1. 이차함수 $y = 2x^2 + kx - k$ 의 그래프가 x축과 만나도록 하는 상수 k의 값이 아닌 것은?

① -8　② -1　③ 0　④ 5　⑤ 8

해설

이차방정식 $2x^2 + kx - k = 0$에서 $D = k^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-k) \geq 0$이어야 하므로

$k^2 + 8k \geq 0,\ k(k+8) \geq 0$

$\therefore k \leq -8$ 또는 $k \geq 0$

따라서 위의 k의 값의 범위에 속하지 않는 것은 ②이다.

2. 이차함수 $y = x^2 - 8x + k$ 의 그래프가 x 축과 서로 두 점에서 만날 때, 자연수 k 의 개수는?

① 4 개　② 8 개　③ 10 개　④ 13 개　⑤ 15 개

해설

그래프가 x 축과 두 점에서 만나려면
$x^2 - 8x + k = 0$ 의 판별식이 0 보다 커야한다.

$\Rightarrow D' = 4^2 - k > 0$

$\Rightarrow k < 16$

$\therefore$ 자연수 k 의 개수 : 15 개

3. 포물선 $y = -x^2 + kx$ 와 직선 $y = x + 1$ 이 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k 의 범위는?

① $k > 2,\ k < -1$　② $k > 3,\ k < -1$　③ $k > 1,\ k < -1$

④ $k > 3,\ k < -2$　⑤ $k > 3,\ k < -3$

해설

포물선과 직선이 다른 두 점에서 만나므로

$-x^2 + kx = x + 1, x^2 + (1 - k)x + 1 = 0$ 에서

$\mathrm{D} = (1 - \mathrm{k})^2 - 4 > 0$

$k^2 - 2k - 3 = (k - 3)(k + 1) > 0$

$\therefore k > 3$ 또는 $k < -1$

4. 이차함수 $y = x^2 - 2ax + a$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않도록 하는 상수 a 의 값의 범위를 구하면?

① $a < 0, a > 1$ ② $0 < a < 1$ ③ $a < 1, a > 2$

④ $1 < a < 2$ ⑤ $a < -1, a > 2$

해설

$y = x^2 - 2ax + a$ 의 그래프가

x 축과 만나지 않으면

판별식 D 가 $D < 0$ 이므로

$\frac{D}{4} = a^2 - a < 0,\ a(a-1) < 0$

$\therefore\ 0 < a < 1$

5. 이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표가 6, b일 때, $a + b$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와
x축과의 교점의 x좌표는
이차방정식 $x^2 - 8x + a = 0$의 실근이다.
$x^2 - 8x + a = 0$에 $x = 6$을 대입하면
$36 - 48 + a = 0$에서 $a = 12$
따라서 $x^2 - 8x + 12 = 0$에서 $(x-2)(x-6) = 0$
$x = 2$ 또는 $x = 6$
$\therefore\ b = 2 \therefore\ a + b = 14$

6. 이차함수 $y = x^2 + (k-3)x + k$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않을 때, 실수 k 의 값의 범위는?

① $-1 < k < 7$ ② $-1 < k < 8$ ③ $0 < k < 9$

④ $1 < k < 9$ ⑤ $1 < k < 10$

해설

주어진 이차함수의 그래프가
x 축과 만나지 않으려면
이차방정식 $x^2 + (k-3)x + k = 0$ 이
실근을 갖지 않아야 하므로
$D = (k-3)^2 - 4k < 0$
$k^2 - 10k + 9 < 0$, $(k-1)(k-9) < 0$
$\therefore\ 1 < k < 9$

7. 직선 $y = 3x + 2$ 와 포물선 $y = x^2 + mx + 3$ 이 두 점에서 만나기 위한 실수 m 의 범위를 구하면?

