

1. 이차함수 $y = 2x^2$ 의 그래프와 모양이 같고 $x = -1$ 일 때, 최솟값 4를 갖는 이차함수의 식은?

① $y = 2(x - 1)^2$

② $y = 2(x - 1)^2 + 4$

③ $y = 2(x + 1)^2 + 4$

④ $y = -2(x + 1)^2 + 4$

⑤ $y = -2(x - 1)^2 + 4$

해설

$y = 2x^2$ 의 그래프와 모양이 같고 꼭짓점이 $(-1, 4)$ 이므로
 $y = 2(x + 1)^2 + 4$

2. 다음 사차방정식의 실근의 합을 구하여라.

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 6 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 6 = 0$ 에서 $x = -1, x = 2$ 를 대입하면 성립하므로
조립제법을 이용하여 인수분해하면

-1	1	-3	3	1	-6
		-1	4	7	6
2	1	-4	7	-6	0
		2	-4	6	
	1	-2	3	0	

$(x+1)(x-2)(x^2-2x+3) = 0$
 $\therefore x = -1$ 또는 $x = 2$ 또는 $x = 1 \pm \sqrt{2}i$
따라서 실수근은 $-1, 2$ 이므로 $-1 + 2 = 1$ 이다.

3. $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2$ 이고 $ab \neq 0$ 일 때, 다음 중 성립하는 것을 고르면? (단, 문자는 모두 실수이다.)

- ① $ax + by = 0$
- ② $a + b = x + y$
- ③ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
- ④ $x = y$
- ⑤ $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$

해설

$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2 = 0$ 을
간단히 정리하면
 $a^2y^2 + b^2x^2 - 2abxy = 0$
즉, $(ay - bx)^2 = 0$
 $\therefore ay - bx = 0$ ($\because a, x, b, y$ 는 실수)
따라서, $ay = bx$ 에서 $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$

4. x 에 대한 항등식 $\frac{x^2-3x-1}{x-1} - \frac{x^2-x-3}{x+1} + \frac{2}{x} = \frac{Ax+B}{x(x-1)(x+1)}$ 에서 $A-B$ 의 값을 수치대입법을 이용하여 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

분모를 간단히 할 수 있는 숫자를 대입해 보자.

양변에 $x=2$, $x=-2$ 를 대입해서 정리하면

$x=2$ 일 때

$$\frac{4-6-1}{1} - \frac{4-2-3}{3} + \frac{2}{2} = \frac{2A+B}{2 \times 1 \times 3}$$

$$-3 + \frac{1}{3} + 1 = \frac{2A+B}{6}$$

$$\therefore 2A+B = -10 \cdots \textcircled{1}$$

$x=-2$ 일 때

$$\frac{4+6-1}{-3} - \frac{4+2-3}{-1} + \frac{2}{-2} = \frac{-2A+B}{(-2)(-3)(-1)}$$

$$-3 + 3 - 1 = \frac{-2A+B}{-6}$$

$$\therefore -2A+B = 6 \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $A=-4$, $B=-2$

$$\therefore A-B = (-4) - (-2) = -2$$

5. 다항식 $f(x)$ 를 다항식 $g(x)$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$ 라 할 때 $f(x)$ 를 $\frac{g(x)}{n}$ 로 나눈 몫과 나머지를 나타낸 것은?

- ① 몫 : $nQ(x)$, 나머지 $R(x)$
- ② 몫 : $\frac{Q(x)}{n}$, 나머지 $R(x)$
- ③ 몫 : $\frac{Q(x)}{n}$, 나머지 $\frac{R(x)}{n}$
- ④ 몫 : $Q(x)$, 나머지 $\frac{R(x)}{x}$
- ⑤ 몫 : $nQ(x)$, 나머지 $nR(x)$

해설

$$f(x) = g(x)Q(x) + R(x) \cdots \textcircled{1}$$

$$f(x) = \frac{g(x)}{n}Q'(x) + R'(x) \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ 에서 } f(x) = nQ(x)\frac{g(x)}{n} + R(x),$$

$$\frac{Q'(x)}{n} = Q(x), R'(x) = R(x)$$

$$\therefore Q'(x) = n \cdot Q(x), R'(x) = R(x)$$

6. $x^3 - x^2 + 2 = (x + 1)^3 + a(x + 1)^2 + b(x + 1) + c$ 가 항등식일 때, $a + b + c$ 의 값을 구하면?

