1. 부등식 $|2x-a|>7$의 해가 $x<-1$ 또는 $x>b$일 때, 상수 a, b의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$|2x-a|>7$에서

$2x-a<-7$ 또는 $2x-a>7$

$\therefore x<\dfrac{a-7}{2}$ 또는 $x>\dfrac{a+7}{2}$

그런데 주어진 부등식의 해가

$x<-1$ 또는 $x>b$이므로

$\dfrac{a-7}{2}=-1$, $\dfrac{a+7}{2}=b$

$\therefore a=5$, $b=6$

$\therefore a+b=11$

2. 부등식 $|x-1|<2x-3$ 을 풀면?

① $x>2$ ② $x \geq 2$ ③ $x<3$ ④ $x \leq 3$ ⑤ $x \leq 2$

해설

(i) $x \geq 1$일 때 $x-1<2x-3$ $\therefore x>2$

(ii) $x<1$일 때 $-x+1<2x-3$ $\therefore x>\frac{4}{3}$ $x<1$이므로 부적합

(i), (ii)에서 $x>2$

3. 부등식 $|x|+|x-2| \leq 3$을 만족하는 x의 최솟값을 m, 최댓값을 M이라고 할 때, $m+M$의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

ⅰ) $x<0$일 때 $-2x+2 \leq 3$, $x \geq -\frac{1}{2}$

$\therefore -\frac{1}{2} \leq x < 0$

ⅱ) $0 \leq x < 2$일 때 $2 \leq 3$ $\therefore 0 \leq x < 2$

ⅲ) $x \geq 2$일 때 $2x-2 \leq 3$, $x \leq \frac{5}{2}$ $\therefore 2 \leq x \leq \frac{5}{2}$

ⅰ) 또는 ⅱ) 또는 ⅲ)을 만족하는 범위를 구하면

$-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$ $\therefore m+M=2$

4. 부등식 $\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{3}x\right| \le 1$을 만족하는 자연수 x의 개수를 구하면?

① 13개 ② 9개 ③ 6개 ④ 4개 ⑤ 2개

해설

$$-1 \le \frac{1}{2}-\frac{1}{3}x \le 1$$

$$-6 \le 3-2x \le 6$$

$$-9 \le -2x \le 3$$

$$\therefore -\frac{3}{2} \le x \le \frac{9}{2}$$

그런데 x는 자연수 이므로 1, 2, 3, 4이다.

5. 부등식 $|x-k| \leq 3$을 만족하는 x의 값 중에서 최댓값과 최솟값의 곱이 9일 때, 양수 k의 값은?

① $\sqrt{2}$　　② 2　　③ $3\sqrt{2}$　　④ 4　　⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$|x-k| \leq 3$에서 $-3 \leq x-k \leq 3$,

$-3+k \leq x \leq 3+k$

따라서 x의 최댓값은 $3+k$,

최솟값은 $-3+k$이므로

$(-3+k)(3+k)=9$

$k^2-9=9$

$k^2=18 \quad \therefore k=\pm 3\sqrt{2}$

k는 양수이므로 $3\sqrt{2}$

6. 이차부등식 $-4x^2 + 12x - 9 \geq 0$의 해는?

① $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$

② $x \leq -\frac{3}{2},\ x \geq \frac{3}{2}$

③ $x \neq \frac{3}{2}$인 모든 실수

④ 해는 없다.

⑤ $x = \frac{3}{2}$

해설

$-4x^2 + 12x - 9 \geq 0$

$\Rightarrow\ 4x^2 - 12x + 9 \leq 0$

$\Rightarrow\ (2x - 3)^2 \leq 0$

$\therefore\ x = \frac{3}{2}$

7. x에 대한 부등식 $x(x+1) < a(x+1) - 1$의 해가 존재하지 않을 때, 실수 a의 범위는?

① $a \leq -3$ 또는 $a \geq 1$

② $-3 \leq a \leq 1$

③ $a < -3$ 또는 $a > 1$

④ $-3 < a < 1$

⑤ $-1 \leq a \leq 3$

해설

$x(x+1) < a(x+1)-1$을 전개하여 이항하면 $x^2+(1-a)x-a+1 < 0$ 이차항의 계수가 양수이므로 판별식 $D \leq 0$이면 부등식의 해가 없다.

$D = (1-a)^2 + 4(a-1) \leq 0$

$(a-1)(a+3) \leq 0$

$\therefore \quad -3 \leq a \leq 1$

8. 부등식 $ax^2+(a+1)x+a>0$을 만족하는 실수 x가 존재하기 위한 상수 a의 값의 범위는?

① $a>-1$ ② $a>-\frac{1}{2}$ ③ $a>-\frac{1}{3}$

④ $a>-\frac{1}{4}$ ⑤ $a>-\frac{1}{5}$

해설

$ax^2+(a+1)x+a>0$에서

i) $a=0$이면 $x>0$

$\therefore$ 실수해가 존재한다.

ii) $a>0$ 이면 $y=ax^2+(a+1)x+a$의 그래프가 아래로 볼록한 모양이므로

$ax^2+(a+1)x+a>0$을 만족시키는 x값이 반드시 존재한다.

iii) $a<0$이면 $D=(a+1)^2-4a^2>0$

$3a^2-2a-1<0$, $(3a+1)(a-1)<0$

$\therefore\ -\frac{1}{3}<a<1$, $a<0$ 이므로 $-\frac{1}{3}<a<0$

i), ii), iii) 에서 $a>-\frac{1}{3}$

9. x에 관한 이차부등식 $ax^2-2ax-3a \ge bx^2-2bx-3b$에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $a<b$일 때, $-1 \le x \le 3$이다.

