1. 다음 중 공집합이 <u>아닌</u> 유한집합을 모두 고르면? (정답 2 개)

① $\{x \mid x \le 1,\ x$는 자연수$\}$

② $\{x \mid x$는 5로 나누었을 때 나머지가 3인 자연수$\}$

③ $\{x \mid x < 2,\ x$는 소수$\}$

④ $\{x \mid x$는 4의 약수 중 홀수$\}$

⑤ $\{x \mid x$는 25보다 큰 25의 배수$\}$

해설

① $\{1\}$
② $\{3,\ 8,\ 13,\ \cdots\}$
③ $\varnothing$
④ $\{1\}$
⑤ $\{50,\ 75,\ 100,\ \cdots\}$

2. $1 < a < 4$일 때, $\sqrt{(a-4)^2} + |a-1|$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\sqrt{(a-4)^2} + |a-1|$
$= |a-4| + |a-1|$
$= -a + 4 + a - 1 \ = 3$

3. $x > 2$에서 정의된 두 함수 $f(x), g(x)$가

$f(x) = \sqrt{x-2}+2$, $g(x) = \dfrac{1}{x-2}+2$일 때, $(f \circ g)(3)+(g \circ f)(3)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(3) = 3$
$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(3) = 3$
$\therefore (f \circ g)(3)+(g \circ f)(3) = 6$

4. 두 집합 $A=\{1,3,4,5\}$, $B=\{6,8\}$ 에 대하여 집합 $C=\left\{x \,\middle|\, x=\frac{a+b}{2}, a\in A, b\in B\right\}$ 일 때, 다음 중 집합 C 의 원소가 아닌 것은?

① $\frac{7}{2}$ ② 4 ③ $\frac{9}{2}$ ④ 5 ⑤ $\frac{11}{2}$

해설

$a\in A$, $b\in B$ 이므로 a 는 1, 3, 4, 5 중의 하나이고, 그 각각에 대하여 b 는 6, 8이 될 수 있다.

(i) $a=1$ 일 때, $x=\frac{1+6}{2}, \frac{1+8}{2}$

$\therefore x=\frac{7}{2}, \frac{9}{2}$

(ii) $a=3$ 일 때, $x=\frac{3+6}{2}, \frac{3+8}{2}$

$\therefore x=\frac{9}{2}, \frac{11}{2}$

(iii) $a=4$ 일 때, $x=\frac{4+6}{2}, \frac{4+8}{2}$

$\therefore x=5, 6$

(iv) $a=5$ 일 때, $x=\frac{5+6}{2}, \frac{5+8}{2}$

$\therefore x=\frac{11}{2}, \frac{13}{2}$

$\therefore C=\left\{\frac{7}{2}, \frac{9}{2}, 5, \frac{11}{2}, 6, \frac{13}{2}\right\}$

5. 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 q 이기 위한 충분조건, r 은 q 이기 위한 필요조건, r 은 s 이기 위한 충분조건, q 는 s 이기 위한 필요조건일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① q는 p 이기 위한 충분조건이다.

② r은 p 이기 위한 충분조건이다.

③ p는 r이기 위한 필요충분조건이다.

④ r 은 s 이기 위한 필요충분조건이다.

⑤ s 는 p이기 위한 필요충분조건이다.

해설

주어진 조건을 그림처럼 도식화 해보면 q, r, s는 서로 필요충분조건이고 p는 q, r, s이기 위한 충분조건이다.

$$\begin{tikzcd} p \arrow[r, Rightarrow] & q \arrow[r, Rightarrow] & r \arrow[dl, Rightarrow] \\ & s \arrow[u, Rightarrow] & \end{tikzcd}$$

$\therefore$ ④

6. 부등식 $a^2+b^2>2(a+b-1)$ 이 성립하지 않도록 하는 실수 $a,\ b$ 에 대하여, $a+b$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

준식을 정리하면

$a^2-2a+1+b^2-2b+1>0,\ (a-1)^2+(b-1)^2>0$

따라서 $a=1,\ b=1$ 일 때만 이 부등식이 성립하지 않는다.

