

1. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$x^4 = 16$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 16 = 0$ 에서
 $(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$
 $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = 0$
 $\therefore x = \pm 2$ 또는 $x = \pm 2i$
 $\therefore$ 모든 해의 합은 $(-2) + 2 + (-2i) + 2i = 0$

2. 방정식 $x^4 - 4x + 3 = 0$ 의 해를 구하면?

- ① $x = 1, x = -1 \pm 2i$
- ② $x = -1, x = 1 \pm 2i$
- ③ $x = 1, x = -1 \pm \sqrt{2}i$
- ④ $x = -1, x = 1 \pm \sqrt{2}i$
- ⑤ $x = 1$

해설

1	1	0	0	-4	3
	1	1	1	-3	
1	1	1	1	-3	0
	1	2	3		
	1	2	3	0	

$(x-1)^2(x^2+2x+3)=0, x=1, -1 \pm \sqrt{2}i$

3. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ 에서
 $x^2 = t$ 로 놓으면
 $t^2 - 13t + 36 = 0, (t - 4)(t - 9) = 0$
 $\therefore t = 4$ 또는 $t = 9$
(i) $t = 4$ 일 때, $x^2 = 4$
 $\therefore x = \pm 2$
(ii) $t = 9$ 일 때, $x^2 = 9$
 $\therefore x = \pm 3$
따라서 모든 해의 합은
 $(-2) + 2 + (-3) + 3 = 0$

4. 사차방정식 $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$ 의 모든 실근의 곱은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^4 + 3x^2 - 10 = 0$ 에서
 $x^2 = t$ 로 치환하면
 $t^2 + 3t - 10 = 0, (t + 5)(t - 2) = 0$
 $\therefore t = -5$ 또는 $t = 2$
 $\therefore x = \pm\sqrt{5}i$ 또는 $x = \pm\sqrt{2}$
따라서 모든 실근의 곱은
 $\sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) = -2$

5. 방정식 $x^3 - x^2 - 11x + 3 = 0$ 의 유리수 근이 아닌 두 근을 α, β 라 할 때, $\sqrt{\alpha^2 + 1} + \sqrt{\beta^2 + 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2\sqrt{6}$

해설

$$\begin{aligned}x^3 - x^2 - 11x + 3 &= 0 \\(x + 3)(x^2 - 4x + 1) &= 0 \\\therefore x &= -3, 2 \pm \sqrt{3} \\\sqrt{\alpha^2 + 1} + \sqrt{\beta^2 + 1} &= \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2 + 1} + \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2 + 1} \\&= \sqrt{8 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{8 - 4\sqrt{3}} \\&= \sqrt{8 + 2\sqrt{12}} + \sqrt{8 - 2\sqrt{12}} \\&= (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) = 2\sqrt{6}\end{aligned}$$

6. 방정식 $x(x+2)(x+4)(x+6)+15=0$ 을 풀면?

- ① $x = -2$ 또는 $x = -3$ 또는 $x = -2 \pm \sqrt{3}$
- ② $x = 2$ 또는 $x = 4$ 또는 $x = -3$ 또는 $x = -5$
- ③ $x = -2 \pm \sqrt{5}$ 또는 $x = -1 \pm \sqrt{6}$
- ④ $x = -3 \pm \sqrt{5}i$ 또는 $x = -2 \pm \sqrt{6}i$
- ⑤ $x = -1$ 또는 $x = -5$ 또는 $-3 \pm \sqrt{6}$

해설

$x(x+6) = x^2 + 6x$
 $(x+2)(x+4) = x^2 + 6x + 8$
 $x^2 + 6x = X$ 로 놓으면
 $x(x+2)(x+4)(x+6) + 15 = 0$
 $X(X+8) + 15 = 0,$
 $X^2 + 8X + 15 = 0$
 $(X+3)(X+5) = 0$
 $\therefore X = -3, X = -5$
ⓐ : $X = -3 \Rightarrow x^2 + 6x + 3 = 0,$
 $x = -3 \pm \sqrt{9-3} = -3 \pm \sqrt{6}$
ⓑ : $X = -5 \Rightarrow x^2 + 6x + 5 = 0,$
 $(x+5)(x+1) = 0, x = -1, -5$

7. 다음 사차방정식을 풀 때 근이 아닌 것을 구하면?