② $a<b$일 때, $x \le -1,\ x \le 3$이다.

③ $a<0$일 때, $-1 \le x \le 3$이다.

④ $b<0$일 때, $x \le -1,\ x \ge 3$이다.

⑤ $a \ge b$ 일 때, 부등식은 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

해설

$ax^2-2ax-3a \ge bx^2-2bx-3b$을 이항하여 정리하면

$(a-b)x^2-2(a-b)x-3(a-b) \ge 0$(이차부등식이므로 $a \ne b$)

i) $a<b$이면 $x^2-2x-3=(x-3)(x+1) \le 0$

$\therefore -1 \le x \le 3$

ii) $a>b$이면

$x^2-2x-3=(x-3)(x+1) \ge 0$

$\therefore x \le -1,\ x \ge 3$

10. 부등식 $(|x|-1)(|x|-3)<0$을 만족하는 정수 x의 개수는?

① 6개 ② 5개 ③ 4개 ④ 3개 ⑤ 2개

해설

$(|x|-1)(|x|-3)<0$

$1<|x|<3$에서 구간을 나누면

(i) $x \geq 0$일 때, $1<x<3$, 정수 : 2

(ii) $x<0$일 때, $1<-x<3$,

$-3<x<-1$ 정수 : -2

$\therefore$ 정수의 개수 : 2개

11. 이차부등식 $x^2 - |x| - 6 < 0$의 해가 $a < x < b$일 때, $a^2 + b^2$의 값을 구하여라.

① 5 ② 10 ③ 13 ④ 16 ⑤ 18

해설

$x \geqq 0$일 때

$x^2 - x - 6 < 0$에서 $(x+2)(x-3) < 0$

$-2 < x < 3$ $\therefore 0 \leqq x < 3$

$x < 0$일 때

$x^2 + x - 6 < 0$에서 $(x+3)(x-2) < 0$

$-3 < x < 2$ $\therefore -3 < x < 0$

$\therefore -3 < x < 3$이므로 $a = -3,\ b = 3$

따라서 $a^2 + b^2 = 9 + 9 = 18$

12. 부등식 $3[x]^2 + [x] - 10 \leq 0$의 해는? (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수)

① $-3 \leq x < 1$ ② $-3 \leq x < 2$ ③ $-2 \leq x < 1$

④ $-2 \leq x < 2$ ⑤ $-2 \leq x < 3$

해설

$3[x]^2 + [x] - 10 \leq 0$이므로

$([x] + 2)(3[x] - 5) \leq 0$

$-2 \leq [x] \leq \dfrac{5}{3}$

$[x]$는 정수이므로

$-2 \leq [x] \leq 1$

$\therefore -2 \leq x < 2$

13. 부등식 $[x]^2 \geq [x+2]$를 풀면? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $x \leq 0$ 또는 $x \geq 1$

② $x \leq 0$ 또는 $x > 2$

③ $x < 0$ 또는 $x \geq 2$

④ $x < 0$ 또는 $x \geq 1$

⑤ $x < 1$ 또는 $x \geq 3$

해설

$[x]^2 \geq [x+2]$에서 $[x]^2 \geq [x]+2$

$[x]^2 - [x] - 2 \geq 0$, $([x]-2)([x]+1) \geq 0$

$\therefore [x] \leq -1$ 또는 $[x] \geq 2$

$\therefore x < 0$ 또는 $x \geq 2$

14. 이차부등식 $(x+1)^2 \le k(x^2-x+1)$이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립할 때, 실수 k의 최솟값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 4

해설

$(x+1)^2 \le k(x^2-x+1)$

$(k-1)x^2-(k+2)x+k-1 \ge 0$

모든 x에 대해 성립하려면,

$k-1>0$, 판별식이 0보다 작거나 같다

$D=(k+2)^2-4(k-1)(k-1) \le 0$에서

$\{(k+2)-2(k-1)\}\{(k+2)+2(k-1)\}$

$=(-k+4)k \le 0$

$\therefore \ k(k-4) \ge 0, \quad k \le 0$ 또는 $k \ge 4$

$\therefore \quad k \ge 4 (\because k>1) \quad \therefore$ 최솟값 : 4

15. 모든 실수 x에 대하여 x^2+px+p가 -3보다 항상 크기 위한 정수 p의 최댓값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x^2+px+p>-3$

$x^2+px+(p+3)>0$

$D=p^2-4(p+3)=p^2-4p-12<0$

$(p-6)(p+2)<0$

$-2<p<6$

$\therefore$ 최대정수 : 5

16. 모든 실수 x에 대해 이차부등식 $x^2 - x(kx-3) + 3 > 0$이 항상 성립하기 위한 정수 k의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

주어진 부등식을 정리하면

$(1-k)x^2 + 3x + 3 > 0$

$D = 3^2 - 4 \times (1-k) \times 3 < 0$

$\therefore k < \dfrac{3}{12} = 0.25$

최대 정수 $k = 0$

17. 모든 실수 x에 대하여 $x^2-2mx-m \geq 0$을 만족하는 실수 m의 범위는 $a \leq m \leq b$이다. $a+b$의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** $a+b=-1$

해설

$x^2-2mx-m \geq 0$이

항상 성립하려면 판별시 $D \leq 0$

$$\frac{D}{4}=m^2+m \leq 0$$

$m(m+1) \leq 0$, $-1 \leq m \leq 0$

$\therefore\ a+b=(-1)+0=-1$

18. 이차부등식 $3x^2 - 2ax + a \geq 0$이 x의 모든 실수 값에 대하여 성립할 때, a의 값의 범위를 구하면?