$\therefore a+b=2$

7. $f(x) = \begin{cases} x+5 & (x \geq 0) \\ -x^2+3 & (x < 0) \end{cases}$ 으로 정의된 함수 f 에 대하여 $(f \circ f)(-1) + f^{-1}(2)$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$(f \circ f)(-1) = f(-(-1)^2+3) = f(2) = 2+5 = 7$
$f^{-1}(2) = t$ 라 하면 $f(t) = 2$
그런데 $x+5 \geq 5$ $(\because\ x \geq 0)$ 이고
$-x^2+3 < 3$ $(\because\ x < 0)$ 이므로 $-t^2+3 = 2$
$\therefore\ t = f^{-1}(2) = -1$ $(\because\ t < 0) \cdots$ ㉠
따라서 $(f \circ f)(-1) + f^{-1}(2) = 7 + (-1) = 6$

8. 분수식 $\frac{x^2}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^2}{(y-x)(y-z)}+\frac{z^2}{(z-x)(z-y)}$를 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\frac{x^2(z-y)+y^2(z-x)+z^2(y-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}\cdots$①

①에서 분자를 x에 관하여 정리하면

$x^2(z-y)+y^2(z-x)+z^2(y-x)$

$=(z-y)x^2-(z^2-y^2)x+yz^2-y^2z$

$=(z-y)x^2-(z+y)(z-y)x+zy(z-y)$

$=(z-y)\left\{x^2-(z+y)x+zy\right\}$

$=(z-y)(x-z)(x-y)=(x-y)(y-z)(z-x)$

$\therefore$ (준식) $=\frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}=1$

9. $\dfrac{1+\dfrac{1}{x-1}}{1-\dfrac{1}{x+1}}=a+\dfrac{b}{x-1}$ 이라 할 때, a^2+b^2 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

좌변을 정리하여 우변과 비교한다.

$$\frac{1+\frac{1}{x-1}}{1-\frac{1}{x+1}}=\frac{\frac{x-1+1}{x-1}}{\frac{x+1-1}{x+1}}=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x+1}}$$

$$=\frac{x(x+1)}{x(x-1)}=\frac{x+1}{x-1}$$

$$a+\frac{b}{x-1}=\frac{ax-a+b}{x-1}$$

$$\frac{x+1}{x-1}=\frac{ax-a+b}{x-1}$$

$\therefore\ a=1,\ b=2 \Rightarrow a^2+b^2=5$

10. $x+2y=5,\ xy=6$일 때, $\dfrac{2y}{x+1}+\dfrac{x}{2y+1}$의 값은?

① 1 ② $\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{1}{6}$ ④ $\dfrac{1}{18}$ ⑤ $\dfrac{1}{36}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{2y}{x+1}+\frac{x}{2y+1}&=\frac{2y(2y+1)+x(x+1)}{(x+1)(2y+1)}\\&=\frac{(x+2y)^2-4xy+(x+2y)}{2xy+(x+2y)+1}\\&=\frac{5^2-4\times6+5}{2\times6+5+1}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

11. $a,\ b$가 유리수이고, 방정식 $(x+1)^3+2(x+1)^2-a(x+1)-b=0$의 한 근이 $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$일 때 $a,\ b$의 값을 구하면?

① $a=2,\ b=4$　　② $a=2,\ b=-4$

③ $a=-2,\ b=4$　　④ $a=-2,\ b=-4$

⑤ $a=-2,\ b=3$

해설

$\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$이므로 주어진방정식에 대입하면

$2\sqrt{2}+4-a\sqrt{2}-b=0,\ \ \sqrt{2}(2-a)+(4-b)=0$

$a,\ b$는 유리수이므로 $2-a=0,\ 4-b=0$

$\therefore\ a=2,\ b=4$

12. $-\frac{1}{3} \le x \le \frac{8}{3}$ 에서 함수 $y = \sqrt{3x+a}+2$ 의 최댓값이 b , 최솟값이 2 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y = \sqrt{3x+a}+2 = \sqrt{3\left(x+\frac{a}{3}\right)}+2$