- ① 0
- ② 1
- ③ 2
- ④ 3
- ⑤ 4

해설

조립제법에 의한 방법으로 풀면

-1	1	-1	0	2
		-1	2	-2
-1	1	-2	2	0
		-1	3	
-1	1	-3	5	
		-1		
	1	-4		

$\therefore a = -4, b = 5, c = 0$

$\therefore a + b + c = 1$

해설

주어진 식의 양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$2 = 1 + a + b + c$

$\therefore a + b + c = 1$

7. 다항식 $f(x)$ 를 $x-2$, $x+2$ 로 나누었을 때, 나머지가 각각 5, 3이라 한다. 이 때, 다항식 $f(x)$ 를 x^2-4 로 나눈 나머지를 구하면 $ax+b$ 이다. $4a+b$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$f(2) = 5, f(-2) = 3$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 4)Q(x) + ax + b \\ &= (x - 2)(x + 2)Q(x) + ax + b \end{aligned}$$

$$f(2) = 2a + b = 5, f(-2) = -2a + b = 3$$

$$a = \frac{1}{2}, b = 4$$

9. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n = 1$ 을 만족하는 최소의 자연수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $n = 4$

해설

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i \text{ 에서}$$

$$n = 1 \text{ 일 때, } \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^1 = -i$$

$$n = 2 \text{ 일 때, } \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 = (-i)^2 = -1$$

$$n = 3 \text{ 일 때, } \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 = (-i)^3 = i$$

$$n = 4 \text{ 일 때, } \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4 = (-i)^4 = 1$$

따라서 조건을 만족하는 최소의 자연수는 4이다.

10. 복소수 z 의 켤레복소수를 $\bar{z}$ 라 할 때, $(1 + 2i)z + 5(1 - \bar{z}) = 0$ 을 만족시키는 복소수 z 는?

① $1 + 3i$

② $1 - 3i$

③ $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$

④ $\frac{1}{4} + \frac{3}{4}i$

⑤ $\frac{1}{4} - \frac{3}{4}i$

해설

$z = a + bi$ (a, b 는 실수)라 놓으면 $\bar{z} = a - bi$

따라서, 준식은 $(1 + 2i)(a + bi) + 5\{1 - (a - bi)i\} = 0$

$\therefore a - 7b + 5 + (b - 3a)i = 0$

그런데, a, b 가 실수이므로

$a - 7b + 5 = 0, b - 3a = 0$

이들을 연립하여 풀면 $a = \frac{1}{4}, b = \frac{3}{4}$

$\therefore z = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}i$

11. $\frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{a+1}{a}}$ 일 때, $|a-1| + |a| + |a+1|$ 을 간단히 하면?

① $-a+2$

② $-a$

③ 2

④ a

⑤ $a-2$

해설

$$\begin{aligned} a+1 \geq 0, a < 0 &\Rightarrow -1 \leq a < 0 \\ \therefore (\text{준식}) &= -(a-1) - (a) + (a+1) \\ &= -a+2 \end{aligned}$$

12. $\sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(3-x)^2} = x+3$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다. 이 두 실근을 α, β 라 할 때, $3\alpha\beta$ 의 값은?

① 3

② 5

③ 7

④ 9

⑤ 11

해설

$$(\text{준식}) = |x-1| + |3-x| = x+3$$

$$\text{i) } x < 1$$

$$-x+1+3-x = x+3, 3x=1$$

$$\therefore x = \frac{1}{3}$$

$$\text{ii) } 1 \leq x < 3$$

$$x-1+3-x = x+3,$$

$$x = -1 (\text{해가 아니다})$$

$$\text{iii) } x \geq 3$$

$$x-1-3+x = x+3, x=7$$

$$\text{두 근이 } \frac{1}{3}, 7$$

$$\therefore 3\alpha\beta = 7$$

13. 이차방정식 $x^2 - 2ix - k = 0$ 의 근에 대한 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ $k > 1$ 이면 두 근은 실근이다.
- ㉡ $k = 1$ 이면 중근을 갖는다.
- ㉢ 두 근의 곱은 실수이다.
- ㉣ $0 < k < 1$ 이면 두 근은 순허수이다.

