1. 부등식 $|x-1|+|x+2|<9$를 만족하는 정수 x의 개수는?

① 4개　② 5개　③ 6개　④ 7개　⑤ 8개

해설

(i) $x<-2$일 때

$-(x-1)-(x+2)<9$

$-x+1-x-2<9,\ x>-5$

$\therefore -5<x<2$

(ii) $-2\le x<1$일 때

$-(x+1)+x+2<9,\ -x+1+x+2<9$

$0\cdot x<6$이므로 $-2\le x<1$인 범위의 모든 x는 주어진 부등식의 해가 된다.

$\therefore -2\le x<1$

(iii) $x\ge 1$일 때,

$(x-1)+(x+2)<9,\ x<4$

$\therefore 1\le x<4$

(i), (ii), (iii)에서 해는 $-5<x<4$

따라서 정수는 8개

2. 부등식 $|2x-1| \geq 3$을 풀면?

① $x \leq -1$ 또는 $x \geq 1$
② $x \leq -1$ 또는 $x \geq 2$
③ $x \leq -2$ 또는 $x \geq 2$
④ $x < 1$ 또는 $x > 2$
⑤ $x \leq 1$ 또는 $x > 2$

해설
$|2x-1| \geq 3$에서
$2x-1 \leq -3$ 또는 $2x-1 \geq 3$ 정리하면 $x \leq -1$ 또는 $x \geq 2$

3. 이차부등식 $x^2 - 2x - 8 < 0$의 해가 $a < x < b$일 때, $b - a$의 값은?

① 6　　② 7　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

해설

$x^2 - 2x - 8 < 0$ 에서 $(x - 4)(x + 2) < 0$

$\therefore -2 < x < 4$

$b - a = 6$

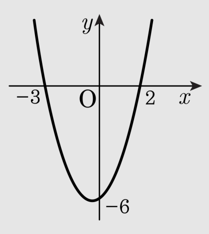
4. 이차함수의 그래프를 이용하여 이차부등식 $x^2 + x - 6 > 0$을 풀면?

① $x < -3$ 또는 $x > 2$　　② $x < -2$ 또는 $x > 3$

③ $x < -1$ 또는 $x > 4$　　④ $x < 0$ 또는 $x > 5$

⑤ $x < 1$ 또는 $x > 6$

해설



이차방정식 $x^2 + x - 6 = 0$ 에서 $(x+3)(x-2) = 0$

$\therefore x = -3$ 또는 $x = 2$

$f(x) = x^2 + x - 6$ 으로 놓으면 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

이차부등식 $f(x) > 0$의 해는 $x < -3$ 또는 $x > 2$

5. 다음 연립부등식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} 2x-4>0 \\ 2x^2-3x+1>0 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $x>2$

해설

부등식 $2x-4>0$에서

$x>2$ ……①

부등식 $2x^2-3x+1>0$에서

$(2x-1)(x-1)>0$

$\therefore x>1$ 또는 $x<\frac{1}{2}$……②

따라서, 구하는 해는 ①과 ②를

동시에 만족하는 x의 값이므로

$\therefore x>2$

6. 연립부등식 $\begin{cases} x-1>2x-3 \\ x^2 \le x+2 \end{cases}$ 의 해는?

① $x \le -1$　　② $-1 \le x < 1$　　③ $-1 \le x < 2$

④ $1 < x < 2$　　⑤ $2 \le x < 4$

해설

$x-1>2x-3$ 에서 $-x>-2$

$\therefore x<2 \cdots$ ㈎

$x^2 \le x+2$ 에서 $x^2-x-2 \le 0$

$\therefore -1 \le x \le 2 \cdots$ ㈏

따라서 ㈎, ㈏의 공통 범위를 구하면

$-1 \le x < 2$ 이다.

7. 연립부등식 $\begin{cases} x^2-4x-5\le 0 \\ 2x^2-5x<3 \end{cases}$ 의 해 중에서 정수인 것의 개수는?

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$x^2-4x-5\le 0 \iff (x+1)(x-5)\le 0$

$\therefore -1\le x\le 5\cdots\cdots$㉠

$2x^2-5x<3 \iff 2x^2-5x-3<0$

$\iff (2x+1)(x-3)<0$

$\therefore -\dfrac{1}{2}<x<3\cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡의 공통 범위는 $-\dfrac{1}{2}<x<3$

따라서, 정수인 것은 0, 1, 2로 3 개다.