주어진 함수의 그래프는 $y = \sqrt{3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{a}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이므로 x 의 값이 증가할 때, y 의 값도 증가한다.

i) $x = -\frac{1}{3}$ 일 때 최솟값을 가지므로

$$2 = \sqrt{3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+a}+2 \quad \therefore\ a = 1$$

ii) $x = \frac{8}{3}$ 일 때 최댓값을 가지므로

$$b = \sqrt{3\cdot\frac{8}{3}+1}+2 = 5$$

i), ii) 에서 $a+b = 1+5 = 6$

13. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, \cdots, 100\}$ 의 부분집합 중에서 다음의 두 조건을 만족하고, 원소의 개수가 가장 적은 집합을 A 라 할 때 $n(A)$ 를 구하면?

㉠ $2 \in A$
㉡ $m,\ n \in A$ 이고, $mn \in U$ 이면 $mn \in A$ 이다.

① 6　　② 8　　③ 10　　④ 12　　⑤ 16

해설

$2 \in A$ 이고, $2 \times 2 = 2^2 \in U$ 이므로 $2^2 \in A$
$2 \in A,\ 2^2 \in A$ 이고, $2 \times 2^2 = 2^3 \in U$ 이므로 $2^3 \in A$
이와 같은 과정을 반복하면
$2^4 \in A,\ 2^5 \in A,\ 2^6 \in A, \cdots$
따라서 집합 A 는 전체집합 U 의 원소 중 2의 거듭제곱을 반드시 포함해야 한다. 즉, 집합 A 의 원소의 개수가 가장 적을 때는 2의 거듭제곱만을 원소로 가질 때이므로 구하는 집합은 $\{2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64\}$ 이다.

14. 실수 전체의 집합의 부분집합 A 가 다음의 두 조건을 만족한다.

(가) $1 \in A$
(나) $a \in A$ 이면 $\sqrt{2}a \in A$

이 때, 다음 [보기] 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ 집합 A 는 유한집합이다.

㉡ 임의의 자연수 n 에 대하여 $2^n \in A$ 이다.

㉢ 집합 A 의 원소 중 가장 작은 수는 1 이다.

① ㉠　② ㉡　③ ㉢　④ ㉠, ㉡　⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ 조건 (가)에서 $1 \in A$ 이므로 조건 (나)에 의하여
$\sqrt{2} \in A,\ (\sqrt{2})^2 \in A,\ (\sqrt{2})^3 \in A,\ \cdots,$
즉, $(\sqrt{2})^n$ (n 은 자연수) 꼴로 나타나는 수는 모두 집합 A 의 원소이므로 A 는 무한집합이다.
㉡ ㉠에서 $(\sqrt{2})^2 \in A,\ (\sqrt{2})^4 \in A,\ (\sqrt{2})^6 \in A,\ \cdots,$
즉 $2 \in A,\ 2^2 \in A,\ 2^3 \in A,\ \cdots$ 이므로 임의의 자연수 n 에 대하여 $2^n \in A$ 이다.
㉢ (반례)
집합 $A = \{0,\ 1,\ \sqrt{2},\ (\sqrt{2})^2,\ (\sqrt{2})^3,\ \cdots\}$은 주어진 조건 (가), (나)를 모두 만족하지만 원소 중 가장 작은 수는 0 이다.
이상에서 옳은 것은 ㉡뿐이다.

15. 집합 $A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8, \cdots,\ 18\}$ 를 조건제시법으로 올바르게 나타낸 것을 모두 골라라.

