

1. 부등식 $|2x - a| > 7$ 의 해가 $x < -1$ 또는 $x > b$ 일 때, 상수 a, b 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$|2x - a| > 7$ 에서

$2x - a < -7$ 또는 $2x - a > 7$

$\therefore x < \frac{a-7}{2}$ 또는 $x > \frac{a+7}{2}$

그런데 주어진 부등식의 해가

$x < -1$ 또는 $x > b$ 이므로

$\frac{a-7}{2} = -1, \frac{a+7}{2} = b$

$\therefore a = 5, b = 6$

$\therefore a + b = 11$

2. 부등식 $|x - 1| < 2x - 3$ 을 풀면?

- ① $x > 2$ ② $x \geq 2$ ③ $x < 3$ ④ $x \leq 3$ ⑤ $x \leq 2$

해설

(i) $x \geq 1$ 일 때 $x - 1 < 2x - 3 \therefore x > 2$

(ii) $x < 1$ 일 때 $-x + 1 < 2x - 3 \therefore x > \frac{4}{3}$ $x < 1$ 이므로 부적합

(i), (ii) 에서 $x > 2$

3. 부등식 $|x| + |x - 2| \leq 3$ 을 만족하는 x 의 최솟값을 m , 최댓값을 M 이라고 할 때, $m + M$ 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

i) $x < 0$ 일 때 $-2x + 2 \leq 3, x \geq -\frac{1}{2}$

$\therefore -\frac{1}{2} \leq x < 0$

ii) $0 \leq x < 2$ 일 때 $2 \leq 3 \therefore 0 \leq x < 2$

iii) $x \geq 2$ 일 때 $2x - 2 \leq 3, x \leq \frac{5}{2} \therefore 2 \leq x \leq \frac{5}{2}$

i) 또는 ii) 또는 iii)을 만족하는 범위를 구하면

$-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2} \therefore m + M = 2$

4. 부등식 $\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x\right| \leq 1$ 을 만족하는 자연수 x 의 개수를 구하면?

- ① 13개 ② 9개 ③ 6개 ④ 4개 ⑤ 2개

해설

$$-1 \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{3}x \leq 1$$

$$-6 \leq 3 - 2x \leq 6$$

$$-9 \leq -2x \leq 3$$

$$\therefore -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{9}{2}$$

그런데 x 는 자연수 이므로 1, 2, 3, 4이다.

5. 부등식 $|x - k| \leq 3$ 을 만족하는 x 의 값 중에서 최댓값과 최솟값의 곱이 9일 때, 양수 k 의 값은?

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $3\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$|x - k| \leq 3$ 에서 $-3 \leq x - k \leq 3$,
 $-3 + k \leq x \leq 3 + k$
따라서 x 의 최댓값은 $3 + k$,
최솟값은 $-3 + k$ 이므로
 $(-3 + k)(3 + k) = 9$
 $k^2 - 9 = 9$
 $k^2 = 18 \quad \therefore k = \pm 3\sqrt{2}$
 k 는 양수이므로 $3\sqrt{2}$

6. 이차부등식 $-4x^2 + 12x - 9 \geq 0$ 의 해는?

① $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$

② $x \leq -\frac{3}{2}, x \geq \frac{3}{2}$

③ $x \neq \frac{3}{2}$ 인 모든 실수

④ 해는 없다.

⑤ $x = \frac{3}{2}$

해설

$$\begin{aligned} & -4x^2 + 12x - 9 \geq 0 \\ \Rightarrow & 4x^2 - 12x + 9 \leq 0 \\ \Rightarrow & (2x - 3)^2 \leq 0 \\ \therefore & x = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

7. x 에 대한 부등식 $x(x+1) < a(x+1) - 1$ 의 해가 존재하지 않을 때, 실수 a 의 범위는?

① $a \leq -3$ 또는 $a \geq 1$

② $-3 \leq a \leq 1$

③ $a < -3$ 또는 $a > 1$

④ $-3 < a < 1$

⑤ $-1 \leq a \leq 3$

해설

$x(x+1) < a(x+1) - 1$ 을 전개하여 이항하면 $x^2 + (1-a)x - a + 1 < 0$
이차항의 계수가 양수이므로 판별식 $D \leq 0$ 이면 부등식의 해가 없다.

$$D = (1-a)^2 + 4(a-1) \leq 0$$

$$(a-1)(a+3) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq a \leq 1$$

8. 부등식 $ax^2 + (a+1)x + a > 0$ 을 만족하는 실수 x 가 존재하기 위한 상수 a 의 값의 범위는?

① $a > -1$

② $a > -\frac{1}{2}$

③ $a > -\frac{1}{3}$

④ $a > -\frac{1}{4}$

⑤ $a > -\frac{1}{5}$

해설

$ax^2 + (a+1)x + a > 0$ 에서

i) $a = 0$ 이면 $x > 0$

$\therefore$ 실수해가 존재한다.

ii) $a > 0$ 이면 $y = ax^2 + (a+1)x + a$ 의 그래프가 아래로 볼록한 모양이므로

$ax^2 + (a+1)x + a > 0$ 을 만족시키는 x 값이 반드시 존재한다.

iii) $a < 0$ 이면 $D = (a+1)^2 - 4a^2 > 0$

$$3a^2 - 2a - 1 < 0, (3a+1)(a-1) < 0$$

$$\therefore -\frac{1}{3} < a < 1, a < 0 \text{ 이므로 } -\frac{1}{3} < a < 0$$

i), ii), iii)에서 $a > -\frac{1}{3}$

9. x 에 관한 이차부등식 $ax^2 - 2ax - 3a \geq bx^2 - 2bx - 3b$ 에 대하여 다음 중 옳은 것은?

