ① 2      ② 4      ③ 6      ④ 8      ⑤ 10

해설

$$y = ax^2 + bx - 3 = a(x-2)^2 + 5$$

$$= ax^2 - 4ax + 4a + 5 \text{ 이므로}$$

$$b = -4a, \quad -3 = 4a + 5$$

두 식을 연립하여 풀면  $a = -2, b = 8$

$$\therefore a + b = 6$$

4. 이차함수  $f(x) = ax^2 + bx + c$ 가  $f(1) = f(3) = 8$ 이고 최솟값 5를 가질 때, 상수  $a, b, c$ 에 대하여  $a + b + c$ 의 값을 구하면?

① 6      ② 7      ③ 8      ④ 9      ⑤ 10

해설

꼭짓점의 좌표가  $(2, 5)$ 이므로  
이차함수는  $f(x) = a(x-2)^2 + 5$  라고 할 수 있다.  
 $f(3) = 8$ 이므로  $x = 3, y = 8$ 을 대입하면  
 $a + 5 = 8 \quad \therefore a = 3$  이므로  
 $f(x) = 3(x-2)^2 + 5 = 3x^2 - 12x + 17$   
 $\therefore a + b + c = 8$

5. 세 다항식  $A = x^2 + 3x - 2$ ,  $B = 3x^2 - 2x + 1$ ,  $C = 4x^2 + 2x - 3$  에 대하여

$3A - \{5A - (3B - 4C)\} + 2B$  를 간단히 하면?

- ①  $3x^2 + 12x - 13$                       ②  $-3x^2 + 24x + 21$   
③  $3x^2 - 12x + 21$                       ④  $-3x^2 - 24x + 21$   
⑤  $x^2 + 12x + 11$

해설

$$\begin{aligned} & 3A - \{5A - (3B - 4C)\} + 2B \\ &= -2A + 5B - 4C \\ &= -2(x^2 + 3x - 2) + 5(3x^2 - 2x + 1) - 4(4x^2 + 2x - 3) \\ &= -3x^2 - 24x + 21 \end{aligned}$$

6.  $x$ 의 모든 값에 대하여 다음 등식이 성립할 때, 상수  $a, b, c$ 의 값의 합을 구하여라.

$$x^3 + 1 = (x-1)(x-2)(x-3) + a(x-1)(x-2) + b(x-1) + c$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$x$ 에 대한 항등식이므로

$$x = 1 \text{ 일 때, } 2 = c \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$x = 2 \text{ 일 때, } 9 = b + c \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$x = 3 \text{ 일 때, } 28 = 2a + 2b + c \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$ 을 연립하여 풀면  $a = 6, b = 7, c = 2$

$$\therefore a + b + c = 15$$

7. 다항식  $x^3 + ax^2 + bx + c$  를  $x+2$ 로 나누면 3이 남고,  $x^2-1$ 로 나누면 떨어진다. 이 때,  $abc$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x+2)Q_1(x) + 3$$

$$= (x+1)(x-1)Q_2(x)$$

$$f(-2) = 3 \quad f(1) = 0 \quad f(-1) = 0$$

$$x = -2 \text{ 대입, } -8 + 4a - 2b + c = 3$$

$$x = -1 \text{ 대입, } -1 + a - b + c = 0$$

$$x = 1 \text{ 대입, } 1 + a + b + c = 0$$

세 식을 연립해서 구하면

$$a = 3, b = -1, c = -3$$

$$\therefore abc = 9$$

8. 100개의 다항식  $x^2-x-1, x^2-x-2, \dots, x^2-x-100$  중에서 계수가 정수인 일차식의 곱으로 인수분해되는 것은 모두 몇 개인가?

- ① 5개    ② 7개    ③ 9개    ④ 11개    ⑤ 13개

해설

$x^2-x-n = (x+a)(x-b)$  ( $a, b$ 는 자연수)라 하면  
 $b = a+1, ab = n$  ( $1 \leq n \leq 100$ )

|        |   |   |    |    |    |    |    |    |    |
|--------|---|---|----|----|----|----|----|----|----|
| $a$    | 1 | 2 | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
| $b$    | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
| $n=ab$ | 2 | 6 | 12 | 20 | 30 | 42 | 56 | 72 | 90 |

$\therefore$  9(개)

9.  $x^6 + 1$ 을 계수가 실수인 범위 내에서 인수분해 할 때, 다음 중 인수인 것은?

- ①  $x^2 + x + 1$       ②  $x^2 - x + 1$       ③  $x^2 + \sqrt{3}x + 1$   
④  $x^2 + \sqrt{3}x - 1$       ⑤  $x^2 - 1$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (x^2)^3 + 1 \\ &= (x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) \\ &= (x^2 + 1)((x^2 + 1)^2 - 3x^2) \\ &= (x^2 + 1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1)\end{aligned}$$

10. 다음 식을 간단히 하면?