① $m < -1, m > 3$ ② $m < 1, m > 5$ ③ $-1 < m < 3$

④ $-1 < m < 5$ ⑤ $1 < m < 5$

해설

$y = 3x + 2, y = x^2 + mx + 3$ 에서 y 를 소거하면

$x^2 + (m - 3)x + 1 = 0, D = (m - 3)^2 - 4 > 0$

$m^2 - 6m + 5 > 0, (m - 1)(m - 5) > 0$

$\therefore\ m < 1,\ m > 5$

8. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6$ 의 그래프가 x축에 접할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, a, b는 실수)

① 2 ② 5 ③ 8 ④ 10 ⑤ 13

해설

$x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6 = 0$ 에서

$\dfrac{D}{4} = a^2 - (-2b^2 - 4a + 4b - 6) = 0$

$\therefore (a+2)^2 + 2(b-1)^2 = 0$

이 때, a, b가 실수이므로 $a + 2 = 0, b - 1 = 0$

따라서 $a = -2, b = 1$ 이므로

$a^2 + b^2 = 5$

9. 함수 $y=-x^2+kx$의 그래프가 직선 $y=-x+4$에 접할 때, 양수 k의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

$y=-x^2+kx$가 $y=-x+4$에 접하려면
$4-x=-x^2+kx \quad \Rightarrow \quad x^2-(k+1)x+4=0$의 판별식은 $D=0$ 이어야 한다.
$D=(k+1)^2-16=0 \quad \Rightarrow \quad k+1=\pm 4$
$\therefore k=3 \ (\because k>0)$

10. 이차함수 $y = x^2 + ax + 1$의 그래프와 직선 $y = 3x - 8$이 만나지 않도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하면?

① $-5 < a < -1$　② $-3 < a < 9$　③ $-1 < a < 4$

④ $2 < a < 6$　⑤ $4 < a < 7$

해설

이차방정식 $x^2 + ax + 1 = 3x - 8$,

즉 $x^2 + (a-3)x + 9 = 0$ 이 이차방정식이 허근을 가져야 하므로

$D = (a-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 < 0$

$a^2 - 6a - 27 < 0$

$(a+3)(a-9) < 0$

$\therefore -3 < a < 9$

11. 이차함수 $y = x^2 - 6x + 12$ 의 그래프와 직선 $y = 2x + k$ 가 만나기 위한 k 의 최솟값은?

① -1　　② -2　　③ -3　　④ -4　　⑤ -5

해설

두 그래프가 만나려면 연립 방정식의 판별식이 0 보다 크거나 같아야 한다.

$\Rightarrow 2x + k = x^2 - 6x + 12$

$\Rightarrow x^2 - 8x + 12 - k = 0$

$\frac{D}{4} = 4^2 - 12 + k \geq 0$

$\Rightarrow k \geq -4$

$\therefore$ 최솟값 : -4

12. 곡선 $y=-x^2+kx$ 과 직선 $y=x+1$ 이 서로 다른 두점에서 만나도록 하는 k 의 값이 아닌 것은?

① -6 ② -3 ③ 3 ④ 6 ⑤ 9

해설

곡선과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면
$-x^2+kx=x+1$ 의 판별식이 0 보다 커야 한다.
$\Rightarrow \quad x^2+(1-k)x+1=0$
$D=(1-k)^2-4>0$, $(k+1)(k-3)>0$
$k<-1$ 또는 $k>3$
$\therefore$ 3은 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

13. 이차함수 $y=-x^2+kx+k$ 의 그래프와 직선 $y=-2x+1$ 이 만나지 않도록 하는 k 값의 범위를 구하면?

① $-8<k<-1$　　② $-8<k<0$　　③ $-6<k<1$

④ $-6<k<2$　　⑤ $-6<k<2$

해설

두 함수가 만나지 않으려면
두 식을 연립하였을 때 판별식이
0보다 작아야 한다.

$\Rightarrow \quad -2x+1=-x^2+kx+k$

$\Rightarrow \quad x^2-(k+2)x+1-k=0$

$D=(k+2)^2-4(1-k)<0$

$k^2+8k<0$

$\Rightarrow \quad -8<k<0$

14. 직선 $y = mx - 1$은 곡선 $y = x^2 + x$와 서로 다른 두 점에서 만나고, 곡선 $y = x^2 - x$와는 만나지 않는다고 한다. 이때, 실수 m의 값의 범위는?