- ① $a < b$ 일 때, $-1 \leq x \leq 3$ 이다.
② $a < b$ 일 때, $x \leq -1$, $x \geq 3$ 이다.
③ $a < 0$ 일 때, $-1 \leq x \leq 3$ 이다.
④ $b < 0$ 일 때, $x \leq -1$, $x \geq 3$ 이다.
⑤ $a \geq b$ 일 때, 부등식은 모든 실수 x 에 대하여 성립한다.

해설

$ax^2 - 2ax - 3a \geq bx^2 - 2bx - 3b$ 을 이항하여 정리하면
 $(a - b)x^2 - 2(a - b)x - 3(a - b) \geq 0$ (이차부등식이므로 $a \neq b$)
i) $a < b$ 이면 $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1) \leq 0$
 $\therefore -1 \leq x \leq 3$
ii) $a > b$ 이면
 $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1) \geq 0$
 $\therefore x \leq -1$, $x \geq 3$

10. 부등식 $(|x| - 1)(|x| - 3) < 0$ 을 만족하는 정수 x 의 개수는?

- ① 6개 ② 5개 ③ 4개 ④ 3개 ⑤ 2개

해설

$(|x| - 1)(|x| - 3) < 0$
 $1 < |x| < 3$ 에서 구간을 나누면
(i) $x \geq 0$ 일 때, $1 < x < 3$, 정수 : 2
(ii) $x < 0$ 일 때, $1 < -x < 3$,
 $-3 < x < -1$ 정수 : -2
 $\therefore$ 정수의 개수 : 2개

11. 이차부등식 $x^2 - |x| - 6 < 0$ 의 해가 $a < x < b$ 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

① 5

② 10

③ 13

④ 16

⑤ 18

해설

$x \geq 0$ 일 때

$$x^2 - x - 6 < 0 \text{에서 } (x+2)(x-3) < 0$$

$$-2 < x < 3 \quad \therefore 0 \leq x < 3$$

$x < 0$ 일 때

$$x^2 + x - 6 < 0 \text{에서 } (x+3)(x-2) < 0$$

$$-3 < x < 2 \quad \therefore -3 < x < 0$$

$$\therefore -3 < x < 3 \text{이므로 } a = -3, b = 3$$

$$\text{따라서 } a^2 + b^2 = 9 + 9 = 18$$

12. 부등식 $3[x]^2 + [x] - 10 \leq 0$ 의 해는? (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대의 정수)

① $-3 \leq x < 1$

② $-3 \leq x < 2$

③ $-2 \leq x < 1$

④ $-2 \leq x < 2$

⑤ $-2 \leq x < 3$

해설

$3[x]^2 + [x] - 10 \leq 0$ 이므로

$$([x] + 2)(3[x] - 5) \leq 0$$

$$-2 \leq [x] \leq \frac{5}{3}$$

$[x]$ 는 정수이므로

$$-2 \leq [x] \leq 1$$

$$\therefore -2 \leq x < 2$$

13. 부등식 $[x]^2 \geq [x+2]$ 를 풀면? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $x \leq 0$ 또는 $x \geq 1$

② $x \leq 0$ 또는 $x > 2$

③ $x < 0$ 또는 $x \geq 2$

④ $x < 0$ 또는 $x \geq 1$

⑤ $x < 1$ 또는 $x \geq 3$

해설

$$\begin{aligned} [x]^2 &\geq [x+2] \text{ 에서 } [x]^2 \geq [x] + 2 \\ [x]^2 - [x] - 2 &\geq 0, ([x] - 2)([x] + 1) \geq 0 \\ \therefore [x] &\leq -1 \text{ 또는 } [x] \geq 2 \\ \therefore x &< 0 \text{ 또는 } x \geq 2 \end{aligned}$$

14. 이차부등식 $(x+1)^2 \leq k(x^2-x+1)$ 이 모든 실수 x 에 대하여 항상 성립할 때, 실수 k 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$(x+1)^2 \leq k(x^2-x+1)$
 $(k-1)x^2 - (k+2)x + k-1 \geq 0$
모든 x 에 대해 성립하려면,
 $k-1 > 0$, 판별식이 0보다 작거나 같다
 $D = (k+2)^2 - 4(k-1)(k-1) \leq 0$ 에서
 $\{(k+2) - 2(k-1)\}\{(k+2) + 2(k-1)\}$
 $= (-k+4)k \leq 0$
 $\therefore k(k-4) \geq 0, \quad k \leq 0 \text{ 또는 } k \geq 4$
 $\therefore k \geq 4 (\because k > 1) \quad \therefore \text{최솟값} : 4$

15. 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + px + p$ 가 -3 보다 항상 크기 위한 정수 p 의 최댓값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$x^2 + px + p > -3$$

$$x^2 + px + (p + 3) > 0$$

$$D = p^2 - 4(p + 3) = p^2 - 4p - 12 < 0$$

$$(p - 6)(p + 2) < 0$$

$$-2 < p < 6$$

$$\therefore \text{최대정수 : 5}$$

16. 모든 실수 x 에 대해 이차부등식 $x^2 - x(kx - 3) + 3 > 0$ 이 항상 성립하기 위한 정수 k 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

주어진 부등식을 정리하면

$$(1 - k)x^2 + 3x + 3 > 0$$

$$D = 3^2 - 4 \times (1 - k) \times 3 < 0$$

$$\therefore k < \frac{3}{12} = 0.25$$

최대 정수 $k = 0$

17. 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 - 2mx - m \geq 0$ 을 만족하는 실수 m 의 범위는 $a \leq m \leq b$ 이다. $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = -1$

해설

$$x^2 - 2mx - m \geq 0 \text{ 이}$$

항상 성립하려면 판별식 $D \leq 0$

$$\frac{D}{4} = m^2 + m \leq 0$$

$$m(m + 1) \leq 0, -1 \leq m \leq 0$$

$$\therefore a + b = (-1) + 0 = -1$$

18. 이차부등식 $3x^2 - 2ax + a \geq 0$ 이 x 의 모든 실수 값에 대하여 성립할 때, a 의 값의 범위를 구하면?

