1. x^3+x^2+2를 다항식 x^2+2x-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 나머지를 $R(x)$라 할 때, $Q(x)+R(x)$의 값은?

① $2x-3$　　② $2x$　　③ $3x+2$

④ $4x$　　⑤ $4x+1$

해설

x^3+x^2+2를 x^2+2x-1로 직접 나누면

$Q(x)=x-1,\quad R(x)=3x+1$

$\therefore\ Q(x)+R(x)=4x$

2. $x+y+z=1$, $xy+yz+zx=2$, $xyz=3$ 일 때, $(x+1)(y+1)(z+1)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$(x+1)(y+1)(z+1)$
$=xyz+xy+yz+zx+x+y+z+1$
$=7$

3. 이차항의 계수가 1인 세 이차식 A, B, C가 다음 세 조건을 만족할 때, A를 구하면?

> ㉠ A, B의 최대공약수는 $x-2$이다.
>
> ㉡ B, C의 최대공약수는 $x+1$이다.
>
> ㉢ A, C의 최소공배수는 x^3-2x^2-x+2이다.

① x^2-4x+3　② x^2-3x+2　③ x^2-2x+1
④ x^2-2x-3　⑤ x^2-x+2

해설

이차항의 계수가 1인 세 이차식 A, B, C에 대하여
A, B의 최대공약수가 $x-2$이므로
$A=(x-2)(x-\alpha)$, $B=(x-2)(x-\beta)$
B, C의 최대공약수가 $x+1$이므로
$B=(x+1)(x-2)$, $C=(x+1)(x-\gamma)$
A, C의 최소공배수는
$x^3-2x^2-x+2=(x+1)(x-2)(x-1)$
$\therefore\ x-\alpha=x-\gamma=x-1$
$\therefore\ A=(x-2)(x-1)=x^2-3x+2$

4. $x=\dfrac{1-i}{1+i}$일 때, $x+x^2+x^3+...+x^{2006}+x^{2007}$의 값을 계산하면?

① $-1-i$　　② -1　　③ $-i$

④ 1　　⑤ i

해설

$x=\dfrac{1-i}{1+i}=-i\quad x^2=-1\quad x^3=i\quad x^4=1$

$\therefore x+x^2+x^3+x^4=0$이므로, 4개의 항마다 합이 0이 된다.

$\Rightarrow x+x^2+x^3+\cdots+x^{2006}+x^{2007}$

$=0+0+\cdots+x^{2005}+x^{2006}+x^{2007}$

$=(x^4)^{501}\cdot x+(x^4)^{501}\cdot x^2+(x^4)^{501}\cdot x^3$

$=-i-1+i$

$=-1$

5. $\alpha = -2+i$, $\beta = 1-2i$ 일 때 $\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}$ 의 값은?
(단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ 는 각각 α, β 의 켤레복소수이고, $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

① 1　　② 2　　③ 4　　④ 10　　⑤ 20

해설

$\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}$
$= \alpha(\overline{\alpha}+\overline{\beta})+\beta(\overline{\alpha}+\overline{\beta})$
$= (\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})$
$= (\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})$
$= (-1-i)(-1+i)$
$= 2$

6. 복소수 z의 켤레복소수가 $\bar{z}$일 때, $(2+3i)z+(2-3i)\bar{z}=2$ 를 만족시키는 복소수 z 는?

① 존재하지 않는다. ② 단 한 개 있다.

③ 두 개 뿐이다. ④ 세 개 뿐이다.

⑤ 무수히 많다.

해설

$z=a+bi$ 라 하면 $\bar{z}=a-bi$ (단, $a,\ b$ 는 실수)
$(2+3i)(a+bi)+(2-3i)(a-bi)=2$
$2a+2bi+3ai-3b+2a-2bi-3ai-3b=2$
$4a-6b=2 \qquad \therefore\ 2a-3b=1$
$2a-3b=1$ 을 만족하는 실수 $a,\ b$ 의 순서쌍은 무수히 많으므로 주어진 조건을 만족하는 복소수 z 는 무수히 많다.