$$(x^2 - 2x)^2 - 6(x^2 - 2x) - 16 = 0$$

- ① 4 ② -4 ③ -2 ④ $1 + i$ ⑤ $1 - i$

해설

$x^2 - 2x = X$ 로 놓으면 주어진 방정식은
 $X^2 - 6X - 16 = 0, (X - 8)(X + 2) = 0$
 $\therefore x = 8$ 또는 $X = -2$
(i) $X = 8$ 일 때 $x^2 - 2x = 8$ 에서 $(x - 4)(x + 2) = 0$
 $\therefore x = 4$ 또는 $x = -2$
(ii) $X = -2$ 일 때 $x^2 - 2x = -2$ 에서 $x^2 - 2x + 2 = 0$
 $\therefore x = 1 \pm i$
따라서 (i), (ii) 에서 $x = 4$ 또는 $x = -2$ 또는 $x = 1 \pm i$

8. 다음 방정식의 해가 아닌 것은?

$$(x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12 = 0$$

- ① -3 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12 = 0$ 에서 $x^2 + x = X$ 라 하면

$$X^2 - 8X + 12 = 0, (X - 2)(X - 6) = 0$$

$\therefore X = 2$ 또는 $X = 6$

(i) $X = 2$ 일 때, $x^2 + x = 2$ 에서

$$x^2 + x - 2 = 0,$$

$$(x - 1)(x + 2) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = -2$$

(ii) $X = 6$ 일 때, $x^2 + x = 6$ 에서

$$x^2 + x - 6 = 0,$$

$$(x + 3)(x - 2) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 2$$

(i), (ii) 에서 주어진 방정식의 해는

$$x = -3 \text{ 또는 } x = -2 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서, 해가 아닌 것은 ③

9. 27의 세제곱근 중에서 한 허근을 β 라 할 때, $\beta^4 + 9\beta^2$ 의 값은?

- ① -81 ② -32 ③ -16 ④ 16 ⑤ 32

해설

$$\begin{aligned}\beta^3 &= 27 \text{에서 } (\beta - 3)(\beta^2 + 3\beta + 9) = 0 \\ \beta &\text{는 허근이므로 } \beta^2 + 3\beta + 9 = 0 \\ \therefore \beta^4 + 9\beta^2 &= \beta^3 \times \beta + 9\beta^2 = 27\beta + 9\beta^2 \\ &= 9(\beta^2 + 3\beta) = 9 \times (-9) = -81\end{aligned}$$

10. 사차방정식 $x^4 + 3x^2 + a = 0$ 의 한 근이 1일 때, 허근은?

- ① $\pm i$ ② $\pm 2i$ ③ $\pm 3i$ ④ $\pm 4i$ ⑤ $\pm 5i$

해설

한 근이 1이므로 사차방정식 $x^4 + 3x^2 + a = 0$ 에 대입하면

$$1 + 3 + a = 0, \quad \therefore a = -4$$

방정식 $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$ 에서 $x^2 = t$ 로 치환하면

$$t^2 + 3t - 4 = 0, \quad (t + 4)(t - 1) = 0, \quad (x^2 + 4)(x^2 - 1) = 0$$

$$\therefore x = \pm 2i \text{ 또는 } x = \pm 1$$

따라서, 주어진 방정식의 허근은 $\pm 2i$ 이다.

11. 삼차방정식 $x^3 - 6x^2 - 7x - 5 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때, $(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma)$ 의 값은?

- ① -15 ② 16 ③ -16 ④ 17 ⑤ -17

해설

$(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma) = 1 - (\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma$
근과 계수와의 관계에 의해

$$\alpha + \beta + \gamma = 6, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -7, \alpha\beta\gamma = 5$$

$$\therefore (1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma) = 1 - 6 - 7 - 5 = -17$$

해설

$$f(x) = x^3 - 6x^2 - 7x - 5 = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = 0 \text{ 이므로}$$

$$f(1) = (1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma) = 1 - 6 - 7 - 5 = -17$$

12. 삼차방정식 $x^3 - 4x^2 + x + k = 0$ 의 한 근이 -1 일 때, k 의 값과 나머지 두 근의 합은?