① $0 < x < 1$

② $0 \leq a \leq 2$

③ $0 \leq a \leq 3$

④ $1 < a < 3$

⑤ $2 \leq a \leq 3$

해설

항상 성립하려면
판별식이 0보다 작거나 같아야한다.

$$D' = a^2 - 3a \leq 0$$

$$a(a - 3) \leq 0$$

$$0 \leq a \leq 3$$

19. 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 2(a-5)x + 2(3a-19)$ 가 양수가 되기 위한 a 의 정수값은 얼마인가?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

$x^2 + 2(a-5)x + 2(3a-19)$ 가 양수가 되려면

판별식이 $D < 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (a-5)^2 - 2(3a-19) < 0$$

$$a^2 - 10a + 25 - 6a + 38 < 0, a^2 - 16a + 63 < 0$$

$$(a-9)(a-7) < 0$$

$$\therefore 7 < a < 9$$

따라서 정수 a 의 값은 8 이다.

20. 모든 실수 x 에 대하여 다항식 $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3$ 의 값이 항상 2보다 크도록 하는 상수 m 의 범위가 $a < m < b$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3 > 2$
 $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 1 > 0$ 이므로
 $m \neq -1$, $m > -1$ 이고, $D < 0$ 이다.
 $\frac{D}{4} = m^2 - 3m < 0 \quad \therefore 0 < m < 3$
 $\therefore a = 0, b = 3$
 $\therefore a + b = 3$

21. 이차부등식 $ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$ 일 때, 이차부등식 $cx^2 - bx + a > 0$ 의 해는?(단, $\alpha > 0$ 이다.)

- ① $-\frac{1}{\alpha} < x < -\frac{1}{\beta}$ ② $-\beta < x < -\alpha$
③ $\frac{1}{\beta} < x < \frac{1}{\alpha}$ ④ $x > \frac{1}{\alpha}, x < \frac{1}{\beta}$
⑤ $x > -\frac{1}{\beta}, x < -\frac{1}{\alpha}$

해설

$ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$ 이므로

$$a < 0, \alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$$cx^2 - bx + a > 0$$

에서 $a < 0$ 이므로 양변을 a 로 나누면

$$\frac{c}{a}x^2 - \frac{b}{a}x + 1 < 0$$

$$\therefore \alpha\beta x^2 + (\alpha + \beta)x + 1 < 0$$

$$\therefore (\alpha x + 1)(\beta x + 1) < 0 \text{이고}$$

$$0 < \alpha < \beta \text{에서 } \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta} \text{이므로}$$

$$-\frac{1}{\alpha} < -\frac{1}{\beta}$$

$$\therefore -\frac{1}{\alpha} < x < -\frac{1}{\beta}$$

22. 부등식 $ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $-1 - \sqrt{5} < x < -1 + \sqrt{5}$ 일 때 부등식 $cx^2 - 2bx - a < 0$ 의 해는?

- ① $1 < x < 2$ ② $2 < x < 4$ ③ $3 < x < 5$
④ 모든 실수 ⑤ 해는 없다

해설

$ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가
 $-1 - \sqrt{5} < x < -1 + \sqrt{5}$ 이므로 $a < 0$
해가 $-1 - \sqrt{5} < x < -1 + \sqrt{5}$ 이고 이차항의 계수가 1인 부등식은
 $\{x - (-1 - \sqrt{5})\} \{x - (-1 + \sqrt{5})\} < 0$
 $x^2 + 2x - 4 < 0$
양변에 a 를 곱하면 $ax^2 + 2ax - 4a > 0$
 $\therefore b = 2a, c = -4a \cdots (가)$
(가)를 $cx^2 - 2bx - a < 0$ 에 대입하면
 $-4ax^2 - 4ax - a < 0$
 $4x^2 + 4x + 1 < 0, (2x + 1)^2 < 0$
 $\therefore$ 해는 없다.

23. 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근의 합이 3일 때, 방정식 $f(2x + 1) = 0$ 의 두 근의 합을 구하면?

- ① $\frac{1}{2}$ ② 2 ③ $\frac{1}{3}$ ④ 3 ⑤ $\frac{1}{4}$

해설

이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근을

α, β 라 하면, $\alpha + \beta = 3$

한편, $f(2x + 1) = 0$ 에서

$2x + 1 = \alpha, 2x + 1 = \beta$ 이므로

$$x = \frac{\alpha - 1}{2}, \frac{\beta - 1}{2}$$

따라서, $\frac{\alpha - 1}{2} + \frac{\beta - 1}{2}$

$$= \frac{\alpha + \beta - 2}{2} = \frac{3 - 2}{2} = \frac{1}{2}$$

해설

$f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면, $\alpha + \beta = 3$

$f(x) = k(x - \alpha)(x - \beta)$ 라 하면

$f(2x + 1) = k(2x + 1 - \alpha)(2x + 1 - \beta)$

$\therefore f(2x + 1) = 0$ 의 두 근은 $x = \frac{\alpha - 1}{2}, \frac{\beta - 1}{2}$

$$\therefore \frac{\alpha - 1}{2} + \frac{\beta - 1}{2} = \frac{\alpha + \beta - 2}{2} = \frac{3 - 2}{2} = \frac{1}{2}$$