① $1 < m < 3$　② $-1 < m < 3$　③ $-1 < m < 1$

④ $-3 < m < 1$　⑤ $-3 < m < -1$

해설

(i) 직선 $y = mx - 1$ 과 곡선 $y = x^2 + x$ 가
서로 다른 두 점에서 만나므로
이차방정식 $x^2 + (1 - m)x + 1 = 0$의 판별식을 D_1 이라하면
$D_1 = (1 - m)^2 - 4 > 0$에서 $m^2 - 2m - 3 > 0$
$\therefore m < -1$ 또는 $m > 3 \cdots$ ㉠

(ii) 직선 $y = mx - 1$과 곡선 $y = x^2 - x$는 만나지 않으므로
이차방정식 $x^2 - (m + 1)x + 1 = 0$의 판별식을 D_2라 하면
$D_2 = (m + 1)^2 - 4 < 0$에서 $m^2 + 2m - 3 < 0$
$\therefore -3 < m < 1 \cdots$ ㉡

따라서 ㉠, ㉡의 공통범위를 구하면
$-3 < m < -1$

15. 두 이차함수 $y = x^2$, $y = -x^2 - 2x - 1$의 그래프에 동시에 접하는 직선의 방정식을 $y = ax + b$라 할 때, 상수 a, b에 대하여 $a^3 + b^3$의 값은? (단, $a \neq 0$)

① -9 ② -8 ③ -7 ④ -6 ⑤ -5

해설

이차함수 $y = x^2$의 그래프와
직선 $y = ax + b$가 접하므로
이차방정식 $x^2 = ax + b$,
즉 $x^2 - ax - b = 0$의 판별식을 D_1이라 할 때,
$D_1 = (-a)^2 - 4 \cdot (-b) = 0$, $a^2 + 4b = 0$
$\therefore\ 4b = -a^2 \quad \cdots$ ㉠
또, 이차함수 $y = -x^2 - 2x - 1$의 그래프와
직선 $y = ax + b$가 접하므로
이차방정식$-x^2 - 2x - 1 = ax + b$,
즉 $x^2 + (a+2)x + b + 1 = 0$의 판별식을
D_2라 할 때,
$D_2 = (a+2)^2 - 4(b+1) = 0$
$\therefore\ a^2 + 4a - 4b = 0 \quad \cdots$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면 $2a^2 + 4a = 0$
$2a(a+2) = 0 \qquad \therefore\ a = -2\ (\because\ a \neq 0)$
$a = -2$ 를 ㉠에 대입하면
$4b = -4 \qquad \therefore\ b = -1$
$\therefore\ a^3 + b^3 = (-2)^3 + (-1)^3 = -9$

16. 이차함수 $y=x^2-2ax+2am-2m+b$의 그래프가 m의 값에 관계없이 x축에 접할 때, 상수 a, b의 곱 ab의 값은?

① -1 ② 1 ③ 3 ④ 4 ⑤ 6

해설

이차방정식 $x^2-2ax+2am-2m+b=0$에서

$$\frac{D}{4}=a^2-(2am-2m+b)=0$$

$$\therefore a^2-2am+2m-b=0$$

이 식이 m의 값에 관계없이 성립하므로

$(2-2a)m+(a^2-b)=0$에서

$2-2a=0,\ a^2-b=0$

따라서 $a=1,\ b=1$이므로 $ab=1$

17. 이차함수 $y = x^2 - 2ax + a^2 + 2a - 1$의 그래프가 a의 값에 관계없이 직선 $y = mx + n$과 접할 때, 상수 m, n의 합 $m + n$의 값은?

① -4 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 2

해설

이차함수 $y = x^2 - 2ax + a^2 + 2a - 1$의 그래프가

직선 $y = mx + n$과 접하므로

$x^2 - 2ax + a^2 + 2a - 1 = mx + n$

즉, $x^2 - (2a + m)x + a^2 + 2a - n - 1 = 0$

$\therefore 4am + m^2 - 8a + 4n + 4 = 0$

이 식이 a의 값에 관계없이 성립하므로

$(4m - 8)a + (m^2 + 4n + 4) = 0$

$4m - 8 = 0,\ m^2 + 4n + 4 = 0$에서

두 식을 연립하여 풀면 $m = 2, n = -2$

$\therefore m + n = 0$

18. 유리수 a, b에 대하여 곡선 $y = x^2 - a$와 $y = bx$가 두 점 P, Q에서 만난다. 점 P의 x좌표가 $\sqrt{5}+1$일 때, $a+b$의 값을 구하면?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

해설

두 곡선 $y = x^2 - a$와 $y = bx$의 교점의 x좌표는
$x^2 - bx - a = 0$의 두 근이다.
$\sqrt{5}+1$이 근이므로, $-\sqrt{5}+1$도 근이다.
근과 계수의 관계에 의해
$b = \sqrt{5}+1 - \sqrt{5}+1 = 2$
$-a = (\sqrt{5}+1)(-\sqrt{5}+1) = -4$
$\therefore\ a = 4 \qquad \therefore a+b = 6$