8. 연립부등식 $\begin{cases} x^2-9<0 \\ x^2-2x-8 \geq 0 \end{cases}$ 을 풀면?

① $-3<x<3$ ② $-3<x\leq -2$ ③ $-3<x\leq 2$
④ $-2<x\leq 2$ ⑤ $-1<x\leq -2$

해설

$\begin{cases} x^2-9<0 & \cdots (가) \\ x^2-2x-8 \geq 0 & \cdots (나) \end{cases}$

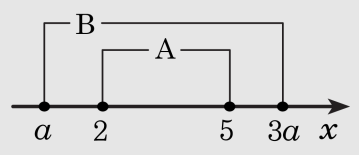
(가)에서 $(x+3)(x-3)<0$
$\therefore -3<x<3$
(나)에서 $(x+2)(x-4)\geq 0$
$\therefore x\leq -2$ 또는 $x\geq 4$
따라서 공통 범위를 구하면
$-3<x\leq -2$

9. 양의 실수 a에 대하여 $-x^2+7x-10 \ge 0$의 모든 해가 $x^2-4ax+3a^2 \le 0$을 만족할 때, a의 값의 범위는?

① $\frac{1}{3} \le a \le 2$　② $\frac{2}{3} \le a \le 2$　③ $\frac{5}{3} \le a \le 2$
④ $\frac{5}{3} \le a \le 5$　⑤ $2 \le a \le 5$

해설

$-x^2 + 7x - 10 \ge 0$
$x^2 - 7x + 10 \le 0$
$(x-2)(x-5) \le 0$
$2 \le x \le 5$
$x^2 - 4ax + 3a^2 \le 0$
$(x-a)(x-3a) \le 0$
$a \le x \le 3a (\because a > 0)$
㉠의 모든 해가 ㉡에 포함되므로



따라서 $a \le 2,\ 3a \ge 5$이므로 $\frac{5}{3} \le a \le 2$

10. 부등식 $2|x+2|+|x-2|<6$을 만족하는 정수 x의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 2개

해설

i) $x<-2$일 때

$-2(x+2)-(x-2)<6,\ x>-\frac{8}{3}$

공통부분은 $-\frac{8}{3}<x<-2$

ii) $-2\le x<2$일 때

$2(x+2)-(x-2)<6,\ x<0$

공통부분은 $-2\le x<0$

iii) $x\ge 2$일 때

$2(x+2)+(x-2)<6,\ x<\frac{4}{3}$

공통부분은 없음

i), ii), iii)을 모두 합하면 $-\frac{8}{3}<x<0$

정수 x : $-2,\ -1$ (2개)

11. 부등식 $|x+1| < 1 + |2-x|$을 풀어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x < 1$

해설

$|x+1| < 1 + |2-x|$ 에서

ⅰ) $x < -1$일 때,

$-(x+1) < 1 + (2-x)$

$\therefore -1 < 3$이므로 성립

$\therefore\ x < -1$

ⅱ) $-1 \le x < 2$일 때,

$x + 1 < 1 + 2 - x$

$\therefore\ 2x < 2$

$\therefore\ x < 1$

조건과 공통 범위를 구하면 $-1 \le x < 1$

ⅲ) $x \ge 2$ 일 때,

$x + 1 < 1 - (2 - x)$

$\therefore\ 1 < -1$ 이므로 모순

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에서 구하는 부등식의 해는 $x < 1$

12. 이차부등식 $[x]^2 + [x] - 12 \le 0$의 해가 $a \le x < b$일 때, $a + b$의 값은?
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$[x]^2 + [x] - 12 \le 0$에서

$([x]+4)([x]-3) \le 0$

$\therefore -4 \le [x] \le 3$

$x = -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$

$\therefore -4 \le x < 4$

따라서 $a = -4,\ b = 4$이므로 $a + b = 0$이다

13. 모든 실수 x에 대하여 $x^2 + px + p$가 -3보다 항상 크기 위한 정수 p의 최댓값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x^2 + px + p > -3$
$x^2 + px + (p+3) > 0$
$D = p^2 - 4(p+3) = p^2 - 4p - 12 < 0$
$(p-6)(p+2) < 0$
$-2 < p < 6$
$\therefore$ 최대정수 : 5