24. 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근의 합이 2일 때, 방정식 $f(2x-3) = 0$ 의 두 근의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 $\alpha + \beta = 2$

$f(2x-3) = 0$ 에서 $2x-3 = \alpha, 2x-3 = \beta$

$\therefore x = \frac{\alpha+3}{2}, \frac{\beta+3}{2}$

$\therefore$ 두 근의 합은 $\frac{(\alpha+\beta)+6}{2} = 4$

25. 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근의 합이 10 일 때, 방정식 $f(4x - 3) = 0$ 의 두 근의 합은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 $\alpha + \beta = 10$

$f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ 로 놓으면

$f(4x - 3) = a(4x - 3 - \alpha)(4x - 3 - \beta) = 0$

$x = \frac{3 + \alpha}{4}, \frac{3 + \beta}{4}$

$\therefore$ 두 근의 합은 $\frac{6 + \alpha + \beta}{4} = 4$

26. a 가 실수일 때 두 이차방정식 $x^2 + ax + a = 0$, $x^2 - 2ax + 2a + 3 = 0$ 에서 한 방정식만이 허근을 가질 a 의 범위는 ?

- ① $-1 < a < 4$
- ② $-1 < a < 0$ 또는 $3 < a < 4$
- ③ $-1 \leq a \leq 4$
- ④ $-1 < a \leq 0$ 또는 $3 \leq a < 4$
- ⑤ $3 \leq x \leq 4$

해설

$$x^2 + ax + a = 0 \quad \cdots \textcircled{A}$$

$$x^2 - 2ax + 2a + 3 = 0 \quad \cdots \textcircled{B}$$

①에서 허근을 가지려면

$$D = a^2 - 4a < 0$$

$$\therefore 0 < a < 4$$

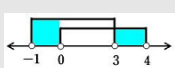
②에서 허근을 가지려면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 2a - 3 < 0$$

$$(a + 1)(a - 3) < 0$$

$$\therefore -1 < a < 3$$

한쪽만이 허근을 가지려면,



$$\therefore -1 < a \leq 0 \text{ 또는 } 3 \leq a < 4$$

27. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2kx - 2k + 3 = 0$ 이 두 실근을 가지도록 실수 k 의 값의 범위를 정하면?

① $k \leq -3$ 또는 $k \geq 1$

② $-3 \leq k \leq 1$

③ $k = -3$ 또는 $k = 1$

④ $k < -3$ 또는 $k > 1$

⑤ $-3 < k < 1$

해설

두 실근을 갖는다는 것은

서로 다른 두 실근 또는 중근을 갖는다는 것이므로

$$D' = k^2 - (-2k + 3) \geq 0$$

$$k^2 + 2k - 3 \geq 0$$

$$(k + 3)(k - 1) \geq 0$$

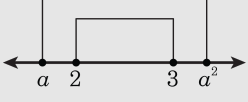
$$\therefore k \leq -3 \text{ 또는 } k \geq 1$$

28. 구간 $[2, 3]$ 에 속하는 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 - a(a+1)x + a^3 \leq 0$ 을 만족하는 실수 a 의 최솟값과 최댓값의 곱은?(단, $a > 1$)

- ① 2 ② $2\sqrt{3}$ ③ 3 ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} [2, 3] &\Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3 \\ x^2 - a(a+1)x + a^3 &\leq 0 \\ (x-a)(x-a^2) &\leq 0 \\ a < x < a^2 (\because a > 1) \quad &a \leq 2, a^2 \geq 3 \\ \therefore a \text{의 최댓값} &: 2 \\ a \text{의 최솟값} &: \sqrt{3} \rightarrow \therefore 2\sqrt{3} \end{aligned}$$



29. 양의 실수 a 에 대하여 부등식 $-3 < x + 1 < 6$ 의 모든 해가 부등식 $|x - 2| < a$ 를 만족할 때, a 값의 범위는?

① $0 < a \leq 3$

② $0 < a < 3$

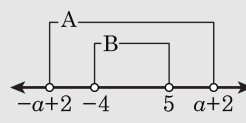
③ $0 \leq a \leq 3$

④ $a \geq 3$

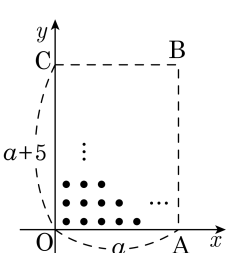
⑤ $a \geq 6$

해설

$\therefore a \geq 6$



30. 다음 그림과 같이 원점을 모서리로 하고, $\overline{OA} = a$, $\overline{OC} = a + 5$ 인 직사각형 OABC 가 있다. 직사각형 OABC 내부의 격자점의 수가 50 개 이하가 되도록 할 때, a 의 최댓값은? (단, $a > 0$ 이고, 격자점은 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점이다.)



- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$$\begin{aligned} (a - 1)(a + 4) &\leq 50 \\ a^2 + 3a - 54 &= (a + 9)(a - 6) \leq 0 \\ \therefore 0 < a &\leq 6 \end{aligned}$$

31. 두 대의 승용차 A, B 가 같은 거리를 가는데 A 는 거리의 반은 시속 $v\text{km}$ 로 달리고, 나머지 거리는 시속 $u\text{km}$ 로 달린다고 한다, 또한 B 는 소요된 시간의 반은 시속 $u\text{km}$ 로 달리고 나머지 소요된 시간은 $v\text{km}$ 로 달린다고 한다. 승용차 A, B 의 평균 속력이 각각 $x\text{km/시}, y\text{km/시}$ 일 때, x 와 y 의 대소 관계를 바르게 나타내 것은?