19. 이차함수 $y = x^2 + ax + a$의 그래프와 직선 $y = x + 1$이 한 점에서 만나도록 하는 a의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y = x^2 + ax + a \cdots ㉠$
$y = x + 1 \qquad\quad \cdots ㉡$

㉠, ㉡에서 y를 소거하여 정리하면
$x^2 + ax + a = x + 1$
$\therefore\ x^2 + (a-1)x + a - 1 = 0$
㉠, ㉡가 한 점에서 만나면 이차방정식이 중근을 가지므로, 판별식을 D라 하면
$D = (a-1)^2 - 4(a-1) = 0$
$\therefore\ (a-1)\{(a-1)-4\} = 0$
$\therefore\ (a-1)(a-5) = 0 \quad \therefore a = 1$ 또는 5
따라서 구하는 a의 값은 6

20. 직선 $y = ax + 1$ 이 두 이차함수 $y = x^2 + x + 2$, $y = -x^2 + 4x$ 의 그래프와 모두 만나지 않도록 상수 a 의 값의 범위를 정하면 $\alpha < a < \beta$ 이다. 이 때, $\alpha + \beta$ 의 값을 구하면?

① -5 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 5

해설

직선과 이차함수를 연립하여 판별식이
0 보다 작으면 직선과 이차함수가 만나지 않는다.

1) $ax + 1 = x^2 + x + 2$	2) $ax + 1 = -x^2 + 4x$
$\Rightarrow x^2 + (1-a)x + 1 = 0$	$\Rightarrow x^2 + (a-4)x + 1 = 0$
$D = (a-1)^2 - 4 < 0$	$\Rightarrow D = (a-4)^2 - 4 < 0$
$\Rightarrow -1 < a < 3$	$\Rightarrow 2 < a < 6$

$\therefore$ 1), 2) 의 공통 해 : $2 < a < 3$

$\therefore \alpha + \beta = 5$

21. 직선 $y = 2x + a$ 와 이차함수 $y = x^2 - 1$ 의 그래프가 한 점에서 만날 때, 상수 a 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

직선 $y = 2x + a$ 와 이차함수 $y = x^2 - 1$ 의 그래프가 한 점에서 만나므로

이차방정식 $2x + a = x^2 - 1$, 즉 $x^2 - 2x - a - 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{\mathrm{D}}{4} = 1 + a + 1 = 0$$

$\therefore a = -2$

22. 이차함수 $y = x^2 + kx + k$ 의 그래프와 직선 $y = x + 1$이 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 실수 k 의 범위는?

① $k < 1$ 또는 $k > 5$

② $1 < k < 5$

③ $1 \leq k \leq 5$

④ $k < -5$ 또는 $k > -1$

⑤ $1 < k < 3$

해설

이차방정식 $x^2 + kx + k = x + 1$, 즉 $x^2 + (k-1)x + k - 1 = 0$

이 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$D = (k-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (k-1) > 0$

$k^2 - 6k + 5 > 0,\quad (k-1)(k-5) > 0$

$\therefore k < 1$ 또는 $k > 5$

23. 직선 $y=ax+1$이 이차함수 $y=x^2-3x+5$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나고, 이차함수 $y=x^2+3x+5$의 그래프와는 만나지 않을 때, 상수 a의 값의 범위를 구하면?

① $a<-7$ 또는 $a>1$　　② $-1<a<7$

③ $a<7$　　④ $-7<a<1$

⑤ $1<a<7$

해설

$ax+1=x^2-3x+5$에서 $x^2-(a+3)x+4=0$

(판별식)$=(a+3)^2-4\cdot1\cdot4>0$

$a<-7$ 또는 $a>1 \cdots$ ㉠

$ax+1=x^2+3x+5$에서 $x^2-(a-3)x+4=0$

(판별식)$=(a-3)^2-4\cdot1\cdot4<0$

$\therefore -1<a<7 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 상수 a의 값의 범위는 $1<a<7$

24. 이차함수 $y = 2x^2 - mx + 3$ 과 직선 $y = 2x + 1$ 이 접할 때, 양수 m 의 값은?