14. 모든 실수 x에 대해 이차부등식$x^2 - x(kx-3)+3 > 0$이 항상 성립하기 위한 정수 k의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

주어진 부등식을 정리하면
$(1-k)x^2 + 3x + 3 > 0$
$D = 3^2 - 4 \times (1-k) \times 3 < 0$
$\therefore k < \dfrac{3}{12} = 0.25$
최대 정수 $k = 0$

15. x에 관한 이차부등식 $x^2 + ax + 2a - 3 > 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하도록 상수 a의 범위를 구하면 $p < a < q$이다. 이 때, pq의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $pq = 12$

해설

$x^2 + ax + 2a - 3 > 0$이 항상 성립할 조건은
판별식 이 $D < 0$을 만족해야 한다.
$D = a^2 - 4(2a - 3) < 0$
$a^2 - 8a + 12 < 0$
$(a - 6)(a - 2) < 0$
$2 < a < 6 \quad \therefore p = 2, q = 6$
$\therefore \ pq = 2 \times 6 = 12$

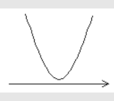
16. 모든 실수 x에 대하여 부등식$(k-2)x^2+2(k-2)x+1>0$이 성립할 때, 실수 k값의 범위가 $m \le k < n$이다. $m+n$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $m+n=5$

해설

① $k=2$일 때 $1>0$ $\therefore$ 성립한다.

②  아래로 볼록 $(k-2)>0$, $k>2$

③ $\frac{D}{4}<0$에서 $(k-2)^2-(k-2)<0$

$(k-2)(k-3)<0$, $2<k<3$

①을 만족하거나 ②와 ③)을 동시에 만족해야 하므로 $2 \le k < 3$

$\therefore m=2, n=3$, $m+n=5$

17. 부등식 $x^2 - kx + 2 > 0$이 항상 성립하도록 하는 상수 k의 범위를 구하면 $a < k < b$이다. 이 때, ab의 값은?

① -10　② -9　③ -8　④ -7　⑤ -6

해설

$x^2 - kx + 2 > 0$이 항상 성립하려면
판별식이 실근을 갖지 않을 때이므로
$D = k^2 - 4 \cdot 2 < 0$
$k^2 - 8 < 0, \left(k - 2\sqrt{2}\right)\left(k + 2\sqrt{2}\right) < 0$
$\therefore -2\sqrt{2} < k < 2\sqrt{2}$
따라서 $a = -2\sqrt{2},\ b = 2\sqrt{2}$이므로
$ab = -2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = -8$

18. 부등식 $-x^2 - kx + k < 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하도록 k의 범위를 정하면 $a < k < \beta$이다. 이 때, $\alpha + \beta$의 값은?

① -4　　② -2　　③ 0　　④ 2　　⑤ 4

해설

$x^2 + kx - k > 0$이 모든 x에 대해서 성립하려면,
판별식이 0보다 작아야 한다
$D = k^2 + 4k < 0$에서
$k(k+4) < 0$, $-4 < k < 0$,
$\alpha = -4$, $\beta = 0$
$\therefore \quad \alpha + \beta = -4$

19. 이차부등식 $x^2 - 2kx + 2k \leq 0$이 해를 갖지 않을 때, 실수 k값의 범위는?

① $-1 \leq k \leq 0$
② $-2 < k < 0$
③ $0 \leq x \leq 2$
④ $0 < k < 2$
⑤ $k < 0$, 또는 $k > 2$

해설

주어진 이차부등식이 해를 갖지 않으려면
방정식 $x^2 - 2kx + 2k = 0$이 허근을 가져야 하므로
$\frac{D}{4} = k^2 - 2k < 0,\ \ k(k-2) < 0$
$\therefore 0 < k < 2$

20. 이차부등식 $(k-1)x^2-2(k-1)x-2>0$이 해를 가지지 않도록 실수 k의 값의 범위는?