- ① $x \leq y$ ② $x \geq y$ ③ $x = y$ ④ $x < y$ ⑤ $x > y$

해설

승용차 A 가 달린 거리를 s ,

$$\text{시간을 } t \text{라 하면 } t = \frac{s}{2u} + \frac{s}{2v}$$

평균 속력은

$$\frac{s}{t} = \frac{s}{\frac{s}{2u} + \frac{s}{2v}} = \frac{s}{\frac{su + sv}{2uv}} = \frac{2uv}{u + v} = x$$

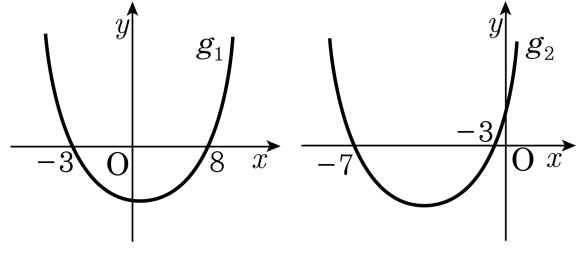
$$\text{승용차 } B \text{의 평균 속력은 } \frac{1}{2}(u + v) = y$$

$$y - x = \frac{1}{2}(u + v) - \frac{2uv}{u + v}$$

$$= \frac{(u + v)^2 - 4uv}{2(u + v)} \geq 0$$

따라서 $y - x \geq 0$ 이므로 $x \leq y$ 이다.

32. 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 를 갑은 일차항의 계수를 잘못 보고 그래프 g_1 을, 을은 상수항을 잘못 보고 그래프 g_2 를 그렸다. 이 때, $x^2 + ax + b < 0$ 을 만족하는 정수 x 의 개수를 구하여라.



▶ 답 : 개

▷ 정답 : 13 개

해설

갑은 상수항을 바르게 보았으므로
 g_1 의 상수항 $b = -24$ ($\because$ 두 근의 곱)
을은 일차항의 계수를 바르게 보았으므로
 g_2 의 일차항 $a = 10$
($\because$ 대칭축의 방정식은 $x = -\frac{a}{2} = -5$)
이 때, $x^2 + ax + b < 0$ 에 a, b 를 대입하면
 $x^2 + 10x - 24 < 0, (x + 12)(x - 2) < 0$
 $\therefore -12 < x < 2$
따라서 만족하는 정수는 13 (개)

33. 부등식 $ax^2 - 2ax + 1 \leq 0$ 이 단 하나의 해를 갖도록 하는 실수 a 의 값을 구하여라.

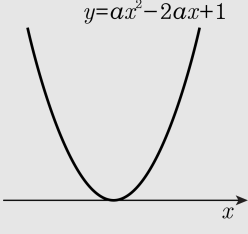
▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

주어진 부등식이 단 하나의 해를 가지려면

$y = ax^2 - 2ax + 1$ 의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



(i) 그래프가 아래로 볼록이므로 $a > 0$

(ii) $ax^2 - 2ax + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - a = 0 \text{ 에서 } a = 0 \text{ 또는 } a = 1$$

(i), (ii)에서 $a = 1$

34. 좌표 평면 위에서 모든 실수 x 에 대하여 직선 $y = 2(kx + 1)$ 이 곡선 $y = -(x - 2)^2 + 1$ 보다 항상 위쪽에 있도록 실수 k 의 값을 정할 때, 다음 중 k 의 값의 범위에 속하지 않는 것은?

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 0
- ⑤ -1

해설

임의의 실수 x 에 대하여 부등식
 $2(kx + 1) > -(x - 2)^2 + 1 \cdots \textcircled{1}$ 이
항상 성립하도록 k 의 값을 정하면 된다.
 $\textcircled{1}$ 식을 정리하면
 $x^2 + 2(k - 2)x + 5 > 0 \cdots \textcircled{2}$ 식이
항상 성립하기 위하여
 $\frac{D}{4} = (k - 2)^2 - 5 < 0$
 $\Rightarrow k^2 - 4k - 1 < 0$
 $\therefore 2 - \sqrt{5} < k < 2 + \sqrt{5}$
이때, 0, 1, 2, 3 은 k 의 값의 범위에 속하나
-1 은 속하지 않는다.

35. 다음과 같은 포물선과 직선이 있다.

$$y = x^2 + (m - 1)x + m^2 + 1$$
$$y = x + 1$$

포

물선이 직선보다 항상 위쪽에 존재하도록 m 의 범위를 정하면?

- ① $m < -2, \ m > \frac{2}{3}$

② $m < -1, \ m > \frac{2}{3}$
- ③ $m < -2, \ m > 2$

④ $m < 2, \ m > \frac{2}{3}$
- ⑤ $m < -5, \ m > \frac{2}{3}$

해설

$x^2 + (m - 1)x + m^2 + 1 > x + 1$ 을
항상 만족시키도록 m 을 정하면 된다.
 $x^2 + (m - 2)x + m^2 > 0$ 에서 판별식
 $D = (m - 2)^2 - 4m^2 < 0,$
 $(m - 2 + 2m)(m - 2 - 2m) < 0$
 $(3m - 2)(m + 2) > 0$
 $\therefore \ m < -2, \ m > \frac{2}{3}$

36. $-2 \leq x \leq 2$ 일 때, x 에 대한 부등식 $x^2 - 6x \geq a^2 - 6a$ 가 항상 성립하기 위한 a 의 값의 범위는?