① 2　　② 3　　③ 5　　④ 6　　⑤ 8

해설

이차함수와 직선이 접하면 두 방정식을 연립했을 때 판별식이 0 이다.

$$\begin{cases} y = 2x^2 - mx + 3 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow 2x^2 - mx + 3 = 2x + 1$

$\Rightarrow 2x^2 - (m+2)x + 2 = 0$

$\Rightarrow D = (m+2)^2 - 16 = 0$

$m = 2, -6$

$\therefore m = 2 \ (\because \ m > 0)$

25. 이차함수 $y = x^2 - ax + 1$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않을 때, $f(a) = a^2 - 2a + 2$ 의 최솟값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ $\sqrt{2}$　　⑤ 5

해설

x 축과 만나지 않으려면
판별식이 0 보다 작아야 한다.

$\Rightarrow D = a^2 - 4 < 0$

$\therefore -2 < a < 2$

$f(a) = (a-1)^2 + 1$

$\therefore\ a = 1$ 일 때, 최솟값 1

26. 이차함수 $y = x^2 - ax + 1$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $a < -1$ 또는 $a > 1$

② $a < -2$ 또는 $a > 2$

③ $1 < a < -1$

④ $-2 < a < 2$

⑤ $a = -1$ 또는 $a = 1$

해설

이차함수 $y = x^2 - ax + 1$ 의 그래프가
x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로
이차방정식 $x^2 - ax + 1 = 0$ 에서
판별식의 값은 양이다.
즉 $D = a^2 - 4 > 0$
$\therefore\ a < -2$ 또는 $a > 2$

27. 포물선 $y = x^2 - 2x + 4k$ 의 그래프가 x 축과 서로 만나지 않을 때의 k 의 범위를 구하면?

① $k < \frac{1}{2}$　② $k < -\frac{1}{2}$　③ $k > \frac{1}{4}$
④ $k < \frac{1}{4}$　⑤ $k > -\frac{1}{4}$

해설

$y = x^2 - 2x + 4k$ 의 그래프가 x 축과
만나지 않으려면 판별식D 가
$D < 0$ 이어야 하므로
$\frac{D}{4} = 1 - 4k < 0$
$\therefore\ k > \frac{1}{4}$

28. 이차함수 $y = x^2 - 2(k-3)x + 4$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 k의 값의 범위는?

① $k < 1$　　② $1 < k < 3$

③ $k < 3$　　④ $3 < k < 5$

⑤ $k < 1$ 또는 $k > 5$

해설

이차함수 $y = x^2 - 2(k-3)x + 4$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2 - 2(k-3)x + 4 = 0$ 의 판별식을 D라 하면 $D > 0$이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = (k-3)^2 - 4 > 0$$

$k^2 - 6k + 5 > 0$, $(k-1)(k-5) > 0$

$\therefore k < 1$ 또는 $k > 5$

29. 이차함수 $y = x^2 - kx + 3k + 2$의 그래프에 의하여 잘려지는 x축의 길이가 3일 때, 모든 실수 k의 값의 합은?

① 6　② 8　③ 10　④ 12　⑤ 14

해설

이차함수 $y = x^2 - kx + 3x + 2$ 의 그래프와 x 축과의 교점의 좌표를 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$ 이라 하면
$\alpha,\ \beta$ 는 이차방정식 $x^2 - kx + 3k + 2 = 0$ 이 두 근이다.
근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = k,\ \alpha\beta = 3k + 2$
잘려지는 x 축의 길이가 3이므로 $|\alpha - \beta| = 3$
이 때, $|\alpha - \beta|^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$이므로 $9 = k^2 - 4(3k + 2)$
$k^2 - 12k - 17 = 0$
따라서 근과 계수의 관계에 의하여 모든 k의 값의 합은 12이다.

30. 이차함수 $y = x^2 - 2(k-1)x + 9$의 그래프가 x축과 만나지 않기 위한 정수 k의 개수는?

① 4개 ② 5개 ③ 6개 ④ 7개 ⑤ 8개

해설

이차함수 $y = x^2 - 2(k-1)x + 9$의 그래프가 x축과 만나지 않으려면

이차방정식 $y = x^2 - 2(k-1)x + 9 = 0$의 판별식을 D라 할 때 $D < 0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - 9 < 0$$

$k^2 - 2k - 8 < 0,\ (k+2)(k-4) < 0$

$\therefore -2 < k < 4$

따라서, k값 중 정수인 것은 $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$의 5 개이다.