① 10

② 11

③ 12

④ 13

⑤ 14

해설

$x = -1$ 을 대입하면

$$(-1)^3 - 4(-1) + (-1) + k = 0 \quad \therefore k = 6$$

$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ 의 나머지 두 근을 α, β 라 하면

세 근의 합 $4 = -1 + \alpha + \beta$ 에서 $\alpha + \beta = 5$

$$\therefore k + \alpha + \beta = 11$$

13. 삼차방정식 $x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\alpha + \beta + \gamma = 3, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2, \quad \alpha\beta\gamma = -1 \text{ 이므로}$$
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 3^2 - 2 \cdot (2) = 9 - 4 = 5$$

14. 삼차방정식 $x^3 + x^2 + 2x - 3 = 0$ 의 세 근 α, β, γ 에 대하여 $\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha, \alpha\beta\gamma$ 를 세 근으로 갖는 삼차방정식이 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 일 때, $a - 2b + c$ 의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$x^3 + x^2 + 2x - 3 = 0$ 의 세 근이 α, β, γ 라 하면

$\alpha + \beta + \gamma = -1$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2$, $\alpha\beta\gamma = 3$

구하려는 방정식의 세 근의 합

$-1 + 2 + 3 = 4 \quad \therefore a = -4$

$(-1) \times 2 + 2 \times 3 + (-1) \times 3 = -2 + 6 - 3 = 1 \quad \therefore b = 1$

세 근의 곱 $(-1) \times 2 \times 3 = -6 \quad \therefore c = 6$

$\therefore a - 2b + c = -4 - 2 + 6 = 0$

15. 방정식 $x^3 - ax^2 + bx - 4 = 0$ 의 한 근이 $1 + i$ 일 때, 실수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

실수 계수의 방정식에서 $1 + i$ 가 근이면 $1 - i$ 도 근이다. 이들을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2 - 2x + 2 = 0$ 이다. 따라서 $x^3 - ax^2 + bx - 4$ 는 $x^2 - 2x + 2$ 로 나누어 떨어진다. 실제로 나누어 나머지를 구하면 $(b - 2a + 2)x + (-8 + 2a)$ 이다.
 $\therefore b - 2a + 2 = 0$ 과 $-8 + 2a = 0$ 에서 $a = 4$, $b = 6$ 이다.
 $\therefore a + b = 4 + 6 = 10$

16. 사차방정식 $x^4 + x^3 - x - 1 = 0$ 의 두 허근을 α, β 라 할 때, $\alpha^{100} + \frac{1}{\beta^{100}}$ 과 값이 같은 것은?

- ① $\alpha + 1$ ② $\alpha - 2$ ③ $\frac{2}{\beta}$ ④ -1 ⑤ 1

해설

$$\begin{aligned}x^4 + x^3 - x - 1 &= 0 \\x^3(x+1) - (x+1) &= 0 \\(x+1)(x^3-1) &= 0 \\\rightarrow (x+1)(x-1)(x^2+x+1) &= 0 \\x^2+x+1=0\text{의 두 근이 } \alpha, \beta & \\ \therefore \alpha^3=1, \beta^3=1, \alpha+\beta=-1, \alpha\beta=1 & \\\alpha^{100} + \frac{1}{\beta^{100}} = (\alpha^3)^{33}\alpha + \frac{1}{(\beta^3)^{33}\beta} & \\= \alpha + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha\beta+1}{\beta} = \frac{2}{\beta} & \end{aligned}$$

17. $x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, $\omega^6 + \omega^2 + \omega + 1$ 의 값은?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$\begin{aligned}\omega^3 &= 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0 \\ (\omega^3)^2 + (\omega^2 + \omega + 1) &= 1^2 + 0 = 1\end{aligned}$$

18. 사차방정식 $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 1 = 0$ 의 한 근을 α 라 할 때, $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

먼저 주어진 방정식을 x^2 으로 나누면

$$\text{방정식은 } x^2 - 6x + 11 - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 6\left(x + \frac{1}{x}\right) + 9 = 0 \text{이 된다.}$$

이 식에 α 를 넣어도 성립하므로

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} \text{를 } t \text{로 치환하면}$$

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} \text{는 } 3 \text{이 된다.}$$

$$\text{따라서 } \alpha + \frac{1}{\alpha} = 3$$

19. 사차방정식 $x^4 - x^3 - 4x^2 - x + 1 = 0$ 을 만족하는 실수 x 에 대하여 $x + \frac{1}{x} = a$ 라 하자. 이 때, a 가 될 수 있는 모든 값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^4 - x^3 - 4x^2 - x + 1 = 0$ 의 양변을 x^2 으로 나누면

$$x^2 - x - 4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0$$

$x + \frac{1}{x} = a$ 로 치환하면

$$x^2 - a - 6 = 0, (a - 3)(a + 2) = 0$$

$\therefore a = 3$ 또는 $a = -2$

따라서, 모든 A 의 값의 합은 $3 + (-2) = 1$

20. 방정식 $2x^4 - 5x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$ 의 모든 실근의 합을 a , 모든 허근의 곱을 b 라 할 때, $a + b$ 의 값은?