① $-4 \leq a \leq 0$

② $-2 \leq a \leq 2$

③ $0 \leq a \leq 4$

④ $2 \leq a \leq 4$

⑤ $4 \leq a \leq 6$

해설

$f(x) = x^2 - 6x - a^2 + 6a$ 라 놓고

$-2 \leq x \leq 2$ 에서

$f(x) > 0$ 일 때, a 의 값의 범위를 구한다.

$f(x) = (x-3)^2 - a^2 + 6a - 9$ 이므로

$-2 \leq x \leq 2$ 에서 $f(x)$ 의 최솟값은 $x = 2$ 일 때,

$f(2) = 4 - 12 - a^2 + 6a \geq 0$

$a^2 - 6a + 8 \leq 0 \Rightarrow (a-2)(a-4) \leq 0$

$\therefore 2 \leq a \leq 4$

37. $0 < x < 1$ 인 모든 x 에 대하여 항상 $x^2 - 3 \leq (a - 1)x$ 가 성립할 때, 실수의 상수 a 의 범위를 구하면?

① $a = -1$

② $a > -1$

③ $a \geq -1$

④ $a < -1$

⑤ $a \leq -1$

해설

$f(x) = x^2 - (a - 1)x - 3$ 이라 두어,
 $0 < x < 1$ 에서 $f(x) \leq 0$ 되도록 하자.
 $f(0) \leq 0$ 그리고 $f(1) \leq 0$ 이면 된다.
그런데, $f(0) = -3$ 이므로
 $f(1) = 1 - (a - 1) - 3 \leq 0$ 에서 $a \geq -1$

38. 부등식 $x^2 + ax + a + 3 \leq 0$ 를 만족하는 x 가 오직 1개이기 위한 양수 a 가 존재하는 구간은?

① $1 < a < 3$

② $2 < a < 5$

③ $3 < a < 6$

④ $4 < a < 7$

⑤ $6 < a < 7$

해설

$x^2 + ax + a + 3 \leq 0$ 의 해가

1개 존재하기 위해서는

$x^2 + ax + a + 3 = 0$ 이 중근을 가져야 한다.

$$\therefore D = a^2 - 4(a + 3)$$

$$= a^2 - 4a - 12$$

$$= (a - 6)(a + 2) = 0$$

$$\therefore a = 6 \quad (\because a > 0)$$

39. 부등식 $|x^2 - 1| + 3x < 3$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$ 일 때, 상수 $\alpha + \beta$ 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

절댓값 기호 안을 0으로 하는 x 의 값을 경계로 하여 구간을 나누어 본다.

(i) $x^2 - 1 \geq 0$,

즉 $x \leq -1$ 또는 $x \geq 1$ 일 때,

$|x^2 - 1| = x^2 - 1$ 이므로 주어진 부등식은

$x^2 - 1 + 3x < 3$, $x^2 + 3x - 4 < 0$

$(x + 4)(x - 1) < 0$

$\therefore -4 < x < 1$

이 때 조건에서 $x \leq -1$ 또는 $x \geq 1$ 이므로

이를 만족하는 x 값의 범위는 $-4 \leq x \leq -1$

(ii) $x^2 - 1 < 0$,

즉 $-1 < x < 1$ 일 때,

$|x^2 - 1| = -x^2 + 1$ 이므로 주어진 부등식은

$-x^2 + 1 + 3x < 3$, $x^2 - 3x + 2 > 0$

$(x - 1)(x - 2) > 0$

$\therefore x < 1$ 또는 $x > 2$

이 때 조건에서 $-1 < x < 1$ 이므로

이를 만족하는 x 의 값의 범위는 $-1 < x < 1$

(i), (ii)로부터 주어진 부등식의 해는 $-4 < x < 1$

따라서 $\alpha = -4$, $\beta = 1$, $\alpha + \beta = -3$

40. $6[x]^2 - 31[x - 1] - 13 < 0$ 을 풀면? (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대의 정수)

① $-3 \leq x < 3$

② $-2 \leq x < 5$

③ $0 \leq x < 3$

④ $1 \leq x < 5$

⑤ $1 \leq x < 6$

해설

$n \leq [x] < n + 1$ 에서
 $n - 1 < [x - 1] < n$ 이므로
 $[x - 1] = [x] - 1$
 $\therefore 6[x]^2 - 31[x - 1] - 13$
 $= 6[x]^2 - 31([x] - 1) - 13$
 $= 6[x]^2 - 31[x] + 18 < 0$
 $\therefore (2[x] - 9)(3[x] - 2) < 0$
 $\frac{2}{3} < [x] < \frac{9}{2}$
 $\therefore 1 \leq [x] \leq 4$ 이므로
 $[x] = 1, 2, 3, 4$
 $\therefore 1 \leq x < 5$

41. 임의의 실수 x, y 에 대하여 $x^2 + y^2 + 2xy + 2x + ay + b > 0$ 이 성립할 a, b 의 조건은? (단, a, b 는 실수)

- ① $a = 1, b > 2$ ② $a = 1, b < 2$ ③ $a = 2, b > 1$
④ $a = 2, b \geq 1$ ⑤ $a = 2, b \leq 1$

해설

준식을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면
 $x^2 + 2(1+y)x + y^2 + ay + b > 0$ 이고
임의의 실수 x 에 대하여 항상 성립하기 위해서는
 $D/4 < 0$ 를 만족해야 한다.
 $D/4 = (1+y)^2 - (y^2 + ay + b) < 0$
 $\therefore (2-a)y + 1 - b < 0 \cdots \textcircled{1}$
①식이 모든 실수 y 에 성립할 조건은
 $(2-a) = 0, 1 - b < 0,$
 $\therefore a = 2, b > 1$

42. 부등식 $5 - x > 2|x + 1|$ 의 해와 $ax^2 + bx + 7 > 0$ 의 해가 같도록 상수 a, b 의 값을 정할 때, $a + b$ 의 값은 ?