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} \quad (\text{단, } a \neq b \neq c)$$

- ① -1      ② 1      ③  $-\frac{1}{2}$       ④  $\frac{1}{2}$       ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} (\text{준 식}) &= \frac{a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ &= \frac{(c-b)a^2 - (c^2 - b^2)a + bc(c-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ &= \frac{(c-b)(a-b)(a-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 1 \end{aligned}$$

11. 서로 다른 세 실수  $x, y, z$ 에 대하여  $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ 를 만족할 때,  $x + y + z$ 의 값은?

- ㉠ 0      ㉡ 1      ㉢ 2      ㉣ 3      ㉤ 4

해설

$$\begin{aligned} & x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \\ &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0 \\ & (x + y + z) = 0 \text{ 또는 } x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0 \\ & \therefore x + y + z = 0 \text{ 또는 } \frac{1}{2}((x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2) = 0 \\ & \text{그런데 } x, y, z \text{가 서로 다른 세 실수 } (x \neq y \neq z) \text{이므로} \\ & x + y + z = 0 \end{aligned}$$



13.  $x = 1001$  일 때,  $\frac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1}$  의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1000

해설

$$\begin{aligned}\frac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1} &= \frac{(x^4 + 1)(x^2 - 1)}{(x^4 + 1)(x + 1)} \\ &= x - 1 \\ &= 1001 - 1 \\ &= 1000\end{aligned}$$

14. 실수  $x, y$ 가  $xy = 6$ ,  $x^2y + xy^2 + x + y = 63$ 을 만족시킬 때,  $x^2 + y^2$ 의 값은?

- ① 13      ②  $\frac{1173}{32}$       ③ 55      ④ 69      ⑤ 81

해설

$$\begin{aligned}x^2y + xy^2 + x + y &= xy(x + y) + (x + y) \\ &= (xy + 1)(x + y) \\ &= 7(x + y) = 63, \\ x + y &= 9, xy = 6 \\ \therefore x^2 + y^2 &= (x + y)^2 - 2xy \\ &= 81 - 12 = 69\end{aligned}$$

15. 다음 두 다항식이 서로 소가 아닐 때, 상수  $a$ 의 모든 값의 합은?

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6, \quad x^2 - 3x + a$$

- ① -10    ② -8    ③ -5    ④ 0    ⑤ 3

해설

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ 을 조립제법으로 인수분해하면

$$(x-1)(x+2)(x-3)$$

각각의 경우에 대해 나머지 정리를 이용한다

i)  $x=1 \Rightarrow 1-3+a=0, a=2$

ii)  $x=2 \Rightarrow 4+6+a=0, a=-10$

iii)  $x=3 \Rightarrow 9-9+a=0, a=0$

$\therefore a$ 의합 :  $2 + (-10) + 0 = -8$

16. 사차식  $x^4 - 4x^2 - 12$  를 복소수의 범위에서 인수분해하면?

①  $(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i)$

②  $(x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6})(x + 2i)(x - 2i)$

③  $(x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i)$

④  $(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x + 2i)(x - 2i)$

⑤  $(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{6}i)(x - \sqrt{6}i)$

해설

$$\begin{aligned} & x^4 - 4x^2 - 12, \quad x^2 = Y \text{ 라 하자} \\ \Rightarrow & Y^2 - 4Y - 12 = (Y + 2)(Y - 6) = 0 \\ & Y = -2 \text{ 또는 } Y = 6 \\ \Rightarrow & x^2 = -2, \quad x^2 = 6 \\ \Rightarrow & x = \pm\sqrt{2}i, \quad x = \pm\sqrt{6} \\ \therefore & x^4 - 4x^2 - 12 \\ = & (x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i) \end{aligned}$$

17.  $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-k$ 가 이차식의 완전제곱식으로 인수분해될 때, 상수  $k$ 의 값을 정하면?

㉠ -1      ㉡ 1      ㉢ 0      ㉣ 2      ㉤ -2

해설

$$\begin{aligned} & (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-k \\ &= (x+1)(x+4)(x+2)(x+3)-k \\ &= (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-k \\ & x^2+5x=X \text{로 치환하면} \\ & (\text{준식}) = (X+4)(X+6)-k \\ & \quad = X^2+10X+24-k \\ & \text{완전제곱식이 되려면 } 24-k=25 \\ & \therefore k=-1 \end{aligned}$$

18.  $f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{100}$  일 때,  $f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$  의 값은?

- ① 1      ②  $1-i$       ③  $1+i$       ④  $-1$       ⑤ 0

해설

$$\frac{1+i}{1-i} = i \text{ 이므로}$$

$$f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) = f(i) = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{100} = i^{100} = 1$$

19.  $i + i^3 + i^5 + i^7 + \dots + i^{101} = a + bi$  일 때,  $a + b$  의 값은? (단,  $a, b$  는 실수)

- ① 0      ② 1      ③ 2      ④ 3      ⑤ 4

해설

(좌변)  $= i - i + i - i + \dots + i = i$  이므로  
 $i = a + bi$  에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여  $a = 0, b = 1$   
 $\therefore a + b = 1$

20.  $f(x) = x^{2008} + x^{2010}$  일 때,  $f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$  의 값을 구하면?