31. 이차함수 $y = x^2 - kx + 4$ 의 그래프와 x축이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 k의 값 또는 k의 값의 범위를 구하면?

① $k < -4$ 또는 $k > 4$

② $k < -2$ 또는 $k > 2$

③ $k < -1$ 또는 $k > 1$

④ $k < -\frac{2}{3}$ 또는 $k > \frac{2}{3}$

⑤ $k < -\frac{1}{4}$ 또는 $k > \frac{1}{4}$

해설

이차방정식 $x^2 - kx + 4 = 0$ 에서 $D = (-k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = k^2 - 16$

$D = K^2 - 16 > 0$이어야 하므로 $(k+4)(k-4) > 0$

$\therefore k < -4$ 또는 $k > 4$

32. 이차함수 $y = x^2 - kx + 4$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 상수 k 의 값의 범위를 구하면?

① $k < -2,\ k > 2$　② $k < -4,\ k > 4$　③ $k < -1,\ k > 1$

④ $k < 0,\ k > 4$　⑤ $k < 0,\ k > 2$

해설

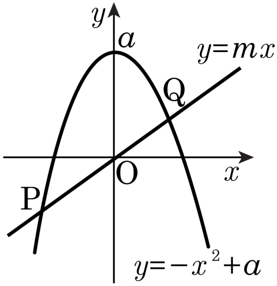
판별식 D 가 $D > 0$ 이어야 하므로

$D = k^2 - 4 \cdot 4 > 0$

$(k-4)(k+4) > 0$

$\therefore\ k < -4,\ k > 4$

33. 다음 그림과 같이 이차함수 $y = -x^2 + a$의 그래프와 직선 $y = mx$가 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 점 Q의 x좌표가 $\sqrt{5} - 1$일 때, $a + m$의 값을 구하여라. (단, a , m 은 유리수)



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y = -x^2 + a$ 와 $y = mx$ 가 만나는 두 점 P, Q 의 x 좌표는 방정식이 $-x^2 + a = mx$ 의 근이다.

점 Q 의 x 좌표가 $\sqrt{5} - 1$이므로

방정식 $x^2 + mx - a = 0$의 한 근이 $\sqrt{5} - 1$ 이다.

그런데 a 와 m 이 유리수이므로 다른 한 근은 $-\sqrt{5} - 1$ 이다.

따라서, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-m = \left(\sqrt{5} - 1\right) + \left(-\sqrt{5} - 1\right) = -2$

$-a = \left(\sqrt{5} - 1\right)\left(-\sqrt{5} - 1\right) = -4$

$\therefore a = 4,\ m = 2 \qquad \therefore a + m = 6$

34. 이차함수$y = ax^2 - 5x - 2$ 의 그래프와 직선 $y = bx + a$ 의 교점의 x 좌표가 각각 $0, -3$ 일 때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

이차함수 $y = ax^2 - 5x - 2$ 의 그래프와
직선 $y = bx + a$ 의 교점의 x 좌표 $0, -3$ 은
이차방정식 $ax^2 - (b+5)x - a - 2 = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\text{두근의합}) = 0 + (-3) = \frac{b+5}{a}$$

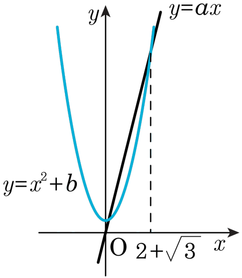
$\therefore\ 3a + b = -5 \cdots$ ㉠

$$(\text{두 근의 곱}) = 0 \cdot (-3) = \frac{-a-2}{a}$$

$\therefore a = -2$

㉠에서 $b = 1$ 이므로 $a + b = -1$

35. 다음 그림과 같이 이차함수 $y = x^2 + b$ 의 그래프와 직선 $y = ax$ 가 서로 두 점에서 만나고, 한 교점의 x 좌표가 $2 + \sqrt{3}$ 일 때, $a + b$ 의 값은?(단, a, b 는 유리수)



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^2 + b = ax$,

즉 $x^2 - ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 이다.

이때, a, b 는 모두 유리수이므로

방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 이면

다른 한 근은 $2 - \sqrt{3}$ 이다.

따라서 근과 계수와의 관계에 의하여

$a = (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4$,

$b = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$

$\therefore\ a + b = 5$