① $0 < x < 1$　　② $0 \leq a \leq 2$　　③ $0 \leq a \leq 3$

④ $1 < a < 3$　　⑤ $2 \leq a \leq 3$

해설

항상 성립하려면
판별식이 0보다 작거나 같아야한다.

$D' = a^2 - 3a \leq 0$

$a(a-3) \leq 0$

$0 \leq a \leq 3$

19. 모든 실수 x 에 대하여 $x^2+2(a-5)x+2(3a-19)$ 가 양수가 되기 위한 a 의 정수값은 얼마인가?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

$x^2+2(a-5)x+2(3a-19)$ 가 양수가 되려면

판별식이 $D<0$ 이이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=(a-5)^2-2(3a-19)<0$$

$a^2-10a+25-6a+38<0$, $a^2-16a+63<0$

$(a-9)(a-7)<0$

$\therefore\ 7<a<9$

따라서 정수a 의 값은 8 이다.

20. 모든 실수 x 에 대하여 다항식 $(m+1)x^2-2(m-1)x+3$ 의 값이 항상 2보다 크도록 하는 상수 m 의 범위가 $a<m<b$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(m+1)x^2-2(m-1)x+3>2$

$(m+1)x^2-2(m-1)x+1>0$ 이므로

$m\neq-1,\ m>-1$ 이고, $D<0$ 이다.

$\frac{D}{4}=m^2-3m<0 \qquad \therefore\ 0<m<3$

$\therefore a=0,\ b=3$

$\therefore a+b=3$

21. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $\alpha<x<\beta$일 때, 이차부등식 $cx^2-bx+a>0$의 해는?(단, $\alpha>0$이다.)

① $-\frac{1}{\alpha}<x<-\frac{1}{\beta}$

② $-\beta<x<-\alpha$

③ $\frac{1}{\beta}<x<\frac{1}{\alpha}$

④ $x>\frac{1}{\alpha},\ x<\frac{1}{\beta}$

⑤ $x>-\frac{1}{\beta},\ x<-\frac{1}{\alpha}$

해설

$ax^2+bx+c>0$의 해가 $\alpha<x<\beta$이므로

$a<0,\ \alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$

$cx^2-bx+a>0$

에서 $a<0$이므로 양변을 a로 나누면

$\frac{c}{a}x^2-\frac{b}{a}x+1<0$

$\therefore \alpha\beta x^2+(\alpha+\beta)x+1<0$

$\therefore (\alpha x+1)(\beta x+1)<0$이고

$0<\alpha<\beta$에서 $\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\beta}$이므로

$-\frac{1}{\alpha}<-\frac{1}{\beta}$

$\therefore -\frac{1}{\alpha}<x<-\frac{1}{\beta}$

22. 부등식 $ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $-1-\sqrt{5}<x<-1+\sqrt{5}$ 일 때 부등식 $cx^2-2bx-a<0$ 의 해는?

① $1<x<2$ ② $2<x<4$ ③ $3<x<5$

④ 모든 실수 ⑤ 해는 없다

해설

$ax^2+bx+c>0$ 의 해가

$-1-\sqrt{5}<x<-1+\sqrt{5}$ 이므로 $a<0$

해가 $-1-\sqrt{5}<x<-1+\sqrt{5}$ 이고 이차항의 계수가 1인 부등식은

$\left\{x-(-1-\sqrt{5})\right\}\left\{x-(-1+\sqrt{5})\right\}<0$

$x^2+2x-4<0$

양변에 a 를 곱하면 $ax^2+2ax-4a>0$

$\therefore b=2a, c=-4a \cdots$(가)

(가)를 $cx^2-2bx-a<0$ 에 대입하면

$-4ax^2-4ax-a<0$

$4x^2+4x+1<0, (2x+1)^2<0$

$\therefore$ 해는 없다.

23. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 3일 때, 방정식 $f(2x+1)=0$의 두 근의 합을 구하면?