① 5

② 3

③ $\frac{3}{2}$

④ -2

⑤ 4

해설

$2x^4 - 5x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$ 양변을

x^2 으로 나누고 정리하면

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0$$

$$2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0$$

$$2t^2 - 5t - 3 = (2t + 1)(t - 3) = 0$$

$$\left(2x + \frac{2}{x} + 1\right)\left(x + \frac{1}{x} - 3\right) = 0$$

$$\therefore (2x^2 + x + 2)(x^2 - 3x + 1) = 0$$

이 때, $2x^2 + x + 2 = 0$ 은 허근을 갖고,

$x^2 - 3x + 1 = 0$ 은 실근을 가지므로

실근의 합 $a = 3$, 허근의 곱 $b = 1$ 이다.

$$\therefore a + b = 4$$

21. 다음 방정식의 실근의 합을 구하여라.

$$x^4 + 5x^3 - 12x^2 + 5x + 1 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

$x = 0$ 을 대입하면
 $1 = 0$ 이 되어 모순이므로 $x \neq 0$ 이다.
따라서, 주어진 식의 양변을
 x^2 으로 나누면
$$x^2 + 5x - 12 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$
$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 12 = 0$$
$$\therefore \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 14 = 0$$
여기서 $x + \frac{1}{x} = X$ 로 놓으면
$$X^2 + 5X - 14 = 0, (X + 7)(X - 2) = 0$$
$$\therefore X = -7 \text{ 또는 } X = 2$$
(i) $X = -7$ 일 때,
 $x + \frac{1}{x} = -7$ 에서
$$x^2 + 7x + 1 = 0$$
$$\therefore \frac{-7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$
(ii) $X = 2$ 일 때,
 $x + \frac{1}{x} = 2$ 에서
$$x^2 - 2x + 1 = 0, (x - 1)^2 = 0$$
$$\therefore x = 1$$
(i), (ii)로부터
$$x = 1(\text{중근}) \text{ 또는 } x = \frac{-7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$
따라서, 모든 근의 합은
$$1 + \frac{-7 + 3\sqrt{5}}{2} + \frac{-7 - 3\sqrt{5}}{2} = -6 \text{이다.}$$

22. $x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 한다. $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ 을 근으로 하는 삼차방정식이 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 일 때, abc 의 값을 구하면?

- ① 2
- ② 3
- ③ 4
- ④ 5
- ⑤ 6

해설

$x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0$ 의
세 근이 α, β, γ 이므로
 $\alpha + \beta + \gamma = -2,$
 $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3,$
 $\alpha\beta\gamma = -1$
 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = -3,$
 $\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma} = 2,$
 $\frac{1}{\alpha\beta\gamma} = -1$
따라서 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ 를 세 근으로 하는
삼차항의 계수가 1인 방정식은
 $x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$
 $\Leftrightarrow x^3 + ax^2 + bx + c = 0$
 $\therefore a = 3, b = 2, c = 1$

해설

$x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0 \cdots \cdots$ ①
 $x = \frac{1}{X}$ 로 놓으면
 $\left(\frac{1}{X}\right)^3 + 2 \cdot \left(\frac{1}{X}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{X}\right) + 1 = 0$
 $\therefore X^3 + 3X^2 + 2X + 1 = 0 \cdots \cdots$ ②
①의 세 근이 α, β, γ 이므로
②의 세 근은 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ 이다.
 $\therefore$ 구하는 방정식은
 $X^3 + 3X^2 + 2X + 1 = 0$ 에서
 $abc = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

23. 삼차방정식 $f(x) = 0$ 의 세 근 α, β, γ 에 대하여 $\alpha + \beta + \gamma = 3$ 일 때, 방정식 $f(2x + 3) = 0$ 의 세 근의 합은?