- ① ㉠, ㉡

② ㉡, ㉣

③ ㉠, ㉡, ㉣
- ④ ㉡, ㉢, ㉣

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

근의 공식을 이용하여 $x^2 - 2ix - k = 0$ 의 근을 구하면 $x = i \pm \sqrt{-1+k}$

- ㉠ $k > 1$ 이어도 x 는 허수이다.<거짓>
- ㉡ $k = 1$ 이면 $x = i$ 로 중근을 갖는다.<참>
- ㉢ 두 근의 곱 $-k$ 는 허수일 수도 있다.<거짓>
- ㉣ $0 < k < 1$ 이면 $-1 < -1+k < 0$ 이므로 $\sqrt{-1+k} = ai(a \neq 1)$ 의 형태가 되어 x 는 순허수이다.

14. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 근의 공식을 유도하는 과정이다. (가), (나), (다)에 알맞은 식을 차례대로 쓰면?

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+(\quad)=-\frac{c}{a}+(\quad\text{가}\quad)$$
$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{(\quad\text{나}\quad)}{4a^2}$$
$$\Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=\frac{(\quad\text{다}\quad)}{2a}$$

- ① $\frac{b^2}{4a^2}, b^2-4ac, \pm\sqrt{b^2-4ac}$
- ② $\frac{b}{2a}, \sqrt{b^2-4ac}, b^2-4ac$
- ③ $\frac{b}{2a}, b^2-4ac, \pm\sqrt{b^2-4ac}$
- ④ $\frac{b}{4a^2}, \sqrt{b^2-4ac}, b^2-4ac$
- ⑤ $\frac{b}{a}, \left(\frac{b}{2}\right)^2-ac, \pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}$

해설

(가) 좌변을 제곱 꼴로 만들려 하는 것이므로 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=$

$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}$

(나) $-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}=-\frac{4ac}{4a^2}+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$

(다) $\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

15. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{5}i$ 일 때, 실수 a, b 에 대하여 ab 의 값은?

① -36 ② -18 ③ 18 ④ 24 ⑤ 36

해설

a, b 가 실수이므로
이차방정식의 한 근이 $2 + \sqrt{5}i$ 이면
다른 한 근은 $2 - \sqrt{5}i$ 이다.
근과 계수의 관계의 의하여
 $-a = (2 + \sqrt{5}i)(2 - \sqrt{5}i) = 4$
 $\therefore a = -4$
 $b = (2 + \sqrt{5}i)(2 - \sqrt{5}i) = 9$
 $\therefore ab = -36$

16. 이차방정식 $x^2 - 2x + 3 = 0$ 의 두 근이 α, β 일 때, $\alpha + 1, \beta + 1$ 을 두 근으로 하는 이차방정식은?

① $x^2 - 3x + 2 = 0$

② $x^2 + 4x + 6 = 0$

③ $x^2 + 3x - 4 = 0$

④ $x^2 - 4x + 6 = 0$

⑤ $x^2 + 2x - 3 = 0$

해설

근과 계수와의 관계에 의해

$$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = 3$$

$$(\alpha + 1) + (\beta + 1) = 4,$$

$$(\alpha + 1)(\beta + 1) = \alpha\beta + \alpha + \beta + 1 = 6$$

$\therefore \alpha + 1, \beta + 1$ 을 근으로 하는 방정식은

$$x^2 - 4x + 6 = 0$$

17. 다음 중 인수분해를 바르게 한 것을 고르면?

① $x^2 + 4x + 1 = (x - 2 - \sqrt{3})(x + 2 - \sqrt{3})$

② $x^2 - 2x + 5 = (x - 1 + 2i)(x + 1 + 2i)$

③ $x^2 + 4 = (x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i)$

④ $2x^2 + 4x - 5 = \left(x - \frac{-2 + \sqrt{14}}{2}\right)\left(x - \frac{-2 - \sqrt{14}}{2}\right)$

⑤ $3x^2 - 6x + 1 = 3\left(x - \frac{3 + \sqrt{6}}{3}\right)\left(x - \frac{3 - \sqrt{6}}{3}\right)$

해설

근의 공식을 통해 나온 해를 바탕으로 인수분해 한다

① $x^2 + 4x + 1 = (x + 2 - \sqrt{3})(x + 2 + \sqrt{3})$

② $x^2 - 2x + 5 = (x - 1 - \sqrt{6})(x - 1 + \sqrt{6})$

③ $x^2 + 4 = (x + 2i)(x - 2i)$

④ $2x^2 + 4x - 5$

$= 2\left(x - \frac{-2 + \sqrt{14}}{2}\right)\left(x - \frac{-2 - \sqrt{14}}{2}\right)$

⑤ $3x^2 - 6x + 1$

$= 3\left(x - \frac{3 + \sqrt{6}}{3}\right)\left(x - \frac{3 - \sqrt{6}}{3}\right)$

18. 이차방정식 $x^2 + 2ax + 3b = 0$ 의 한 근이 $3 - ai$ 일 때, 실수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하면?(단, $a \neq 0, i = \sqrt{-1}$)

① 12 ② 6 ③ -6 ④ -12 ⑤ -18

해설

이차방정식 $x^2 + 2ax + 3b = 0$ 의 한 근이 복소수 $3 - ai$ 이므로, 다른 한 근은 쥘레근인 $3 + ai$ 이다.