> ㉠ $A = \{x \mid 0 \le x \le 18$인 정수$\}$
>
> ㉡ $A = \{x \mid 1 < x \le 17$인 짝수$\}$
>
> ㉢ $A = \{x \mid x$는 20보다 작은 짝수$\}$
>
> ㉣ $A = \{x \mid x$는 18 이하의 짝수$\}$
>
> ㉤ $A = \{x \mid x$는 19 미만의 짝수$\}$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

▷ 정답 : ㉣

▷ 정답 : ㉤

해설

$A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8, \cdots,\ 18\}$
$= \{x \mid x$는 20보다 작은 짝수$\}$
$= \{x \mid x$는 19 미만의 짝수$\}$
$= \{x \mid x$는 18 이하의 짝수$\}$

16. 세 개의 원소로 된 집합 $A = \{a,\ b,\ c\}$ 에서 조건 $X \subset Y \subset A$ 를 만족하는 집합 $X,\ Y$ 를 만들 수 있는 경우는 모두 몇 가지인지 구하여라.

▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : 27 개

해설

(i) $X = \varnothing$ 일 때, 집합 Y 는 집합 A 의 모든 부분집합이므로 $2^3 = 8$ (개)

(ii) $X = \{a\}$ 일 때 집합 Y 는 원소 a 를 반드시 포함하는 집합 A 의 부분집합이므로 개수는 $2^2 = 4$

$X = \{b\}$, $X = \{c\}$ 일 때도 마찬가지이므로 $3 \times 4 = 12$ (개)

(iii) $X = \{a,\ b\}$ 일 때 집합 Y 는 $a,\ b$ 를 포함하는 집합 A 의 부분집합이므로 개수는 $2^1 = 2$ (개)

$X = \{a,\ c\}$, $X = \{b,\ c\}$ 일 때도 마찬가지 이므로 $2 \times 3 = 6$ (개)

(iv) $X = \{a,\ b,\ c\}$ 일 때 $Y = \{a,\ b,\ c\}$ 뿐이므로 1 (개)

$\therefore$ 27 개

17. 전체집합 $U=\{1, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 12\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A=\{1, 5, 6, 9, 12\}$, $A\cap B=\{6, 9, 12\}$ 가 성립할 때 다음 중 집합 B 가 될 수 <u>없는</u> 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $\{6, 8, 9, 12\}$　　② $\{6, 8, 9, 10, 12\}$

③ $\{5, 6, 8, 12\}$　　④ $\{1, 5, 6, 9\}$

⑤ $\{6, 9, 12\}$

해설

$\{6, 9, 12\}\subset B\subset\{3, 6, 8, 9, 10, 12\}$ 이므로 집합 B 는 원소 6, 9, 12 은 반드시 포함하는 집합이다.
따라서 ③, ④ 은 B 가 될 수 없다.

18. 두 집합 $A = \{5,\ 2a+1,\ 11\}$, $B = \{6-a,\ 3a-2,\ 13\}$에 대하여 $A \cap B = \{7\}$일 때, $B - A$는?

① $\{5,\ 7,\ 11\}$　② $\{3,\ 7,\ 13\}$　③ $\{5,\ 11\}$
④ $\{3,\ 13\}$　⑤ $\{7\}$

해설

$A - B = \{7\}$이므로 $7 \in A$, $7 \in B$이다.
$2a + 1 = 7 \quad \therefore\ a = 3$
$B = \{6-3,\ 3 \times 3 - 2,\ 13\} = \{3,\ 7,\ 13\}$
$B - A = \{3,\ 13\}$

19. 두 자리 자연수 중 k의 배수인 것 전체의 집합을 $A_k(k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ 라 할 때, 집합 $A_2 \cap (A_3 \cup A_4)$ 의 원소의 개수는?

① 26　② 27　③ 28　④ 29　⑤ 30

해설

$A_2 \cap (A_3 \cup A_4) = (A_2 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_4) = A_6 \cup A_4$

$10 \le 6n < 100$ 에서 $2 \le n \le 16 \therefore\ n(A_6) = 15$

$10 \le 4n < 100$ 에서 $3 \le n < 25 \therefore\ n(A_4) = 22$

$10 \le 12n < 100$ 에서 $1 \le n \le 8 \therefore\ n(A_{12}) = 8$

그러므로 $n(A_6 \cup A_4) = 15 + 22 - 8 = 29$

20. 두 조건 p_n, $q_n(n=1,\ 2)$에 대하여 $P_n = \{x|x$는 p_n을 만족한다.$\}$, $Q_n = \{x|x$는 q_n을 만족한다.$\}$ 이고, p_1 은 p_2이기 위한 필요조건, q_n 은 p_n이기 위한 충분조건일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $P_1 \cap P_2 = P_2$　　② $P_1 \cap Q_1 = Q_1$