- ①  $1+i$     ②  $1-i$     ③  $0$     ④  $2$     ⑤  $-2$

해설

$$\begin{aligned}\frac{1-i}{1+i} &= \frac{2}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i \\ f\left(\frac{1-i}{1+i}\right) &= f(-i) = (-i)^{2008} + (-i)^{2010} \\ &= ((-i)^4)^{502} + ((-i)^4)^{502} \cdot (-i)^2 \\ &= 1 + (-1) \\ &= 0\end{aligned}$$

21. 이차방정식  $x^2 - x + 1 = 0$ 의 두 근을  $\alpha, \beta$ 라 할 때,  $1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}$ 을 간단히 하면?

- ①  $\frac{1}{\beta}$       ②  $\frac{2}{\beta}$       ③  $\beta$       ④  $2\beta$       ⑤  $\beta^2$

해설

$$\begin{aligned}\beta^2 - \beta + 1 &= 0 \\ \alpha\beta = 1 \text{에서 } \beta &= \frac{1}{\alpha}, \\ \beta^2 &= \frac{1}{\alpha^2} \\ 1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} &= 1 + \beta + \beta^2 = 2\beta \\ (\because \beta^2 + 1 &= \beta)\end{aligned}$$

해설

(별해1)

$$1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha^2} = \frac{2}{\alpha} \quad (\because \alpha^2 - \alpha + 1 = 0)$$
$$\alpha\beta = 1 \text{에서 } \beta = \frac{1}{\alpha}$$
$$\therefore \frac{2}{\alpha} = 2\beta$$

(별해2)

$$x^2 - x + 1 = 0 \text{의 근은 } \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$
$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, \beta = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} \text{라 하면}$$
$$\frac{2}{\alpha} = \frac{2}{\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}} = 1 - \sqrt{3}i = 2\beta$$

22. 이차방정식  $x^2 - 2x + 5 = 0$ 의 두 근을  $\alpha, \beta$ 라고 할 때,  $\frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\beta}{\alpha^2}$ 의 값을 구하면?

- ① 2      ②  $\frac{2}{5}$       ③  $-\frac{22}{25}$       ④  $\frac{22}{5}$       ⑤ -2

해설

근과 계수와의 관계에 의해

$$\alpha + \beta = 2, \quad \alpha\beta = 5$$

$$\frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\beta}{\alpha^2} = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^2\beta^2} = \frac{(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)}{(\alpha\beta)^2}$$

$$= \frac{8 - 15 \times 2}{25} = -\frac{22}{25}$$

23.  $a > 0, b > 0$ 일 때,  $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ 이고,  $a < 0, b < 0$ 일 때,  $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 이다. 이러한 성질을 이용하여 이차방정식  $x^2 + 3x + 1 = 0$ 의 두 근을  $\alpha, \beta$ 라 할 때,  $(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

$$\alpha + \beta = -3, \alpha\beta = 1$$

$$\therefore \alpha < 0, \beta < 0$$

$$\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = -\sqrt{\alpha\beta}$$

$$(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = (\alpha + \beta) + 2\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$$

$$= (\alpha + \beta) - 2 \cdot \sqrt{\alpha\beta} = -3 - 2 \cdot 1 = -5$$

24. 이차방정식  $x^2 + 5(a-1)x - 24a = 0$ 의 두 근의 비가 2 : 3일 때, 실수  $a$ 의 값은?

- ① -2    ② -1    ③ 0    ④ 1    ⑤ 2

해설

두 근을  $\alpha = 2k$ ,  $\beta = 3k$ 라고 하면

$$\alpha + \beta = 2k + 3k = -5(a-1)$$

$$\alpha\beta = 2k \times 3k = -24a$$

$$\therefore k = 1-a, k^2 = -4a$$

$a = 1-k$ 를 대입하면

$$k^2 + 4(1-k) = k^2 - 4k + 4 = (k-2)^2 = 0$$

$$\therefore k = 2$$

$$\therefore a = -1$$

해설

25.  $x$ 의 이차방정식  $x^2 + (k-2)x + 2 + k^2 + k = 0$ 의 두 실근을  $\alpha, \beta$ 라 하고  $(1-\alpha)(1-\beta)$ 의 최댓값과 최솟값을 각각  $M, m$ 이라 할 때,  $M+m$ 의 값을 구하면?

- ① 0      ② 1      ③ -1      ④ 2      ⑤ -2

해설

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 2 - k, \quad \alpha\beta = 2 + k^2 + k \\ \therefore (1 - \alpha)(1 - \beta) &= 1 - (\alpha + \beta) + \alpha\beta \\ &= k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2 \quad \dots\dots\dots \text{㉠} \end{aligned}$$

실근 조건에 의해

$$\begin{aligned} D &= (k - 2)^2 - 4(2 + k^2 + k) \geq 0 \\ 3k^2 + 8k + 4 &\leq 0 \quad \therefore (3k + 2)(k + 2) \leq 0 \\ \therefore -2 &\leq k \leq -\frac{2}{3} \quad \dots\dots\dots \text{㉡} \end{aligned}$$

㉠, ㉡에서

$$\begin{aligned} k = -1 \text{ 일 때 } m &= 0 \\ k = -2 \text{ 일 때 } M &= 1 \\ \therefore M + m &= 1 \end{aligned}$$