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

세 근의 합은 $\left(-\frac{x^2}{x^3}\text{의 계수}\right)$ 이므로
 x^3 의 계수와 x^2 의 계수만 구하면 된다.
최고차항의 계수가 1인 삼차방정식을
 $f(x)$ 라 하면 세 근의 합이 3이므로
 $f(x) = x^3 - 3x^2 + bx + d$
 $f(2x + 3)$
 $= (2x + 3)^3 - 3 \cdot (2x + 3)^2 + b \cdot (2x + 3) + d$
3차항과 2차항의 계수를 중심으로
식을 정리하면
 $8x^3 + 24x^2 + \dots \dots = 0$
 $\therefore$ 세 근의 합 $= -3$

해설

$f(2x + 3) = 0$ 의 세 근을
각각 p, q, r 이라 하면,
 $2p + 3 = \alpha \dots \textcircled{\text{㉠}}$
 $2q + 3 = \beta \dots \textcircled{\text{㉡}}$
 $2r + 3 = \gamma \dots \textcircled{\text{㉢}}$
 $\textcircled{\text{㉠}} + \textcircled{\text{㉡}} + \textcircled{\text{㉢}}$ 에서
 $2(p + q + r) + 9 = 3$
 $\therefore p + q + r = -3$

24. 사차방정식 $x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx - 5 = 0$ 이 $x = -1 + \sqrt{2}$ 를 한 근으로 가질 때, $2a - b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 유리수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$x = -1 + \sqrt{2}$ 에서 $x + 1 = \sqrt{2}$
양변을 제곱하여 정리하면 $x^2 + 2x - 1 = 0$
 $\therefore x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx - 5 = (x^2 + 2x - 1)(x^2 + cx + 5)$
 $= x^4 + (2 + c)x^3 + (4 + 2c)x^2 + (10 - c)x - 5$
 $\therefore 2 + c = 5, 4 + 2c = a, 10 - c = b$
 $\therefore a = 10, b = 7, c = 3$

25. 방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 w 라 하고
 $z = \frac{\omega + 1}{2\omega + 1}$ 라 할 때, $z\bar{z}$ 의 값을 구하면?

(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다)

- ① $\frac{1}{2}$
- ② $\frac{1}{3}$
- ③ $\frac{3}{4}$
- ④ $\frac{4}{5}$
- ⑤ $\frac{3}{7}$

해설

$x^3 - 1 = 0(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$ 에서
 $w, \bar{w}$ 는 $x^2 + x + 1 = 0$ 의
두 근이므로 근과 계수의 관계에서
 $w + \bar{w} = -1, w\bar{w} = 1$
또한, $z = \frac{\omega + 1}{2\omega + 1}$ 에서 $\bar{z} = \frac{\bar{w} + 1}{2\bar{w} + 1}$ 이므로
$$z\bar{z} = \frac{w + 1}{2w + 1} \times \frac{\bar{w} + 1}{2\bar{w} + 1}$$
$$= \frac{w\bar{w} + (w + \bar{w}) + 1}{4w\bar{w} + 2(w + \bar{w}) + 1} = \frac{1 - 1 + 1}{4 - 2 + 1} = \frac{1}{3}$$

해설

$x^3 - 1 = 0, (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$
 $\therefore w^2 + w + 1 = 0, w = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ 라 하자
$$z = \frac{w + 1}{2w + 1} = \frac{\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}}{\sqrt{3}i}$$
$$= -\frac{\sqrt{3}i - 3}{6} = \frac{3 - \sqrt{3}i}{6}$$
$$z\bar{z} = \frac{3 - \sqrt{3}i}{6} \times \frac{3 + \sqrt{3}i}{6} = \frac{9 + 3}{36} = \frac{1}{3}$$

26. $x^2 - x + 1 = 0$ 일 때, x^{180} 의 값을 구하면?

- ① 180 ② -180 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$x^2 - x + 1 = 0$ 양변에

$(x + 1)$ 을 곱하면, $x^3 + 1 = 0$

$x^3 = -1 \Rightarrow x^{180} = (x^3)^{60} = (-1)^{60} = 1$

27. 허수 w 가 $\omega^3 = 1$ 을 만족할 때, $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5$ 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\begin{aligned} w^3 = 1 &\Rightarrow (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0 \\ &\Rightarrow \omega^2 + \omega + 1 = 0, \omega^3 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 \\ = \omega + \omega^2 + 1 + \omega + \omega^2 \\ = (\omega^2 + \omega + 1) + \omega^2 + \omega = -1 \end{aligned}$$