③ $(P_1 \cup Q_1) \cup P_2 = P_1$　　④ $(P_1 \cup Q_1) \cap P_2 = P_2$

⑤ $(P_1 \cap Q_1) \cup Q_2 = Q_1$

해설

p_1 은 P_2이기 위한 필요조건이므로 $P_1 \supset P_2$, q_n 은 p_n이기 위한 충분조건이므로 $P_1 \supset Q_1,$ $P_2 \supset Q_2$

① $P_1 \cap P_2 = P_2$

② $P_1 \cap Q_1 = Q_1$

③ $(P_1 \cup Q_1) \cup P_2 = P_1 \cup P_2 = P_1$

④ $(P_1 \cup Q_1) \cap P_2 = P_1 \cap P_2 = P_2$

⑤ $(P_1 \cap Q_1) \cup Q_2 = Q_1 \cup Q_2 \neq Q_1$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

21. 다음은 조화평균에 관한 어떤 수학적 사실을 증명한 것이다.

증명

양수 $a,\ b,\ H$에 대하여
적당한 실수 r가 존재하여
$a = H + \frac{a}{r},\ H = b + \frac{b}{r} \cdots\ (A)$가 성립한다고 하자.
그러면 $a \neq b$이고 $\frac{a-H}{a} =$ (가) $\cdots (B)$이므로
$H =$ (나)이다.
역으로, $a \neq b$인 양수 $a,\ b$에 대하여
$H =$ (나)이면,
식 (B)가 성립하고 $\frac{a-H}{a} \neq 0$이다.
(B)에서 $\frac{a-H}{a} = \frac{1}{r}$이라 놓으면
식 (A)가 성립한다. 따라서 양수 $a,\ b,\ H$에 대하여 적당한 실수 r이 존재하여
식 (A)가 성립하기 위한 (다) 조건은
$a \neq b$이고 $H =$(나)이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞는 것을 순서대로 적으면?

① $\frac{H-b}{b},\quad \frac{2ab}{a+b}$, 필요충분
② $\frac{H-b}{b},\quad \frac{ab}{a+b}$, 필요충분
③ $\frac{H-b}{b},\quad \frac{2ab}{a+b}$, 충분
④ $\frac{b-H}{b},\quad \frac{2ab}{a+b}$, 필요
⑤ $\frac{b-H}{b},\quad \frac{ab}{a+b}$, 충분

해설

$a = H + \frac{a}{r}$에서 $\frac{r}{1} = \frac{a-H}{a}$

$H = b + \frac{b}{r}$에서 $\frac{r}{1} = \frac{H-b}{b}$

$\therefore \frac{a-H}{a} =$ (가) $\frac{H-b}{b}$

$ab - bH = aH - ab$이므로 $H =$ (나) $\frac{2ab}{a+b}$

따라서 (다) 필요충분조건

22. 이차방정식 $x^2-2x+k=0$(k는 실수)이 허근을 가질 때, $f(k)=k+1+\dfrac{1}{k-1}$의 최솟값은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$\dfrac{D}{4}=1-k<0$이므로 $k-1>0$

$$f(k)=2+(k-1)+\frac{1}{k-1}$$
$$\geq 2+2\sqrt{(k-1)\frac{1}{k-1}}=4$$

따라서 $f(k)$의 최솟값은 4이다.

