

1. 다음 중 다항식 $a^3 - a^2b + ab^2 + ac^2 - b^3 - bc^2$ 의 인수인 것은?

① $a + c$

② $a - b^2$

③ $a^2 - b^2 + c^2$

④ $a^2 + b^2 + c^2$

⑤ $a^2 + b^2 - c^2$

해설

$$\begin{aligned} & a^3 - a^2b + ab^2 + ac^2 - b^3 - bc^2 \\ &= a^3 - b^3 + (a - b)c^2 - ab(a - b) \\ &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) + (a - b)c^2 - ab(a - b) \\ &= (a - b)(a^2 + ab + b^2 + c^2 - ab) \\ &= (a - b)(a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

2. x 에 대한 다항식 $x^3 - 2x^2 - x + 2$ 가 $(x+a)(x+b)(x+c)$ 로 인수분해될 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값은? (단, a, b, c 는 상수)

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x+1)(x-1)(x-2)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = (-1)^2 + 1^2 + 2^2 = 6$$

3. 이차함수 $y = ax^2 + bx - 3$ 은 $x = 2$ 일 때 최댓값 5를 가진다. 이때, $a + b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수)

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$$y = ax^2 + bx - 3 = a(x - 2)^2 + 5$$

$$= ax^2 - 4ax + 4a + 5 \text{ 이므로}$$

$$b = -4a, \quad -3 = 4a + 5$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } a = -2, \quad b = 8$$

$$\therefore a + b = 6$$

4. 이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 가 $f(1) = f(3) = 8$ 이고 최솟값 5를 가질 때, 상수 a, b, c 에 대하여 $a + b + c$ 의 값을 구하면?

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

꼭짓점의 좌표가 $(2, 5)$ 이므로

이차함수는 $f(x) = a(x - 2)^2 + 5$ 라고 할 수 있다.

$f(3) = 8$ 이므로 $x = 3, y = 8$ 을 대입하면

$a + 5 = 8 \quad \therefore a = 3$ 이므로

$$f(x) = 3(x - 2)^2 + 5 = 3x^2 - 12x + 17$$

$$\therefore a + b + c = 8$$

5. 세 다항식 $A = x^2 + 3x - 2$, $B = 3x^2 - 2x + 1$, $C = 4x^2 + 2x - 3$ 에 대하여

$3A - \{5A - (3B - 4C)\} + 2B$ 를 간단히 하면?

① $3x^2 + 12x - 13$

② $-3x^2 + 24x + 21$

③ $3x^2 - 12x + 21$

④ $-3x^2 - 24x + 21$

⑤ $x^2 + 12x + 11$

해설

$$3A - \{5A - (3B - 4C)\} + 2B$$

$$= -2A + 5B - 4C$$

$$= -2(x^2 + 3x - 2) + 5(3x^2 - 2x + 1) - 4(4x^2 + 2x - 3)$$

$$= -3x^2 - 24x + 21$$

6. x 의 모든 값에 대하여 다음 등식이 성립할 때, 상수 a, b, c 의 값의 합을 구하여라.

$$x^3 + 1 = (x-1)(x-2)(x-3) + a(x-1)(x-2) + b(x-1) + c$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

x 에 대한 항등식이므로

$$x = 1 \text{ 일 때, } 2 = c \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$x = 2 \text{ 일 때, } 9 = b + c \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$x = 3 \text{ 일 때, } 28 = 2a + 2b + c \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a = 6, b = 7, c = 2$

$$\therefore a + b + c = 15$$

7. 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + c$ 를 $x+2$ 로 나누면 3이 남고, $x^2 - 1$ 로 나누면 떨어진다. 이 때, abc 의 값을 구하면?

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$$\begin{aligned}x^3 + ax^2 + bx + c &= (x+2)Q_1(x) + 3 \\ &= (x+1)(x-1)Q_2(x)\end{aligned}$$

$$f(-2) = 3 \quad f(1) = 0 \quad f(-1) = 0$$

$$x = -2 \text{ 대입, } -8 + 4a - 2b + c = 3$$

$$x = -1 \text{ 대입, } -1 + a - b + c = 0$$

$$x = 1 \text{ 대입, } 1 + a + b + c = 0$$

세 식을 연립해서 구하면

$$a = 3, b = -1, c = -3$$

$$\therefore abc = 9$$

8. 100개의 다항식 $x^2 - x - 1, x^2 - x - 2, \dots, x^2 - x - 100$ 중에서 계수가 정수인 일차식의 곱으로 인수분해되는 것은 모두 몇 개인가?

① 5개

② 7개

③ 9개

④ 11개

⑤ 13개

해설

$x^2 - x - n = (x + a)(x - b)$ (a, b 는 자연수)라 하면
 $b = a + 1, ab = n$ ($1 \leq n \leq 100$)

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n=ab$	2	6	12	20	30	42	56	72	90

$\therefore$ 9(개)

9. $x^6 + 1$ 을 계수가 실수인 범위 내에서 인수분해 할 때, 다음 중 인수인 것은?