① $\frac{1}{2}$ ② 2 ③ $\frac{1}{3}$ ④ 3 ⑤ $\frac{1}{4}$

해설

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을
$\alpha,\ \beta$라 하면, $\alpha+\beta=3$
한편, $f(2x+1)=0$에서
$2x+1=\alpha,\ 2x+1=\beta$이므로

$$x=\frac{\alpha-1}{2},\ \frac{\beta-1}{2}$$

따라서, $\dfrac{\alpha-1}{2}+\dfrac{\beta-1}{2}$

$$=\frac{\alpha+\beta-2}{2}=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}$$

해설

$f(x)=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면, $\alpha+\beta=3$
$f(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)$라 하면
$f(2x+1)=k(2x+1-\alpha)(2x+1-\beta)$

$\therefore\ f(2x+1)=0$의 두 근은 $x=\dfrac{\alpha-1}{2},\ \dfrac{\beta-1}{2}$

$$\therefore\ \frac{\alpha-1}{2}+\frac{\beta-1}{2}=\frac{\alpha+\beta-2}{2}=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}$$

24. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 2일 때, 방정식 $f(2x-3)=0$의 두 근의 합은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=2$

$f(2x-3)=0$에서 $2x-3=\alpha$, $2x-3=\beta$

$\therefore\ x=\dfrac{\alpha+3}{2},\ \dfrac{\beta+3}{2}$

$\therefore$두 근의 합은 $\dfrac{(\alpha+\beta)+6}{2}=4$

25. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 10일 때, 방정식 $f(4x-3)=0$의 두 근의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x)=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면 $\alpha+\beta=10$

$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)=0$로 놓으면

$f(4x-3)=a(4x-3-\alpha)(4x-3-\beta)=0$

$x=\dfrac{3+\alpha}{4},\ \dfrac{3+\beta}{4}$

$\therefore$두 근의 합은 $\dfrac{6+\alpha+\beta}{4}=4$

26. a가 실수일 때 두 이차방정식 $x^2+ax+a=0$, $x^2-2ax+2a+3=0$ 에서 한 방정식만이 허근을 가질 a의 범위는?

① $-1<a<4$

② $-1<a<0$ 또는 $3<a<4$

③ $-1\le a\le 4$

④ $-1<a\le 0$ 또는 $3\le a<4$

⑤ $3\le x\le 4$

해설

$x^2+ax+a=0 \qquad \cdots ㉠$

$x^2-2ax+2a+3=0 \cdots ㉡$

㉠에서 허근을 가지려면

$D=a^2-4a<0$

$\therefore\ 0<a<4$

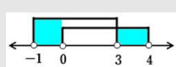
㉡에서 허근을 가지려면

$\dfrac{D}{4}=a^2-2a-3<0$

$(a+1)(a-3)<0$

$\therefore\ -1<a<3$

한쪽만이 허근을 가지려면,



$\therefore\ -1<a\le 0$ 또는 $3\le a<4$

27. x에 대한 이차방정식 $x^2 - 2kx - 2k + 3 = 0$이 두 실근을 가지도록 실수 k의 값의 범위를 정하면?

① $k \leq -3$ 또는 $k \geq 1$
② $-3 \leq k \leq 1$
③ $k = -3$ 또는 $k = 1$
④ $k < -3$ 또는 $k > 1$
⑤ $-3 < k < 1$

해설

두 실근을 갖는다는 것은
서로 다른 두 실근 또는 중근을 갖는다는 것이므로
$D' = k^2 - (-2k + 3) \geq 0$
$k^2 + 2k - 3 \geq 0$
$(k + 3)(k - 1) \geq 0$
$\therefore \ k \leq -3$ 또는 $k \geq 1$

28. 구간 $[2,3]$에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $x^2 - a(a+1)x + a^3 \le 0$을 만족하는 실수 a의 최솟값과 최댓값의 곱은?(단, $a > 1$)

① 2 ② $2\sqrt{3}$ ③ 3 ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ 5

해설

$[2,3] \Leftrightarrow 2 \le x \le 3$

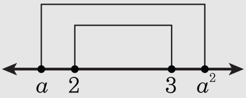
$x^2 - a(a+1)x + a^3 \le 0$

$(x-a)(x-a^2) \le 0$

$a < x < a^2 (\because \ a > 1) \quad a \le 2, a^2 \ge 3$

$\therefore \ a$의 최댓값 : 2

a의 최솟값 : $\sqrt{3} \rightarrow \therefore \ 2\sqrt{3}$



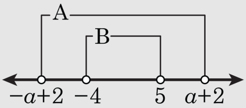
29. 양의 실수 a에 대하여 부등식 $-3 < x + 1 < 6$의 모든 해가 부등식 $|x-2| < a$를 만족할 때, a값의 범위는?

① $0 < a \le 3$ ② $0 < a < 3$ ③ $0 \le a \le 3$

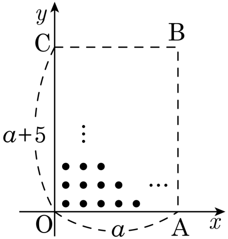
④ $a \ge 3$ ⑤ $a \ge 6$

해설

$\therefore\ a \ge 6$



30. 다음 그림과 같이 원점을 모서리로 하고, $\overline{OA} = a$, $\overline{OC} = a+5$ 인 직사각형 OABC 가 있다. 사각형 OABC 내부의 격자점의 수가 50 개 이하가 되도록 할 때, a 의 최댓값은? (단, $a > 0$ 이고, 격자점은 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점이다.)



① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$(a-1)(a+4) \leq 50$

$a^2 + 3a - 54 = (a+9)(a-6) \leq 0$

$\therefore 0 < a \leq 6$

31. 두 대의 승용차 A, B가 같은 거리를 가는데 A는 거리의 반은 시속 vkm로 달리고, 나머지 거리는 시속 u km로 달린다고 한다, 또한 B는 소요된 시간의 반은 시속 u km로 달리고 나머지 소요된 시간은 v km로 달린다고 한다. 승용차 A, B의 평균 속력이 각각 x km/시, y km/시일 때, x와 y의 대소 관계를 바르게 나타내 것은?

