1. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - k$ 가 $x - 2$를 인수로 가질 때, k를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$f(x)$ 가 $x - 2$를 인수로 갖는다는 것은 $f(x)$가 $x - 2$로 나누어 떨어진다는 뜻이다.
즉, $f(2) = 0$을 만족시키는 k를 구하면,
$f(2) = 2 \times 2^3 - 3 \times 2^2 + 2 - k = 0$
$\therefore\ k = 6$

2. x에 관한 삼차방정식 $x^3-3x^2+2x+4=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때 $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\alpha+\beta+\gamma=3,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2,\ \alpha\beta\gamma=-4$이므로
$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$
$=1-3+2+4=4$

3. 방정식 $x^3 - ax^2 + bx - 4 = 0$ 의 한 근이 $1 + i$ 일 때, 실수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

실수 계수의 방정식에서 $1 + i$ 가 근이면 $1 - i$ 도 근이다. 이들을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2 - 2x + 2 = 0$ 이다. 따라서 $x^3 - ax^2 + bx - 4$ 는 $x^2 - 2x + 2$ 로 나누어 떨어진다. 실제로 나누어 나머지를 구하면$(b - 2a + 2)x + (-8 + 2a)$ 이다.

$\therefore$ $b - 2a + 2 = 0$ 과 $-8 + 2a = 0$ 에서 $a = 4$, $b = 6$ 이다.

$\therefore a + b = 4 + 6 = 10$

4. 이차방정식 $x^2+mx+m+1=0$ 의 한 근은 -1과 0 사이에 있고, 다른 한 근은 1과 2 사이에 있도록 m의 값의 범위를 정하면?

① $m < -1$　② $-\frac{5}{3} < m < -1$　③ $-\frac{5}{2} < m < 1$
④ $-\frac{5}{3} < m < 0$　⑤ $-\frac{5}{2} < m < 0$

해설

$x^2+mx+m+1=f(x)$ 라 하면,

$f(-1)>0,\quad f(0)<0,\quad f(1)<0,\quad f(2)>0$

$\therefore\quad 2>0,\quad m+1<0\quad 2m+2<0,\quad 3m+5>0$

위 네 부등식을 연립하면

$\therefore\ -\frac{5}{3} < m < -1$

5. 원 $x^2 + y^2 = 1$과 직선 $ax + by + c = 0$에 대하여 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, a, b, c 는 모두 양수이고 $b \ge a$)

보기

ㄱ $c = b$이면 두 점에서 만난다.

ㄴ $c = 2b$이면 만나지 않는다.

ㄷ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$이면 한 점에서 만난다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

원의 중심이 $(0,\ 0)$이므로 원의 중심에서 직선 $ax + by + c = 0$ 에 이르는 거리를 d라 하면

$d = \dfrac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

ㄱ $d = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} < 1$ 그러므로 교점은 2개다.

즉, $n(A \cap B) = 2$

ㄴ $d = \dfrac{2b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ge \dfrac{2b}{\sqrt{2}b} > 1$ ($\because\ b \ge a$)

그러므로 교점은 없다.

ㄷ $d = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1$

그러므로 교점은 1 개다.

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 참이다.