① -7 ② -5 ③ 5 ④ 7 ⑤ 0

해설

$5 - x > 2|x + 1|$ 을 풀면
(i) $x \geq -1$ 일 때
 $5 - x > 2x + 2, x < 1 \quad \therefore -1 \leq x < 1$
(ii) $x < -1$ 일 때
 $5 - x > -2x - 2, x > -7 \quad \therefore -7 < x < -1$
(i), (ii)에 따라 $-7 < x < 1$
 $ax^2 + bx + 7 > 0 \Leftrightarrow -7 < x < 1$ 이므로 $a < 0$ 이고
 $ax^2 + bx + 7 = a(x + 7)(x - 1)$
계수를 비교하면
 $a = -1, b = -6 \quad \therefore a + b = -7$

43. 두 이차방정식 $x^2 + 2ax + a + 2 = 0, x^2 + (a - 1)x + a^2 = 0$ 중 적어도 하나가 실근을 갖기 위한 상수 a 의 값의 범위는?

- ① $a < \frac{1}{2}, 2 < a$ ② $a \leq 1, 3 \leq a$ ③ $a \leq \frac{1}{2}, 3 < a$
④ $a \leq \frac{1}{2}, 2 < a$ ⑤ $a \leq \frac{1}{3}, a \geq 2$

해설

각각 실근을 가질 조건은 차례로

$$\frac{D_1}{4} = a^2 - (a + 2) \geq 0 \text{에서}$$

$$(a - 2)(a + 1) \geq 0, a \leq -1, a \geq 2 \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{또, } D_2 = (a - 1)^2 - 4a^2 \geq 0 \text{에서}$$

$$(3a - 1)(a + 1) \leq 0, -1 \leq a \leq \frac{1}{3} \cdots \textcircled{2}$$

따라서, 적어도 하나가 실근을 갖기 위한

a 의 범위는 ① 또는 ②이므로

$$a \leq \frac{1}{3}, a \geq 2$$

44. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 실근을 α, β ($\alpha < \beta$)라 하고, 부등식 $ax^2 + bx + c \geq 0$ 의 모든 해가 $\sqrt{2} \leq x < 3$ 의 범위 안에 있을 때, <보기> 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\alpha + \beta > 2\sqrt{2}$

㉡ $ac > 0$

㉢ $4a + c < 2b$

① ㉠

② ㉡

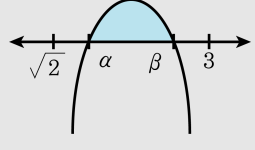
③ ㉠, ㉡

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉡, ㉢

해설

주어진 조건이 성립하려면 다음 그림과 같이 $a < 0$, $\sqrt{2} \leq \alpha < \beta < 3$ 을 만족하여야 한다.



㉠ $\sqrt{2} \leq \alpha < \beta$ 에서 $\alpha + \beta > 2\sqrt{2}$

㉡ $\alpha\beta = \frac{c}{a} > 0$ 이므로 $ac > 0$ 이다.

㉢ $f(-2) = 4a - 2b + c < 0$ 에서 $4a + c < 2b$

45. 어느 회사가 판매하고 있는 상품의 1개당 판매 가격을 작년보다 $x\%$ 올리면 이 상품의 판매량이 작년보다 $\frac{x}{2}\%$ 감소한다고 한다. 이 회사가 올해 판매 금액의 10% 를 상여금으로 지급할 때, 올해 판매 금액에서 상여금을 제외한 금액이 작년 판매 금액보다 크거나 같게 되기 위한 x 의 최댓값은?

- ① 60 ② $\frac{200}{3}$ ③ $\frac{230}{3}$ ④ 80 ⑤ 90

해설

이 회사가 판매하는 상품의 작년 1개당 판매 가격을 a , 판매량을 b 라 하자.
올해 판매 가격을 $x\%$ 올리면
올해 판매 가격은 $a\left(1 + \frac{x}{100}\right)$,
판매량은 $b\left(1 - \frac{x}{200}\right)$ 이므로
올해 판매 금액에서 상여금을 제외한 금액은
 $a\left(1 + \frac{x}{100}\right) \times b\left(1 - \frac{x}{200}\right) \times \frac{9}{10}$
작년 판매 금액이 ab 이므로
 $a\left(1 + \frac{x}{100}\right) \times b\left(1 - \frac{x}{200}\right) \times \frac{9}{10} \geq ab$
이 부등식을 정리하면
 $9x^2 - 900x + 20000 \leq 0$
 $(3x - 100)(3x - 200) \leq 0$
 $\therefore \frac{100}{3} \leq x \leq \frac{200}{3}$

46. 좌표평면 위에서 모든 실수 x 에 대하여 직선 $y = 2(kx + 1)$ 이 곡선 $y = -(x - 2)^2 + 1$ 보다 항상 위쪽에 있도록 실수 k 의 값을 정할 때, 다음 중 k 의 값의 범위에 속하지 않는 것은?