① $x \le y$ ② $x \ge y$ ③ $x = y$ ④ $x < y$ ⑤ $x > y$

해설

승용차 A가 달린 거리를 s,

시간을 t라 하면 $t = \dfrac{s}{2u} + \dfrac{s}{2v}$

평균 속력은

$$\frac{s}{t} = \frac{s}{\dfrac{s}{2u} + \dfrac{s}{2v}} = \frac{s}{\dfrac{su + sv}{2uv}} = \frac{2uv}{u + v} = x$$

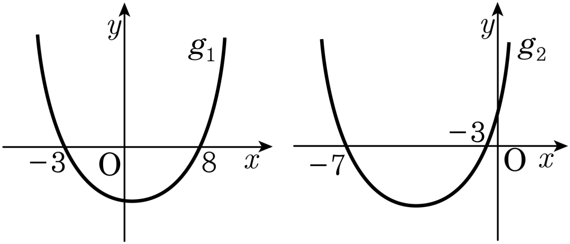
승용차 B의 평균 속력은 $\dfrac{1}{2}(u + v) = y$

$$y - x = \frac{1}{2}(u + v) - \frac{2uv}{u + v}$$

$$= \frac{(u + v)^2 - 4uv}{2(u + v)} \ge 0$$

따라서 $y - x \ge 0$이므로 $x \le y$이다.

32. 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 를 갑은 일차항의 계수를 잘못 보고 그래프 g_1 을, 을은 상수항을 잘못 보고 그래프 g_2 를 그렸다. 이 때, $x^2 + ax + b < 0$ 을 만족하는 정수 x 의 개수를 구하여라.



▶ **답 :** ＿＿＿＿＿ 개

▷ **정답 :** 13 개

해설

갑은 상수항을 바르게 보았으므로
g_1 의 상수항 $b = -24$ ($\because$ 두 근의 곱)
을은 일차항의 계수를 바르게 보았으므로
g_2 의 일차항 $a = 10$
($\because$ 대칭축의 방정식은 $x = -\frac{a}{2} = -5$)
이 때, $x^2 + ax + b < 0$ 에 a, b 를 대입하면
$x^2 + 10x - 24 < 0$, $(x + 12)(x - 2) < 0$
$\therefore -12 < x < 2$
따라서 만족하는 정수는 13 (개)

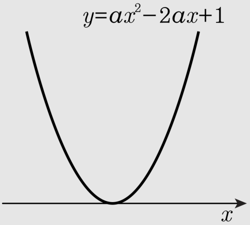
33. 부등식 $ax^2-2ax+1 \le 0$이 단 하나의 해를 갖도록 하는 실수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

주어진 부등식이 단 하나의 해를 가지려면
$y=ax^2-2ax+1$ 의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



(ⅰ) 그래프가 아래로 볼록이므로 $a>0$
(ⅱ) $ax^2-2ax+1=0$ 의 판별식을 D 라 하면
$\frac{D}{4}=a^2-a=0$ 에서 $a=0$ 또는 $a=1$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=1$

34. 좌표 평면 위에서 모든 실수 x 에 대하여 직선 $y = 2(kx+1)$ 이 곡선 $y = -(x-2)^2 + 1$ 보다 항상 위쪽에 있도록 실수 k 의 값을 정할 때, 다음 중 k 의 값의 범위에 속하지 <u>않는</u> 것은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 0　　⑤ -1

해설

임의의 실수 x 에 대하여 부등식
$2(kx+1) > -(x-2)^2 + 1 \cdots$ ㉠이
항상 성립하도록 k 의 값을 정하면 된다.
㉠식을 정리하면
$x^2 + 2(k-2)x + 5 > 0 \cdots$ ㉡식이
항상 성립하기 위하여

$$\frac{D}{4} = (k-2)^2 - 5 < 0$$

$$\Rightarrow k^2 - 4k - 1 < 0$$

$\therefore\ 2 - \sqrt{5} < k < 2 + \sqrt{5}$
이때, 0, 1, 2, 3 은 k 의 값의 범위에 속하나
-1 은 속하지 않는다.

35. 다음과 같은 포물선과 직선이 있다.

$$y = x^2 + (m-1)x + m^2 + 1$$
$$y = x + 1$$

포물선이 직선보다 항상 위쪽에 존재하도록 m 의 범위를 정하면?

① $m < -2,\quad m > \frac{2}{3}$

② $m < -1,\quad m > \frac{2}{3}$

③ $m < -2,\quad m > 2$

④ $m < 2,\quad m > \frac{2}{3}$

⑤ $m < -5,\quad m > \frac{2}{3}$

해설

$x^2 + (m-1)x + m^2 + 1 > x + 1$ 을

항상 만족시키도록 m 을 정하면 된다.