7. 이차방정식 $x^2 - ax + 12 = 0$ 의 두 근이 3, b 일 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 28

해설

$x = 3$ 이 $x^2 - ax + 12 = 0$ 의 근이므로
$9 - 3a + 12 = 0 \quad \therefore\ a = 7$
이 때 $x^2 - 7x + 12 = 0$ 에서 $(x-3)(x-4) = 0$
그러므로 $x = 3$ 또는 $x = 4$
$\therefore\ b = 4 \quad \therefore\ ab = 28$

8. $a > 0,\ b > 0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$이고, $a < 0,\ b < 0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$이다. 이러한 성질을 이용하여 이차방정식 $x^2 + 3x + 1 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

$\alpha + \beta = -3,\ \alpha\beta = 1$

$\therefore \alpha < 0,\ \beta < 0$

$\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = -\sqrt{\alpha\beta}$

$(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = (\alpha + \beta) + 2\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$

$= (\alpha + \beta) - 2 \cdot \sqrt{\alpha\beta} = -3 - 2 \cdot 1 = -5$

9. 축의 방정식이 $x = 3$ 이고, 점 $(2,\ 5)$ 를 지나고, y 절편이 37 인 이차함수의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

축의 방정식이 $x = 3$ 이므로
$y = a(x-3)^2 + q$
점 $(2,\ 5)$ 와 y 절편 $(0,\ 37)$를 지나므로
$5 = a + q,\ 37 = 9a + q$
$a = 4,\ q = 1$
$\therefore\ y = 4(x-3)^2 + 1$
따라서 $x = 3$ 일 때, 최솟값은 1 이다.

10. x의 범위가 $-2 \le x \le 3$일 때, 함수 $f(x) = x^2 + 2x + C$ 의 최소값이 4가 되도록 상수 C 의 값을 정할 때, 함수 $f(x)$ 의 최대값은?

① 8　　② 12　　③ 16　　④ 20　　⑤ 24

해설

$f(x) = (x+1)^2 + C - 1$
주어진 범위에서 $x = -1$ 일 때
최소값을 가지므로
$f(-1) = C - 1 = 4 \quad \Rightarrow \quad C = 5$
$\Rightarrow \quad f(x) = (x+1)^2 + 4$
주어진 범위에서 $x = 3$ 일 때 최대값을 가진다.
$\Rightarrow \quad f(3) = 4^2 + 4 = 20$

11. 함수 $f(x) = x^2 - 4x + 2$ 에 대하여 $1 \le x \le 4$ 에서 $f(f(x))$ 의 최솟값은?

① -6 ② -5 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2

해설

$f(x) = x^2 - 4x + 2 = (x-2)^2 - 2$
$1 \le x \le 4$ 에서 $-2 \le f(x) \le 2$ 이므로
$f(x) = t$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= f(t) = t^2 - 4t + 2 \\ &= (t-2)^2 - 2(-2 \le t \le 2) \end{aligned}$$

따라서, $t = 2$ 일 때 최솟값은 -2 이다.

12. 두 방정식 $(x+y-1)(x-y-1)=0$, $x^2-y^2=0$을 동시에 만족하는 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는?

① 없다.　② 1개　③ 2개　④ 3개　⑤ 4개

해설

구하는 순서쌍 $(x,\ y)$는 연립방정식

$$\begin{cases}(x+y-1)(x-y-1)=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-y^2=0 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$ 의 해이다.