두 근의 합은 $(3 - ai) + (3 + ai) = -2a$ 이므로,
 $-2a = 6 \quad \therefore a = -3$ 이다.

두 근의 곱은 $(3 - ai)(3 + ai) = 3b$ 이므로,
 $9 + a^2 = 3b, 9 + (-3)^2 = 18 = 3b \quad \therefore b = 6$

$\therefore ab = -18$

19. 이차함수 $y = -2x^2 + 8x + 2$ 의 최댓값을 M , 이차함수 $y = 3x^2 - 6x + 4$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 값은?

① 10

② 11

③ 12

④ 13

⑤ 14

해설

$$y = -2(x^2 - 4x + 4 - 4) + 2 = -2(x - 2)^2 + 10$$

$$\therefore M = 10$$

$$y = 3(x^2 - 2x + 1 - 1) + 4 = 3(x - 1)^2 + 1$$

$$m = 1$$

$$\therefore M + m = 10 + 1 = 11$$

20. 삼차방정식 $x^3 - 7x^2 + px + q = 0$ 의 한 근은 $3 + \sqrt{2}$ 이다. 유리수 p, q 의 값을 구했을 때, $p + q$ 의 값은?

① 6 ② 10 ③ -2 ④ -1 ⑤ 1

해설

$x^3 - 7x^2 + px + q = 0$ 의 세 근은 $3 + \sqrt{2}, 3 - \sqrt{2}, \alpha$

세 근의 합 : $\alpha + (3 + \sqrt{2}) + (3 - \sqrt{2}) = 7$

$\therefore \alpha = 1$

$p = (3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) + \alpha(3 - \sqrt{2}) + \alpha(3 + \sqrt{2}) = 7 + 6 \quad \therefore p = 13$

$-q = (3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) \cdot 1 = 7$

$\therefore q = -7$

$\therefore p + q = 13 - 7 = 6$

21. 한 근이 $1 + \sqrt{3}i$ 인 방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 과 방정식 $x^2 + ax + 2 = 0$ 이 오직 한 개의 공통 실근을 가질 때, $a - b + c$ 의 값은? (단, a, b, c 는 실수)

- ① -14 ② -13 ③ -12 ④ -11 ⑤ -9

해설

$1 + \sqrt{3}i$ 가 근이므로 $1 - \sqrt{3}i$ 도 근이다. 이때, 또 한 근을 α 라 하면 근과 계수 관계에서

$$(1 + \sqrt{3}i) + (1 - \sqrt{3}i) + \alpha = -a \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$(1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i) + (1 + \sqrt{3}i)\alpha + (1 - \sqrt{3}i)\alpha = b \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$(1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i)\alpha = -c \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

또, 방정식 $x^2 + ax + 2 = 0$ 과의 공통근이 α 이므로

$$\alpha^2 + a\alpha + 2 = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉣}$$