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 0
- ⑤ -1

해설

임의의 실수 x 에 대하여
부등식 $2(kx + 1) > -(x - 2)^2 + 1 \cdots \textcircled{1}$
이 항상 성립하도록 k 의 값을 정하면 된다.
 $\textcircled{1}$ 식을 정리하면
 $x^2 + 2(k - 2)x + 5 > 0$
 $\textcircled{1}$ 식이 항상 성립하기 위하여
 $\frac{D}{4} = (k - 2)^2 - 5 < 0$
 $\Rightarrow k^2 - 4k - 1 < 0$
 $\therefore 2 - \sqrt{5} < k < 2 + \sqrt{5}$
이 때, 0, 1, 2, 3 은 k 의 값의 범위에 속하나
-1 은 속하지 않는다.

47. $-1 \leq x \leq 1$ 에서 x 에 대한 부등식 $x+a \leq x^2 \leq 2x+b$ 가 항상 성립할 때, $b-a$ 의 최솟값을 p 라 하자. 이 때, $100p$ 의 값은?

① 275 ② 310 ③ 325 ④ 330 ⑤ 335

해설

$$x+a \leq x^2 \leq 2x+b \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x \geq a \\ x^2-2x \leq b \end{cases}$$

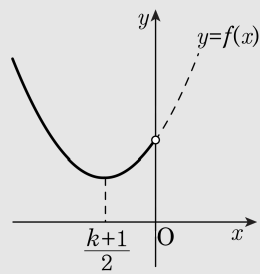
(i) $f(x) = x^2 - x$ 라 하면

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$-1 \leq x \leq 1$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는

아래 그림과 같으므로 $-\frac{1}{4} \leq f(x) \leq 2$

즉, $-\frac{1}{4} \leq x^2 - x \leq 2$ 이므로 $a \leq -\frac{1}{4}$



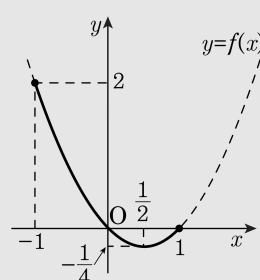
(ii) $g(x) = x^2 - 2x$ 라 하면

$$g(x) = (x-1)^2 - 1$$

$-1 \leq x \leq 1$ 에서 $y = g(x)$ 의 그래프는

아래 그림과 같으므로 $-1 \leq g(x) \leq 3$

즉, $-1 \leq x^2 - 2x \leq 3$ 이므로 $b \geq 3$



(i), (ii) 에서 $b-a$ 의 최솟값 p 는

$$p = 3 - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{13}{4}$$

$\therefore 100p = 325$

48. $[x] = 1$, $[y] = 2$, $[z] = -1$ 일 때 $[x + 2y - z]$ 의 최대값과 최소값의 합은?
(단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대의 정수이다.)

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

해설

$[x] = 1$, $[y] = 2$, $[z] = -1$ 에서
 $1 \leq x < 2$, $2 \leq y < 3$, $-1 \leq z < 0$
 $1 \leq x < 2$
 $4 \leq 2y < 6$
 $+ \quad 0 < -z \leq 1$
 $5 < x + 2y - z < 9$
 $\therefore [x + 2y - z] = 5, 6, 7, 8$
최대값과 최소값의 합은 $5 + 8 = 13$

49. 이차방정식 $x^2 + 2ax + b = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, 이차부등식 $(4a + b + 4)x^2 + 2(a + 2)x + 1 < 0$ 을 풀면? (단, $\alpha > \beta > 2$)

① $\frac{1}{\beta - 2} < x < \frac{1}{\alpha - 2}$

② $\frac{1}{\alpha - 2} < x < \frac{1}{\beta - 2}$

③ $x < \alpha - 2, x > \beta - 2$

④ $x < \beta - 2, x > \alpha - 2$

⑤ $\beta - 2 < x < \alpha - 2$

해설

근과 계수와의 관계로부터 $\alpha + \beta = -2a$, $\alpha\beta = b$ 이므로

$$4a + b + 4 = -2(\alpha + \beta) + \alpha\beta + 4 = (\alpha - 2)(\beta - 2),$$

$$2(a + 2) = 2a + 4 = -(\alpha + \beta) + 4 = -(\alpha + \beta - 4)$$

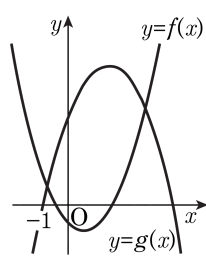
따라서, 주어진 이차부등식은

$$(\alpha - 2)(\beta - 2)x^2 - (\alpha + \beta - 4)x + 1 < 0$$

$$\therefore \{(\alpha - 2)x - 1\}\{(\beta - 2)x - 1\} < 0$$

$$\alpha > \beta > 2 \text{이므로 } \frac{1}{\alpha - 2} < x < \frac{1}{\beta - 2}$$

50. 이차항의 계수가 각각 1, -1 인 두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프는 다음의 그림과 같다. 부등식 $f(x) - g(x) \leq 0$ 의 해가 $-1 \leq x \leq 3$ 이고 $f(2) = 1$ 일 때, $g(1)$ 의 값은?



- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$y = f(x)$ 의 y 절편이 -1 이므로 $f(x) = x^2 + ax - 1$ 로 놓을 수 있다.

$$f(2) = 2a + 3 = 1 \text{ 에서 } a = -1$$

$$\therefore f(x) = x^2 - x - 1$$

$g(x) = -x^2 + bx + c$ 로 놓으면 $f(x) - g(x) \leq 0$ 의 해가 $-1 \leq x \leq 3$ 이므로

$$f(x) - g(x) = 2x^2 - (1+b)x - 1 - c = 2(x+1)(x-3) = 2x^2 - 4x - 6$$

따라서, $1+b=4$, $-1-c=-6$ 에서

$$b=3, c=5$$

$$\therefore g(x) = -x^2 + 3x + 5$$

$$\therefore g(1) = 7$$