28. $x^3 = 1$ 의 한 허근이 ω 일 때, $\omega^{10} + \omega^5 + 1$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$w^3 = 1,$$

$$x^3 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0 \text{의 한 허근이 } \omega$$

$$\Rightarrow w^2 + w + 1 = 0$$

$$\omega^{10} + \omega^5 + 1 = (w^3)^3 w + w^2 \cdot w^3 + 1$$

$$= w^2 + w + 1$$

$$= 0$$

29. 방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, 보기 중에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

㉡ $\omega^2 = 1$

㉢ $\omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}} = 2$

㉣ $\omega^{1005} + \omega^{1004} = -\omega$

㉤ $\omega^{18} + \omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}} = 3$

① ㉠, ㉢

② ㉡

③ ㉠, ㉢, ㉣

④ ㉢, ㉣, ㉤

⑤ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤

해설

$$x^3 - 1 = 0,$$

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0,$$

$$\omega^2 = -1 - \omega \cdots \text{㉠, ㉡}$$

$$\omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}}$$

$$= (\omega^3)^{33} + \frac{1}{(\omega^3)^{33}} = 2 \cdots \text{㉢}$$

$$\omega^{1005} + \omega^{1004}$$

$$= (\omega^3)^{335} + (\omega^3)^{334} \times \omega^2$$

$$= \omega^2 + 1 = -\omega \cdots \text{㉣}$$

$$\omega^{18} + \omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}}$$

$$= (\omega^3)^6 + (\omega^3)^{33} + \frac{1}{(\omega^3)^{33}} = 3 \cdots \text{㉤}$$

30. $x^2 + x + 1 = 0$ 일 때 $\frac{x^{10} + 1}{x^2}$ 의 값을 구하여라?

① 1

② 2

③ 0

④ -2

⑤ -1

해설

$$\begin{aligned}x^2 + x + 1 &= 0 \\(x - 1)(x^2 + x + 1) &= 0 \\x^3 - 1 = 0 &\Rightarrow \frac{x^{10} + 1}{x^2} \\&= \frac{(x^3)^3 x + 1}{x^2} \\&= \frac{x + 1}{x^2} = \frac{-x^2}{x^2} \\&= -1 \\(\because x^2 + x + 1 &= 0)\end{aligned}$$

31. $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라고 할 때, $(\omega^2 + 1)^4 + (\omega^2 + 1)^8$ 의 값은?

① 0

② 1

③ -1

④ ω

⑤ $-\omega$

해설

$$\begin{aligned}x^3 - 1 = 0 &\Rightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0 \\ \Rightarrow \omega^2 + \omega + 1 = 0, \omega^3 = 1 \\ \Rightarrow (\omega^2 + 1)^4 + (\omega^2 + 1)^8 &= (-\omega)^4 + (-\omega)^8 \\ &= \omega^3 \times \omega + (\omega^3)^2 \times \omega^2 \\ &= \omega^2 + \omega = -1\end{aligned}$$

32. 이차방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 근을 α 라 할 때, $1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5$ 의 값은?
(단, $i = \sqrt{-1}$)

① 0 ② 1 ③ -1 ④ i ⑤ -2

해설

한 근이 α 이므로
 $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$,
양변에 $\alpha - 1$ 를 곱하면,
 $\alpha^3 - 1 = 0$, $\therefore \alpha^3 = 1$
 $\therefore \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1$
 $= \alpha^3(\alpha^2 + \alpha + 1) + \alpha^2 + \alpha + 1$
 $= 0$

33. $x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = 0$ 일 때, $x + \frac{1}{x}$ 의 값은?(단, x 는 실수)

① $-1 + \sqrt{6}$

② $-1 - \sqrt{6}$

③ $\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$

④ $\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$

⑤ 1

해설

(i) $x \neq 0$ 이므로

$x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = 0$ 의 양변을

x^2 으로 나누면

$$x^2 + 2x - 3 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\therefore \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + 2 \left(x + \frac{1}{x} \right) - 3 = 0$$

$x + \frac{1}{x} = t$ 로 놓으면

$$(t^2 - 2) + 2t - 3 = 0, \quad t^2 + 2t - 5 = 0$$

$$\therefore t = -1 \pm \sqrt{6}$$

$$(ii) \quad x + \frac{1}{x} = -1 \pm \sqrt{6}$$

그런데 $\left| x + \frac{1}{x} \right| \geq 2$ 이므로

($\because$ x 는 실수)

$$\therefore x + \frac{1}{x} = -1 - \sqrt{6}$$