$x^2 + (m-2)x + m^2 > 0$ 에서 판별식

$D = (m-2)^2 - 4m^2 < 0,$

$(m-2+2m)(m-2-2m) < 0$

$(3m-2)(m+2) > 0$

$\therefore\quad m < -2\ ,\ m > \frac{2}{3}$

36. $-2 \le x \le 2$ 일 때, x 에 대한 부등식 $x^2-6x \ge a^2-6a$ 가 항상 성립하기 위한 a 의 값의 범위는?

① $-4 \le a \le 0$ ② $-2 \le a \le 2$ ③ $0 \le a \le 4$

④ $2 \le a \le 4$ ⑤ $4 \le a \le 6$

해설

$f(x) = x^2 - 6x - a^2 + 6a$ 라 놓고

$-2 \le x \le 2$ 에서

$f(x) > 0$ 일 때, a 의 값의 범위를 구한다.

$f(x) = (x-3)^2 - a^2 + 6a - 9$ 이므로

$-2 \le x \le 2$ 에서 $f(x)$ 의 최솟값은 $x = 2$ 일 때,

$f(2) = 4 - 12 - a^2 + 6a \ge 0$

$a^2 - 6a + 8 \le 0 \quad \Rightarrow \quad (a-2)(a-4) \le 0$

$\therefore \ 2 \le a \le 4$

37. $0 < x < 1$ 인 모든 x 에 대하여 항상 $x^2 - 3 \le (a-1)x$ 가 성립할 때, 실수의 상수 a 의 범위를 구하면?

① $a = -1$ ② $a > -1$ ③ $a \ge -1$

④ $a < -1$ ⑤ $a \le -1$

해설

$f(x) = x^2 - (a-1)x - 3$ 이라 두어,
$0 < x < 1$ 에서 $f(x) \le 0$ 되도록 하자.
$f(0) \le 0$ 그리고 $f(1) \le 0$ 이면 된다.
그런데, $f(0) = -3$ 이므로
$f(1) = 1 - (a-1) - 3 \le 0$ 에서 $a \ge -1$

38. 부등식 $x^2+ax+a+3\le 0$를 만족하는 x가 오직 1개이기 위한 양수 a가 존재하는 구간은?

① $1<a<3$　② $2<a<5$　③ $3<a<6$

④ $4<a<7$　⑤ $6<a<7$

해설

$x^2+ax+a+3\le 0$의 해가
1개 존재하기 위해서는
$x^2+ax+a+3=0$이 중근을 가져야 한다.

$$\begin{aligned}\therefore D &= a^2-4(a+3)\\ &= a^2-4a-12\\ &= (a-6)(a+2)=0\end{aligned}$$

$\therefore a=6\ (\because a>0)$

39. 부등식 $|x^2-1|+3x<3$의 해가 $\alpha<x<\beta$일 때, 상수 $\alpha+\beta$의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

절댓값 기호 안을 0으로 하는 x의 값을 경계로 하여 구간을 나누어 본다.

(i) $x^2-1\geq 0$,
즉 $x\leq -1$ 또는 $x\geq 1$일 때,
$|x^2-1|=x^2-1$이므로 주어진 부등식은
$x^2-1+3x<3,\ x^2+3x-4<0$
$(x+4)(x-1)<0$
$\therefore -4<x<1$

이 때 조건에서 $x\leq -1$ 또는 $x\geq 1$이므로
이를 만족하는 x값의 범위는 $-4\leq x\leq -1$

(ii) $x^2-1<0$,
즉 $-1<x<1$일 때,
$|x^2-1|=-x^2+1$이므로 주어진 부등식은
$-x^2+1+3x<3,\ x^2-3x+2>0$
$(x-1)(x-2)>0$
$\therefore x<1$ 또는 $x>2$

이 때 조건에서 $-1<x<1$이므로
이를 만족하는 x의 값의 범위는 $-1<x<1$
(i), (ii)로부터 주어진 부등식의 해는 $-4<x<1$
따라서 $\alpha=-4,\ \beta=1,\ \alpha+\beta=-3$

40. $6[x]^2 - 31[x-1] - 13 < 0$을 풀면? (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수)

① $-3 \le x < 3$　② $-2 \le x < 5$　③ $0 \le x < 3$

④ $1 \le x < 5$　⑤ $1 \le x < 6$

해설

$n \le [x] < n+1$에서

$n-1 < [x-1] < n$이므로

$[x-1] = [x]-1$

$\therefore 6[x]^2 - 31[x-1] - 13$

$= 6[x]^2 - 31([x]-1) - 13$

$= 6[x]^2 - 31[x] + 18 < 0$

$\therefore (2[x]-9)(3[x]-2) < 0$

$\dfrac{2}{3} < [x] < \dfrac{9}{2}$

$\therefore 1 \le [x] \le 4$이므로

$[x] = 1,\ 2,\ 3,\ 4$

$\therefore 1 \le x < 5$

41. 임의의 실수 x, y에 대하여 $x^2+y^2+2xy+2x+ay+b>0$이 성립할 a, b의 조건은? (단, a, b는 실수)

① $a=1,\quad b>2$ ② $a=1,\quad b<2$ ③ $a=2,\quad b>1$

④ $a=2,\quad b\geq 1$ ⑤ $a=2,\quad b\leq 1$

해설

준식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면
$x^2+2(1+y)x+y^2+ay+b>0$ 이고
임의의 실수 x에 대하여 항상 성립하기 위해서는
$D/4<0$를 만족해야 한다.
$D/4=(1+y)^2-(y^2+ay+b)<0$
$\therefore (2-a)y+1-b<0\cdots$ ①
①식이 모든 실수 y에 성립할 조건은
$(2-a)=0,\quad 1-b<0,$
$\therefore a=2,\quad b>1$

42. 부등식 $5-x>2|x+1|$의 해와 $ax^2+bx+7>0$의 해가 같도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값은 ?