23. 실수에서 정의된 함수 $f_1(x) = \frac{x-1}{x}$, $f_{n+1}(x) = (f_1 \circ f_n)(x)$ (단, n은 자연수)에 대하여, 방정식 $f_{2008}(x) = \frac{1}{2}$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$f_2(x) = \frac{\frac{x-1}{x} - 1}{\frac{x-1}{x}} = \frac{-1}{x-1}$$

$$f_3(x) = \frac{\frac{-1}{x-1} - 1}{\frac{-1}{x-1}} = x$$

$$f_4(x) = f_1(x)$$

$$\vdots$$

$2008 = 3 \times 669 + 1$ 이므로

$$\therefore\ f_{2008}(x) = f_1(x) = \frac{x-1}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ x = 2$$

24. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+1 & (x \geq 1) \\ -\sqrt{1-x} & (x<1) \end{cases}$ 에 대하여 $f(x)$ 의 역함수가 존재할 때, $(f^{-1} \circ f^{-1})(x)=1$ 일 때, x 의 값을 구하면? (단, $f^{-1}(x)$ 은 $f(x)$ 의 역함수)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f(x)=\begin{cases} x^2-2x+1 & (x \geq 1) \\ -\sqrt{1-x} & (x<1) \end{cases}$ 에서

$(f^{-1} \circ f^{-1})(x)=(f \circ f)^{-1}(x)=1$

$(f \circ f)(1)=(f(f(1))=f(0)=-1$

$\therefore\ x=-1$

25. 무리수 $\sqrt{k}$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라 할 때, $a^3 + b^3 = 9ab$을 만족하는 양의 정수 k를 구하면?

① 6　　② 4　　③ 2　　④ 1　　⑤ 11

해설

$\sqrt{k} = a + b \quad \therefore\ b = \sqrt{k} - a$

$a^3 + b^3 = 9ab, \quad a^3 + (\sqrt{k} - a)^3 = 9a(\sqrt{k} - a)$

$\therefore\ 3a(3a - k) + \sqrt{k}(3a^2 - 9a + k) = 0$

$a,\ k$가 정수이므로

$3a(3a - k) = 0, \quad 3a^2 - 9a + k = 0$

연립하여 풀면

$\therefore a = 2, \quad k = 6$

26. 집합$\mathrm{A} = \{\phi,\ 0,\ 1,\ 2,\ \{0, 1\}\}$ 에 대하여 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\phi \in \mathrm{A}$ ② $\phi \subset \mathrm{A}$ ③ $\{0,\ \{0, 1\}\} \subset \mathrm{A}$

④ $\{1\} \in \mathrm{A}$ ⑤ $\{0,\ 1\} \in \mathrm{A}$

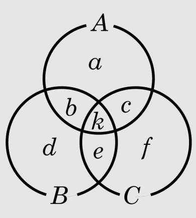
해설

집합 A 에서 ϕ 는 원소이면서 또한 ϕ 는 모든 집합의 부분집합이므로 $\phi \in \mathrm{A},\ \phi \subset \mathrm{A}$ 이다.
그러나 1 은 A 의 원소이므로 $1 \in \mathrm{A},\ \{1\} \subset \mathrm{A}$ 이어야 한다.

27. 집합 X, Y 에 대하여 연산 ★ 를 $X★Y = (X \cup Y) - (X \cap Y)$ 로 정의하고, 세 집합 A, B, C 가 $n(A \cup B \cup C) = 45$, $n(A★B) = 18$, $n(B★C) = 22$, $n(C★A) = 24$ 를 만족할 때, $n(A \cap B \cap C)$ 의 값을 구하면?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설



$n(A \cap B \cap C) = k$

$n(A \cup B \cup C) = a + b + c + d + e + f + k$

$= 45 \cdots$ ㉠

$n(A★B) = a + c + d + e = 18 \cdots$ ㉡

$n(B★C) = b + d + c + f = 22 \cdots$ ㉢

$n(C★A) = a + b + e + f = 24 \cdots$ ㉣

㉡ + ㉢ + ㉣ $= 2(a + b + c + d + e + f) = 64$

$\therefore\ a + b + c + d + e + f = 32 \cdots$ ㉤

㉤을 ㉠에 대입하면 $\therefore\ k = 13$

28. 긴 나무막대기 위에 이 막대기의 길이를 10등분, 12등분, 15등분하는 세 종류의 눈금이 새겨져 있다. 이 눈금을 따라 막대기를 자르면 모두 몇 토막이 나겠는가?