① $x^2 + x + 1$

② $x^2 - x + 1$

③ $x^2 + \sqrt{3}x + 1$

④ $x^2 + \sqrt{3}x - 1$

⑤ $x^2 - 1$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (x^2)^3 + 1 \\&= (x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) \\&= (x^2 + 1)\{(x^2 + 1)^2 - 3x^2\} \\&= (x^2 + 1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1)\end{aligned}$$

10. 다음 식을 간단히 하면?

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} \quad (\text{단, } a \neq b \neq c)$$

① -1

② 1

③ $-\frac{1}{2}$

④ $\frac{1}{2}$

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} (\text{준 식}) &= \frac{a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ &= \frac{(c-b)a^2 - (c^2 - b^2)a + bc(c-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ &= \frac{(c-b)(a-b)(a-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 1 \end{aligned}$$

11. 서로 다른 세 실수 x, y, z 에 대하여 $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ 를 만족할 때, $x + y + z$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

$$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0$$

$$(x + y + z) = 0 \text{ 또는 } x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$$

$$\therefore x + y + z = 0 \text{ 또는 } \frac{1}{2}\{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\} = 0$$

그런데 x, y, z 가 서로 다른 세 실수($x \neq y \neq z$)이므로

$$x + y + z = 0$$

12. 자연수 $N = 35^3 + 3 \cdot 35^2 + 3 \cdot 35 + 1$ 의 양의 약수의 개수를 구하여라.(인수분해공식을 이용하여 푸시오.)

▶ 답: 개

▷ 정답: 49 개

해설

$$a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = (a + 1)^3$$

$$\therefore N = 35^3 + 3 \cdot 35^2 + 3 \cdot 35 + 1$$

$$= (35 + 1)^3 = 36^3 = 2^6 \times 3^6$$

$$\therefore \text{약수의 개수} = (6 + 1) \times (6 + 1) = 49$$

13. $x = 1001$ 일 때, $\frac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1000

해설

$$\begin{aligned}\frac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1} &= \frac{(x^4 + 1)(x^2 - 1)}{(x^4 + 1)(x + 1)} \\ &= x - 1 \\ &= 1001 - 1 \\ &= 1000\end{aligned}$$

14. 실수 x, y 가 $xy = 6$, $x^2y + xy^2 + x + y = 63$ 을 만족시킬 때, $x^2 + y^2$ 의 값은?

- ① 13 ② $\frac{1173}{32}$ ③ 55 ④ 69 ⑤ 81

해설

$$\begin{aligned} & x^2y + xy^2 + x + y \\ &= xy(x + y) + (x + y) \\ &= (xy + 1)(x + y) \\ &= 7(x + y) = 63, \\ & x + y = 9, xy = 6 \\ & \therefore x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy \\ & \qquad \qquad = 81 - 12 = 69 \end{aligned}$$

15. 다음 두 다항식이 서로 소가 아닐 때, 상수 a 의 모든 값의 합은?

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6, \quad x^2 - 3x + a$$

① -10

② -8

③ -5

④ 0

⑤ 3

해설

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ 을 조립제법으로 인수분해하면

$$(x-1)(x+2)(x-3)$$

각각의 경우에 대해 나머지 정리를 이용한다

i) $x=1 \Rightarrow 1-3+a=0, a=2$

ii) $x=2 \Rightarrow 4+6+a=0, a=-10$

iii) $x=3 \Rightarrow 9-9+a=0, a=0$

$\therefore a$ 의 합 : $2 + (-10) + 0 = -8$

16. 사차식 $x^4 - 4x^2 - 12$ 를 복소수의 범위에서 인수분해하면?

① $(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i)$

② $(x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6})(x + 2i)(x - 2i)$

③ $(x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i)$

④ $(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x + 2i)(x - 2i)$

⑤ $(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{6}i)(x - \sqrt{6}i)$

해설

$$x^4 - 4x^2 - 12, \quad x^2 = Y \text{ 라 하자}$$

$$\Rightarrow Y^2 - 4Y - 12 = (Y + 2)(Y - 6) = 0$$

$$Y = -2 \text{ 또는 } Y = 6$$

$$\Rightarrow x^2 = -2, \quad x^2 = 6$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{2}i, \quad x = \pm \sqrt{6}$$

$$\therefore x^4 - 4x^2 - 12$$

$$= (x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i)$$

17. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - k$ 가 이차식의 완전제곱식으로 인수분해될 때, 상수 k 의 값을 정하면?

① -1

② 1

③ 0

④ 2

⑤ -2

해설

$$\begin{aligned} & (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - k \\ &= (x+1)(x+4)(x+2)(x+3) - k \\ &= (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) - k \\ & \quad x^2 + 5x = X \text{로 치환하면} \\ & (\text{준식}) = (X+4)(X+6) - k \\ & \quad \quad \quad = X^2 + 10X + 24 - k \\ & \text{완전제곱식이 되려면 } 24 - k = 25 \\ & \therefore k = -1 \end{aligned}$$

18. $f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{100}$ 일 때, $f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값은?