① -7 ② -5 ③ 5 ④ 7 ⑤ 0

해설

$5-x>2|x+1|$ 을 풀면

(i) $x \geq -1$ 일 때

$5-x>2x+2$, $x<1$ $\quad \therefore -1 \leq x < 1$

(ii) $x<-1$ 일 때

$5-x>-2x-2$, $x>-7$ $\quad \therefore -7<x<-1$

(i), (ii) 에 따라 $-7<x<1$

$ax^2+bx+7>0 \Leftrightarrow -7<x<1$ 이므로 $a<0$ 이고

$ax^2+bx+7=a(x+7)(x-1)$

계수를 비교하면

$a=-1, b=-6 \quad \therefore\ a+b=-7$

43. 두 이차방정식 $x^2+2ax+a+2=0, x^2+(a-1)x+a^2=0$중 적어도 하나가 실근을 갖기 위한 상수 a의 값의 범위는?

① $a<\frac{1}{2},\ 2<a$
② $a\le 1,\ 3\le a$
③ $a\le\frac{1}{2},\ 3<a$
④ $a\le\frac{1}{2},\ 2<a$
⑤ $a\le\frac{1}{3},\ a\ge 2$

해설

각각 실근을 가질 조건은 차례로

$\frac{D_1}{4}=a^2-(a+2)\ge 0$에서

$(a-2)(a+1)\ge 0,\ a\le -1,\ a\ge 2\cdots$ ①

또, $D_2=(a-1)^2-4a^2\ge 0$에서

$(3a-1)(a+1)\le 0,\ \ -1\le a\le\frac{1}{3}\cdots$ ②

따라서, 적어도 하나가 실근을 갖기 위한

a의 범위는 ① 또는 ②이므로

$a\le\frac{1}{3},\ a\ge 2$

44. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근을 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$라 하고, 부등식 $ax^2+bx+c\ge 0$의 모든 해가 $\sqrt{2}\le x<3$의 범위 안에 있을 때, <보기> 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

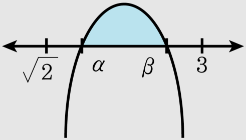
ㄱ. $\alpha+\beta>2\sqrt{2}$　　ㄴ. $ac>0$

ㄷ. $4a+c<2b$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

해설

주어진 조건이 성립하려면 다음 그림과 같이 $a<0,\ \sqrt{2}\le\alpha<\beta<3$을 만족하여야 한다.



ㄱ $\sqrt{2}\le\alpha<\beta$에서 $\alpha+\beta>2\sqrt{2}$

ㄴ $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}>0$이므로 $ac>0$이다.

ㄷ $f(-2)=4a-2b+c<0$에서 $4a+c<2b$

45. 어느 회사가 판매하고 있는 상품의 1개당 판매 가격을 작년보다 $x\,\%$ 올리면 이 상품의 판매량이 작년보다 $\frac{x}{2}\,\%$ 감소한다고 한다. 이 회사가 올해 판매 금액의 $10\,\%$를 상여금으로 지급할 때, 올해 판매 금액에서 상여금을 제외한 금액이 작년 판매 금액보다 크거나 같게 되기 위한 x의 최댓값은?

① 60　　② $\frac{200}{3}$　　③ $\frac{230}{3}$　　④ 80　　⑤ 90

해설

이 회사가 판매하는 상품의 작년 1개당 판매 가격을 a, 판매량을 b라 하자.
올해 판매 가격을 $x\,\%$ 올리면
올해 판매 가격은 $a\left(1+\frac{x}{100}\right)$,
판매량은 $b\left(1-\frac{x}{200}\right)$ 이므로
올해 판매 금액에서 상여금을 제외한 금액은

$$a\left(1+\frac{x}{100}\right)\times b\left(1-\frac{x}{200}\right)\times\frac{9}{10}$$

작년 판매 금액이 ab이므로

$$a\left(1+\frac{x}{100}\right)\times b\left(1-\frac{x}{200}\right)\times\frac{9}{10}\geq ab$$

이 부등식을 정리하면

$$9x^2-900x+20000\leq 0$$

$$(3x-100)(3x-200)\leq 0$$

$$\therefore \frac{100}{3}\leq x\leq\frac{200}{3}$$

46. 좌표평면 위에서 모든 실수 x 에 대하여 직선 $y=2(kx+1)$ 이 곡선 $y=-(x-2)^2+1$ 보다 항상 위쪽에 있도록 실수 k 의 값을 정할 때, 다음 중 k 의 값의 범위에 속하지 않는 것은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 0　　⑤ -1

해설

임의의 실수 x 에 대하여

부등식 $2(kx+1) > -(x-2)^2+1 \cdots$ ㉠

이 항상 성립하도록 k 의 값을 정하면 된다.