㉠에서 $\alpha = -a - 2$ 를 ㉣에 대입하면

$$(-a - 2)^2 + a(-a - 2) + 2 = 0$$

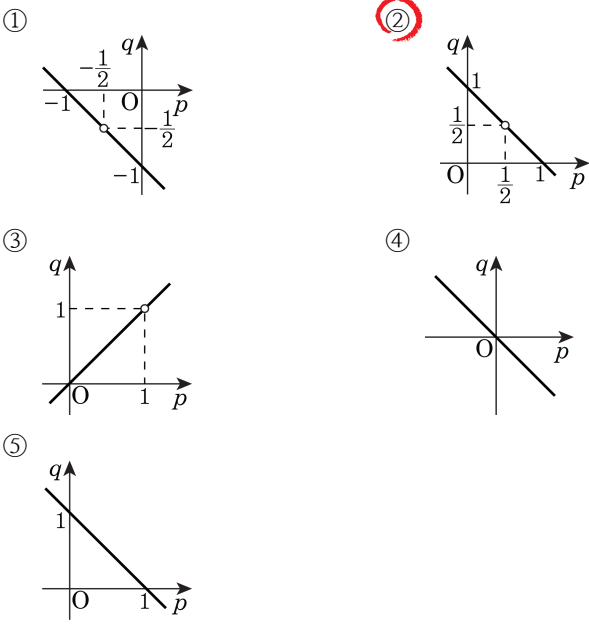
$$\therefore a = -3, \alpha = 1$$

$$\textcircled{㉡} \text{에서 } b = 2\alpha + 4 = 6$$

$$\textcircled{㉢} \text{에서 } c = -4\alpha = -4$$

$$\therefore a - b + c = -3 - 6 - 4 = -13$$

22. x 에 관한 두 개의 이차방정식 $x^2 - px - q = 0$, $x^2 - qx - p = 0$ 이 오직 하나의 공통근을 갖는다. 이 때, p , q 의 관계를 나타낸 그래프는?



해설

$$\begin{cases} x^2 - px - q = 0 & \dots ① \\ x^2 - qx - p = 0 & \dots ② \end{cases}$$

①-②에서 $(-p+q)x - (-p+q) = 0$
 $\therefore (-p+q)(x-1) = 0$
 여기서 $-p+q=0$ 이면 즉 $q=p$ 이면
 ①, ②가 같게 되어 주어진 문제의 조건에 모순이다.
 $\therefore x=1$ 이다.
 이 때 ①에서 $1-p-q=0$
 따라서 구하는 식은 $q=-p+1$ (단, $p \neq q$)

23. 세 변의 길이가 a, b, c 인 삼각형에 대하여 $(a^2 + b^2)c + (a + b)c^2 = (a + b)(a^2 + b^2) + c^3$ 이 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?
- ① $b = c$ 인 이등변 삼각형 ② a 가 빗변인 직각삼각형
③ $a = c$ 인 이등변 삼각형 ④ c 가 빗변인 직각삼각형
⑤ 정삼각형

해설

준식을 c 에 관한 내림차순으로 정리하면
 $c^3 - (a + b)c^2 - (a^2 + b^2)c + (a + b)(a^2 + b^2)$ 에서
 $c^2\{c - (a + b)\} - (a^2 + b^2)\{c - (a + b)\}$
 $= \{c - (a + b)\}\{c^2 - (a^2 + b^2)\}$
 $= (c - a - b)(c^2 - a^2 - b^2) = 0$
 a, b, c 는 삼각형의 세변이므로
 $c - a - b \neq 0$ 이고 $c^2 - a^2 - b^2 = 0$
즉 $c^2 = a^2 + b^2$ 이므로 c 가 빗변인 직각 삼각형이다.

24. $1-\sqrt{2}i$ 를 근으로 갖고 계수가 실수인 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 과 이차방정식 $x^2+ax+4=0$ 이 공통근을 갖는다. 이 때, $a+b+c$ 의 값은?

- ① -5
- ② -4
- ③ -3
- ④ -2
- ⑤ -1

해설

$x^3+ax^2+bx+c=0$ 의 세근을 $1=\sqrt{2}i, 1+\sqrt{2}i, \alpha$ 라 하면근과 계수와의 관계에 의해
 $2+\alpha=-a, 2\alpha+3=b, 3\alpha=-c \quad \cdots$ (가)
한편 $x^2+ax+4=0$ 과의 공통근이 $1-\sqrt{2}i, 1+\sqrt{2}i$ 이면 두근의 곱이 3 이 되므로 적합하지 않다.
따라서 공통근은 x 이고 $x^2+ax+4=0$
 $\therefore \alpha=2$ (가)의 세 식에 각각 $\alpha=2$ 를 대입하면 $a=-4, b=7, c=-6$
 $\therefore a+b+c=-3$

25. 둘레의 길이가 48cm 인 직사각형 중에서 그 넓이가 최대가 되도록 하는 직사각형의 가로, 세로의 길이를 순서대로 써라.

▶ 답: cm▶ 답 : cm

▶ 정답 : 12cm

▷ 정답 : 12cm

해설

가로, 세로의 길이를 각각 x cm, $(24 - x)$ cm 라 하면

$$\begin{aligned} y &= x(24 - x) \\ &= -x^2 + 24x \\ &= -(x - 12)^2 + 144 \end{aligned}$$

$x = 12$ 일 때, 최댓값 144를 갖는다.

$$\therefore x = 12, 24 - x = 12$$

따라서 가로 길이는 12 cm, 세로 길이도 12 cm