① 1

② $1-i$

③ $1+i$

④ -1

⑤ 0

해설

$$\frac{1+i}{1-i} = i \text{ 이므로}$$

$$f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) = f(i) = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{100} = i^{100} = 1$$

19. $i + i^3 + i^5 + i^7 + \cdots + i^{101} = a + bi$ 일 때, $a + b$ 의 값은? (단, a, b 는 실수)

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

(좌변) $= i - i + i - i + \cdots + i = i$ 이므로

$i = a + bi$ 에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $a = 0, b = 1$

$\therefore a + b = 1$

20. $f(x) = x^{2008} + x^{2010}$ 일 때, $f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$ 의 값을 구하면?

① $1+i$

② $1-i$

③ 0

④ 2

⑤ -2

해설

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{2}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i$$

$$f\left(\frac{1-i}{1+i}\right) = f(-i) = (-i)^{2008} + (-i)^{2010}$$

$$= ((-i)^4)^{502} + ((-i)^4)^{502} \cdot (-i)^2$$

$$= 1 + (-1)$$

$$= 0$$

21. 이차방정식 $x^2 - x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}$ 을 간단히 하면?

① $\frac{1}{\beta}$

② $\frac{2}{\beta}$

③ β

④ 2β

⑤ β^2

해설

$$\beta^2 - \beta + 1 = 0$$

$$\alpha\beta = 1 \text{ 에서 } \beta = \frac{1}{\alpha},$$

$$\beta^2 = \frac{1}{\alpha^2}$$

$$1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} = 1 + \beta + \beta^2 = 2\beta$$

$$(\because \beta^2 + 1 = \beta)$$

해설

(별해1)

$$1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha^2} = \frac{2}{\alpha} (\because \alpha^2 - \alpha + 1 = 0)$$

$$\alpha\beta = 1 \text{ 에서 } \beta = \frac{1}{\alpha}$$

$$\therefore \frac{2}{\alpha} = 2\beta$$

(별해2)

$$x^2 - x + 1 = 0 \text{ 의 근은 } \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, \beta = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} \text{ 라 하면}$$

$$\frac{2}{\alpha} = \frac{2}{\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}} = 1 - \sqrt{3}i = 2\beta$$

22. 이차방정식 $x^2 - 2x + 5 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $\frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\beta}{\alpha^2}$ 의 값을 구하면?

- ① 2 ② $\frac{2}{5}$ ③ $-\frac{22}{25}$ ④ $\frac{22}{5}$ ⑤ -2

해설

근과 계수와의 관계에 의해

$$\alpha + \beta = 2, \quad \alpha\beta = 5$$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\beta}{\alpha^2} &= \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^2\beta^2} = \frac{(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)}{(\alpha\beta)^2} \\ &= \frac{8 - 15 \times 2}{25} = -\frac{22}{25} \end{aligned}$$

23. $a > 0, b > 0$ 일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ 이고, $a < 0, b < 0$ 일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 이다. 이러한 성질을 이용하여 이차방정식 $x^2 + 3x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -5

해설

$$\alpha + \beta = -3, \alpha\beta = 1$$

$$\therefore \alpha < 0, \beta < 0$$

$$\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = -\sqrt{\alpha\beta}$$

$$(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = (\alpha + \beta) + 2\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$$

$$= (\alpha + \beta) - 2 \cdot \sqrt{\alpha\beta} = -3 - 2 \cdot 1 = -5$$

24. 이차방정식 $x^2 + 5(a-1)x - 24a = 0$ 의 두 근의 비가 2 : 3일 때, 실수 a 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

두 근을 $\alpha = 2k$, $\beta = 3k$ 라고 하면

$$\alpha + \beta = 2k + 3k = -5(a-1)$$

$$\alpha\beta = 2k \times 3k = -24a$$

$$\therefore k = 1 - a, k^2 = -4a$$

$a = 1 - k$ 를 대입하면

$$k^2 + 4(1 - k) = k^2 - 4k + 4 = (k - 2)^2 = 0$$

$$\therefore k = 2$$

$$\therefore a = -1$$

해설

25. x 의 이차방정식 $x^2 + (k-2)x + 2 + k^2 + k = 0$ 의 두 실근을 α, β 라 하고 $(1-\alpha)(1-\beta)$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 할 때, $M+m$ 의 값을 구하면?

① 0

② 1

③ -1

④ 2

⑤ -2

해설

$$\alpha + \beta = 2 - k, \quad \alpha\beta = 2 + k^2 + k$$

$$\begin{aligned} \therefore (1-\alpha)(1-\beta) &= 1 - (\alpha + \beta) + \alpha\beta \\ &= k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2 \quad \cdots \cdots \cdots \text{㉠} \end{aligned}$$

실근 조건에 의해

$$D = (k-2)^2 - 4(2+k+k^2) \geq 0$$

$$3k^2 + 8k + 4 \leq 0 \quad \therefore (3k+2)(k+2) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq k \leq -\frac{2}{3} \quad \cdots \cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$k = -1 \text{ 일 때 } m = 0$$

$$k = -2 \text{ 일 때 } M = 1$$

$$\therefore M + m = 1$$