㉠식을 정리하면

$x^2+2(k-2)x+5>0$

㉡식이 항상 성립하기 위하여

$$\frac{D}{4}=(k-2)^2-5<0$$

$\Rightarrow\ k^2-4k-1<0$

$\therefore\ 2-\sqrt{5}<k<2+\sqrt{5}$

이 때, 0, 1, 2, 3 은 k 의 값의 범위에 속하나

-1 은 속하지 않는다.

47. $-1 \le x \le 1$ 에서 x 에 대한 부등식 $x+a \le x^2 \le 2x+b$ 가 항상 성립할 때, $b-a$ 의 최솟값을 p 라 하자. 이 때, $100p$ 의 값은?

① 275　② 310　③ 325　④ 330　⑤ 335

해설

$$x+a \le x^2 \le 2x+b \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x \ge a \\ x^2 - 2x \le b \end{cases}$$

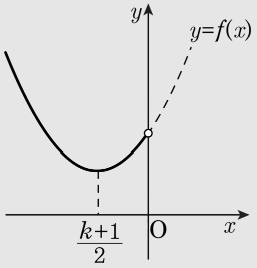
(i) $f(x) = x^2 - x$ 라 하면

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$-1 \le x \le 1$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는

아래 그림과 같으므로 $-\frac{1}{4} \le f(x) \le 2$

즉, $-\frac{1}{4} \le x^2 - x \le 2$ 이므로 $a \le -\frac{1}{4}$



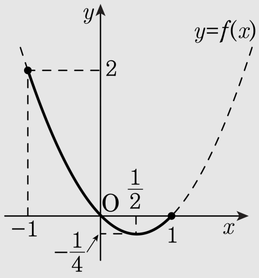
(ii) $g(x) = x^2 - 2x$ 라 하면

$g(x) = (x-1)^2 - 1$

$-1 \le x \le 1$ 에서 $y = g(x)$ 의 그래프는

아래 그림과 같으므로 $-1 \le g(x) \le 3$

즉, $-1 \le x^2 - 2x \le 3$ 이므로 $b \ge 3$



(i), (ii) 에서 $b-a$ 의 최솟값 p 는

$$p = 3 - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{13}{4}$$

$\therefore\ 100p = 325$

48. $[x]=1,\ [y]=2,\ [z]=-1$ 일 때 $[x+2y-z]$의 최대값과 최소값의 합은?
(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수이다.)

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

해설

$[x]=1,\ [y]=2,\ [z]=-1$ 에서
$1 \le x < 2,\ 2 \le y < 3,\ -1 \le z < 0$

$$\begin{array}{rl} & 1 \le x < 2 \\ & 4 \le 2y < 6 \\ +) & 0 < -z \le 1 \\ \hline & 5 < x+2y-z < 9 \end{array}$$

$\therefore\ [x+2y-z]=5,\ 6,\ 7,\ 8$
최대값과 최소값의 합은 $5+8=13$

49. 이차방정식 $x^2+2ax+b=0$의 두 근을 α,β라 할 때, 이차부등식 $(4a+b+4)x^2+2(a+2)x+1<0$을 풀면? (단, $\alpha>\beta>2$)

① $\dfrac{1}{\beta-2}<x<\dfrac{1}{\alpha-2}$ ② $\dfrac{1}{\alpha-2}<x<\dfrac{1}{\beta-2}$

③ $x<\alpha-2,\ x>\beta-2$ ④ $x<\beta-2,\ x>\alpha-2$

⑤ $\beta-2<x<\alpha-2$

해설

근과 계수와의 관계로부터 $\alpha+\beta=-2a,\ \alpha\beta=b$이므로

$4a+b+4=-2(\alpha+\beta)+\alpha\beta+4=(\alpha-2)(\beta-2)$,

$2(a+2)=2a+4=-(\alpha+\beta)+4=-(\alpha+\beta-4)$

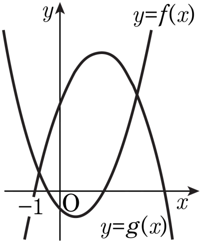
따라서, 주어진 이차부등식은

$(\alpha-2)(\beta-2)x^2-(\alpha+\beta-4)x+1<0$

$\therefore\ \{(\alpha-2)x-1\}\{(\beta-2)x-1\}<0$

$\alpha>\beta>2$이므로 $\dfrac{1}{\alpha-2}<x<\dfrac{1}{\beta-2}$

50. 이차항의 계수가 각각 1, -1인 두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음의 그림과 같다. 부등식 $f(x)-g(x) \leq 0$의 해가 $-1 \leq x \leq 3$이고 $f(2)=1$ 일 때, $g(1)$ 의 값은?



① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$y=f(x)$의 y절편이 -1이므로 $f(x)=x^2+ax-1$로 놓을 수 있다.

$f(2)=2a+3=1$에서 $a=-1$

$\therefore f(x)=x^2-x-1$

$g(x)=-x^2+bx+c$로 놓으면 $f(x)-g(x) \leq 0$의 해가 $-1 \leq x \leq 3$이므로

$f(x)-g(x) = 2x^2-(1+b)x-1-c = 2(x+1)(x-3) = 2x^2-4x-6$

따라서, $1+b=4$, $-1-c=-6$에서

$b=3$, $c=5$

$\therefore g(x)=-x^2+3x+5$

$\therefore g(1)=7$