㉠에서 $y=\pm(x-1)$ $\cdots\cdots$㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $x^2-(x-1)^2=0$, $2x-1=0$

$\therefore\ x=\frac{1}{2}$, ㉢에서 $y=\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}$

$\therefore\ (x,\ y)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

$\therefore$ 2개

13. x에 대한 삼차식 $f(x)$에 대하여 $f(x)+8$은 $(x+2)^2$으로 나누어 떨어지고, $1-f(x)$는 x^2-1로 나누어 떨어질 때, $f(x)$의 상수항은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

$f(x)+8=(x+2)^2(ax+b)\cdots$㉠
$1-f(x)=(x^2-1)Q(x)\cdots$㉡
㉡에서 $f(1)=1,\ f(-1)=1$
그러므로 ㉠에서
$1+8=9(a+b)\cdots$㉢
$1+8=-a+b\cdots$㉣
㉢, ㉣에서 $a=-4,\ b=5$
$\therefore\ f(x)=(x+2)^2(-4x+5)-8$
$\therefore$ 상수항은 $f(0)=2^2\cdot5-8=12$

14. 1000^{10}을 1001로 나눌 때 몫과 나머지를 각각 $Q(x)$, R라 할 때, 다음 중 나머지 R를 구하기 위한 가장 적절한 식은?

① $x^{10} = xQ(x) + R$

② $x^{10} = (x-1)Q(x) + R$

③ $x^{10} = (x+1)Q(x) + R$

④ $x^{10} = (x-1)^{10}Q(x) + R$

⑤ $x^{10} = (x+1)Q(x) + R + 1$

해설

$1000^{10} = 1001 \cdot Q(x) + R$에서 $1000 = x$라 하면
$x^{10} = (x+1)Q(x) + R$
$x = -1$을 대입하면 $R = 1$을 구할 수 있다.

15. 다음 식을 인수분해 하면 $(x+py)(x+qy+r)^2$ 이다. 이 때, $p^2+q^2+r^2$ 의 값을 구하여라.

$$[x^3-y^3+x^2y-xy^2+2x^2-2y^2+x-y]$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^3-y^3+x^2y-xy^2+2x^2-2y^2+x-y$
$=(x-y)(x^2+xy+y^2)+xy(x-y)+2(x+y)(x-y)+(x-y)$
$=(x-y)\{(x+y)^2+2(x+y)+1\}$
$=(x-y)(x+y+1)^2$
$p=-1, q=1, r=1$
$\therefore\ p^2+q^2+r^2=3$

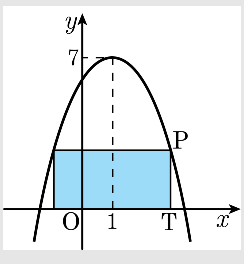
16. 이차함수 $y = -x^2 + 2x + 5$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형에 내접하고, 한 변이 x 축 위에 오는 직사각형을 만들 때, 이 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$y = -x^2 + 2x + 5$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



포물선 위의 임의의 점 P 의 좌표는

$(t,\ -t^2 + 2t + 5)$ 이다.

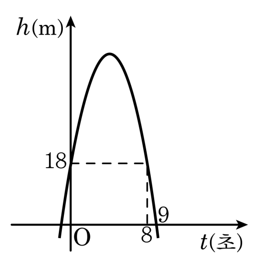
직사각형의 가로의 길이는 $2(t-1)$,

직사각형의 세로의 길이는 $-t^2 + 2t + 5$ 이다.

$$\begin{aligned}(\text{둘레의 길이}) &= 2\{2(t-1) - t^2 + 2t + 5\} \\ &= 2(-t^2 + 4t + 3) \\ &= -2t^2 + 8t + 6 \\ &= -2(t-2)^2 + 14\end{aligned}$$

$t = 2$ 일 때, 최댓값은 14 이다.

17. 다음은 지면으로부터 18m 의 높이에서 던져 올린 물체의 t 초 후의 높이 hm 를 그래프로 나타낸 것이다. 이 물체가 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간과 그 때의 높이를 구하여라.



▶ 답: 초

▶ 답: m

▷ 정답: 4초

▷ 정답: 50m

해설

이차함수의 식을 $h = at^2 + bt + c$ 로 놓고 세 점 $(0,\ 18)$, $(8,\ 18)$, $(9,\ 0)$ 의 좌표를 각각 대입하면
$18 = c$, $18 = 64a + 8b + c$, $0 = 81a + 9b + c$ 이므로 연립하여 풀면 $a = -2$, $b = 16$, $c = 18$ 이다.
즉, $h = -2t^2 + 16t + 18 = -2(t-4)^2 + 50$
따라서 $t = 4$ 일 때, h 는 최댓값 50 을 갖는다.