① 20토막　② 28토막　③ 36토막
④ 48토막　⑤ 60토막

해설

나무막대기의 길이를 1이라 하면 세 종류의 눈금의 간격은 각각 $\frac{1}{10},\ \frac{1}{12},\ \frac{1}{15}$ 이다.

즉, $\frac{6}{60},\ \frac{5}{60},\ \frac{4}{60}$ 이므로 60이하의 수 중에서 4의 배수 또는 5의 배수 또는 6의 배수인 수의 개수를 구하면 된다. 60이하의 자연수 중 4의 배수, 5의 배수, 6의 배수의 집합을 각각 $A,\ B,\ C$ 라 하면

$n(A)=15,\ n(B)=12,\ n(C)=10$, $n(A\cap B)=3,\ n(B\cap C)=2,\ n(C\cap A)=5$, $n(A\cap B\cap C)=1$

$\therefore\ n(A\cup B\cup C)$
$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$
$=15+12+10-3-2-5+1$
$=28$

29. 집합 $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \cup B = S$, $A \cap B = \{5\}$ 일 때, 함수 $f : A \rightarrow B$ 가 역함수를 가지는 함수 f 의 개수를 구하시오.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 36 개

해설

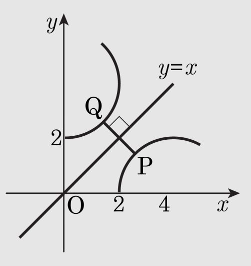
함수 $f : A \Rightarrow B$ 가 역함수를 가지므로
함수 f 는 일대일 대응이다.
$A \cup B = S$, $A \cap B = \{5\}$ 을 만족하고
함수 f 가 일대일 대응이므로
두 집합 A, B 는 각각 5 를 원소로 가지면서
$1, 2, 3, 4$ 중에서 서로 다른 두 개씩을 나누어 가진다.
예를 들어 $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ 일 때와 같이 나누는 방법의 수는 6 가지이다.
한편 6 가지 각각의 경우에 일대일 대응인 함수의 개수는 모두 6 개씩 만들 수 있으므로
구하는 함수의 개수는 $6 \times 6 = 36$

30. 함수 $f(x) = \sqrt{x-2}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자. 점 P 는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위를 움직이고, 점 Q 는 $y = g(x)$ 의 그래프 위를 움직인다. 이 때, 두 점 P, Q 사이의 거리의 최솟값을 구하면?

① $\frac{5\sqrt{2}}{4}$　② $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　③ $\frac{7\sqrt{2}}{4}$　④ $\frac{9\sqrt{2}}{4}$　⑤ $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

해설

우선, $f(x)$ 의 역함수 $g(x)$ 를 구하자.
$f(x) = \sqrt{x-2}$ 라 하면 $y^2 = x-2$
$\therefore\ x = y^2 + 2$
위 식의 x 와 y 를 바꾸면 $y = x^2 + 2$
$\therefore\ f^{-1}(x) = g(x) = x^2 + 2$
한편, 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 역함수 관계이므로
직선 $y = x$에 대칭이다.



또, P, Q 사이의 거리가 최소가 되는 것은
선분 PQ와 직선 $y = x$가 수직을 이룰 때이다.
동점 P , Q 사이의 거리의 최솟값은 점 Q 와 직선 $y = x$ 사이의 거리의 최솟값의 2 배이다. 동점 $Q(a,\ a^2+2)$ 라 놓고
직선 $y = x$ 와 점 Q 사이의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|a-(a^2+2)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{\left|-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{7}{4}\right|}{\sqrt{2}} = \frac{\left|\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\right|}{\sqrt{2}}$$

거리 d 의 최솟값은 $a = \frac{1}{2}$ 일 때

$\frac{\frac{7}{4}}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{8}$ 이므로

두 점 P, Q 사이의 거리의 최소값은

$\therefore\ \frac{7\sqrt{2}}{8} \times 2 = \frac{7\sqrt{2}}{4}$