① $-1<k<1$ ② $-1 \le k \le 1$ ③ $-1 \le k < 1$
④ $-2<k<1$ ⑤ $-2 \le k \le 1$

해설

해를 가지지 않으므로 모든 실수 x에 대하여
$k-1<0$이고
$(k-1)x^2-2(k-1)x-2 \ge 0$이어야 한다.
i) $k-1<0$에서 $k<1$
ii) $(k-1)x^2-2(k-1)x-2=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(k-1)^2+2(k-1) \le 0,\ k^2-1 \le 0$
$(k+1)(k-1) \le 0 \quad \therefore -1 \le k \le 1$
i), ii)의 공통 범위를 구하면 $-1 \le k < 1$

21. 이차방정식 $x^2-(2k+4)x+2k^2+9=0$이 실근을 갖도록 k의 값 또는 범위를 정하면?

① $k<2$

② $k\le 2$

③ $k=2$를 제외한 모든 실수

④ $-4\le k\le 5$

⑤ k의 값은 존재하지 않는다.

해설

실근을 가지려면 판별식이 0보다 크거나 같아야 하므로

$(k+2)^2-(2k^2+9)\ge 0$

$k^2-4k+5\le 0$

그런데 $k^2-4k+5=(k-2)^2+1>0$

$\therefore$ k의 값은 존재하지 않는다

22. x에 관한 이차부등식 $x^2-(a-6)x+a-3\le 0$을 만족하는 실수 x가 존재할 때, 실수 a의 범위는 ?

① $4\le a\le 12$　② $a\le 4,\ a\ge 12$　③ $6\le a\le 8$

④ $a\le 6,\ a\ge 8$　⑤ $4\le a\le 8$

해설

$x^2-(a-6)x+a-3\le 0$의 실수해가 존재하려면

$D=(a-6)^2-4(a-3)\ge 0$

$a^2-16a+48\ge 0,\ (a-4)(a-12)\ge 0$

$\therefore\ a\le 4,\ a\ge 12$

23. x에 대한 이차방정식 $x^2-2kx-2k+3=0$이 두 실근을 가지도록 실수 k의 값의 범위를 정하면?

① $k \le -3$ 또는 $k \ge 1$　　② $-3 \le k \le 1$

③ $k=-3$ 또는 $k=1$　　④ $k<-3$ 또는 $k>1$

⑤ $-3<k<1$

해설

두 실근을 갖는다는 것은
서로 다른 두 실근 또는 중근을 갖는다는 것이므로
$D' = k^2-(-2k+3) \ge 0$
$k^2+2k-3 \ge 0$
$(k+3)(k-1) \ge 0$
$\therefore\ k \le -3$ 또는 $k \ge 1$

24. 이차함수 $y = x^2 - 4ax + 1$ 의 그래프가 직선 $y = 2x - a$ 의 그래프보다 항상 위쪽에 있도록 하는 상수 a 의 범위를 구하면?

① $a > 0$ ② $-\frac{1}{4} < a < 0$ ③ $-\frac{1}{4} < a < \frac{3}{4}$
④ $-\frac{3}{4} < a < \frac{1}{4}$ ⑤ $-\frac{3}{4} < a < 0$

해설

$$\begin{cases} y = x^2 - 4ax + 1 \\ y = 2x - a \end{cases}$$

근이 존재하지 않아야 하므로

$2x - a = x^2 - 4ax + 1$

$x^2 + (-4a - 2)x + (a + 1) = 0$

$D < 0 :\ (2a + 1)^2 - (a + 1) < 0$

$4a^2 + 3a = a(4a + 3) < 0$

$\therefore\ -\frac{3}{4} < a < 0$

25. 임의의 실수 x 에 대하여 이차함수 $y = x^2 + 2x + 3$ 의 그래프가 항상 직선 $y = kx + 2$ 의 위쪽에 있을 때, 정수 k 의 개수를 구하면?

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

이차함수의 그래프가 항상
직선의 위쪽에 있으므로
$x^2 + 2x + 3 > kx + 2$, $x^2 + (2 - k)x + 1 > 0$
모든 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로
$D = (2 - k)^2 - 4 < 0,\ k(k - 4) < 0$
$\therefore\ \ 0 < k < 4$
따라서 정수 k 는 1, 2, 3 의 3 개이다.