18. 삼차방정식 $(x-1)(x^2-ax+2a)=0$이 중근을 가질 때, 실수 a의 값을 모두 구하면?

① -1 ② $0, 8$ ③ $-1, 8$
④ $-1, 0, -8$ ⑤ $-1, 0, 8$

해설
(ⅰ) $x=1$을 중근으로 가질 때
$x=1$을 $x^2-ax+2a=0$에 대입하면 $a=-1$
(ⅱ) $x^2-ax+2a=0$이 중근을 가질 때
$D=a^2-8a=0$
$\therefore\ a=0$ 또는 8
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a=-1,\ 0,\ 8$

19. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy - 2y^2 = 8 \cdots\cdots ㉠ \\ xy + 3y^2 = 1 \quad\quad \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 의 근 x, y를 구할 때, $x+y$ 의 값을 모두 구하면?

① $-\frac{7}{2}, -1,\ 1,\ \frac{7}{2}$　　② $-\frac{7}{2},\ \frac{7}{2}$　　③ $-1,\ 1$
④ $-\frac{7}{2},\ 1$　　⑤ $1,\ \frac{7}{2}$

해설

㉠ − ㉡ × 8 에서 $x^2 - 11xy - 26y^2 = 0$, $(x+2y)(x-13y) = 0$

$x + 2y = 0 \cdots\cdots$ ㉢

$x - 13y = 0 \cdots\cdots$ ㉣

㉡, ㉢에서 $y^2 = 1$

$\therefore\ y = \pm 1,\ x = \mp 2$(복호동순)

㉡, ㉣에서 $16y^2 = 1$

$\therefore\ y = \pm\frac{1}{4},\ x = \pm\frac{13}{4}$(복호동순)

$\therefore\ x + y = -1,\ 1,\ \frac{7}{2},\ -\frac{7}{2}$

20. $(x-2)^4 = a(x-3)^4 + b(x-3)^3 + c(x-3)^2 + d(x-3) + e$ 가 x 에 대한 항등식일 때, $2c - bd$ 의 값은?

① -8　② -4　③ 0　④ 4　⑤ 8

해설

x 에 대한 항등식 이므로 x 에 대한 적당한 수를 넣어 식을 만든다.

i) $x = 3 \Rightarrow e = 1$

ii) $x = 2 \Rightarrow a - b + c - d + 1 = 0$

iii) $x = 4 \Rightarrow a + b + c + d + 1 = 16$

iv) $x = 4 \Rightarrow 16a - 8b + 4c - 2d + 1 = 1$

v) $x = 5 \Rightarrow 16a + 8b + 4c - 2d + 1 = 1$

위 5개의 식을 연립하여 a, b, c, d 의 값을 구한다.

$a = 1,\ b = 4,\ c = 6,\ d = 4,\ e = 1$

$\therefore 2c - bd = -4$

해설

$x - 2 = t$ 라 하면 $x - 3 = t - 1$

(준식) : $t^4 = a(t-1)^4 + b(t-1)^3 + c(t-1)^2 + d(t-1) + e$

다음처럼 조립제법으로 $t - 1$ 로 계속 나눌 때, 나오는 나머지가 순서대로 e, d, c, b 이고 마지막 몫이 a 이다.

$$
\begin{array}{r|rrrrl}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \boxed{1} = e \\
 & & 1 & 2 & 3 & \\
\hline
1 & 1 & 2 & 3 & \boxed{4} = d & \\
 & & 1 & 3 & & \\
\hline
1 & 1 & 3 & \boxed{6} = c & & \\
 & & 1 & & & \\
\hline
a = & 1 & \boxed{4} = b & & &
\end{array}
$$

$\therefore 2c - bd = -4$