1. 집합 $A = \{x \mid x = 3 \times n - 1,\ n = 5$ 미만의 자연수$\}$ 일 때, 집합 A 의 모든 원소의 합을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 26

해설

$A = \{2,\ 5,\ 8,\ 11\}$ 이므로 모든 원소의 합은 $2 + 5 + 8 + 11 = 26$ 이다.

2. 집합 $A = \{1,\ 2,\ \varnothing,\ \{1,\ 2\}\}$ 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\{1,\ 2\} \subset A$　② $\varnothing \subset A$　③ $\{\varnothing, 2\} \subset A$

④ $A \subset A$　⑤ $\{\varnothing, \{1, 2\}\} \not\subset A$

해설

$\{\varnothing, \{1, 2\}\} \subset A$ 이다.

3. 집합 $A = \{x \mid x$는 12의 약수$\}$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

① 공집합은 집합 A의 부분집합이 아니다.

② 집합 $B = \{x \mid x$는 4 의 약수$\}$는 집합 A의 부분집합이 아니다.

③ $\{2, 3, 4\}$는 집합 A의 부분집합이다.

④ $n(A) = n(B)$를 만족하는 집합 B는 하나만 존재한다.

⑤ 집합 $B = \{1, 2, 3, 6, 12\}$일 때, $A = B$이다.

해설

집합 A를 원소나열법으로 나타내면
$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$이다.
① 공집합은 모든 집합의 부분집합이다.
② 집합 $B = \{1, 2, 4\}$이므로 집합 A의 부분집합이다.
③ $\{2, 3, 4\} \subset A$이다.
④ $n(A) = 4$이고, $n(B) = 4$인 집합은 무수히 많이 존재한다.
⑤ $4 \notin B$이므로 $A \neq B$이다.

4. 전체집합 $U = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 에 대하여 조건 $x^2 - 2 > 0$ 의 진리집합은?

① $\varnothing$ ② $\{0,\ 1\}$ ③ $\{3,\ 4,\ 5\}$

④ $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ ⑤ U

해설

주어진 조건 $x^2 - 2 > 0$ 에
$x = 0$ 을 대입하면 $0 - 2 > 0$ (거짓)
$x = 1$ 을 대입하면 $1 - 2 > 0$ (거짓)
$x = 2$ 를 대입하면 $4 - 2 > 0$ (참)
$x = 3$ 을 대입하면 $9 - 2 > 0$ (참)
$x = 4$ 를 대입하면 $16 - 2 > 0$ (참)
$x = 5$ 를 대입하면 $25 - 2 > 0$ (참)
따라서 구하는 진리집합은 $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

5. 조건 p, q 가 $p : x < 1$ 또는 $x \geq 2$, $q : \frac{a}{2} < x \leq 3a$ 일 때, '$\sim p$ 이면 q 이다.' 가 참이 되기 위한 a 의 범위는?

① $\frac{2}{3} < a \leq 2$ ② $\frac{2}{3} \leq a < 2$ ③ $1 \leq a < 2$

④ $1 < a \leq 2$ ⑤ $\frac{2}{3} < a < 2$

해설

명제의 대우는 '$\sim q$ 이면 p 이다'

$\sim q : x \leq \frac{a}{2}$ 또는 $x > 3a$, $p : x < 1$ 또는 $x \geq 2$ 이므로 명제의 대우가 참이 되려면 $\frac{a}{2} < 1$ 이고 $3a \geq 2$ 가 되어야 한다.

$a < 2$ 이고 $a \geq \frac{2}{3}$ 이므로 $\frac{2}{3} \leq a < 2$ 이다.

6. $p \to q$ 와 $q \to \sim r$ 가 모두 참일 때, 다음 중에서 반드시 참이라고 할 수 없는 것은?

① $p \to \sim r$　② $\sim q \to \sim p$　③ $r \to \sim q$
④ $\sim p \to r$　⑤ $r \to \sim p$

해설

$p \to q$ 가 참이고 $q \to \sim r$ 가 참이므로 삼단논법에 의하여 $p \to \sim r$ (①) 이 참이고, 대우 $r \to \sim p$ (⑤) 도 참이다.
또, 각각의 대우 $\sim q \to \sim p$ (②), $\sim r \to \sim q$ (③) 가 모두 참이다.

7. 다음 두 조건 $p : 2 \le x \le 5$, $q : x \ge a$ 에 대하여 p 는 q이기 위한 충분조건이 되도록 상수 a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

p 가 q 이기 위한 충분조건이므로 각각의 진리집합을 P, Q 라 할 때, $P \subset Q$ 이 성립해야 한다. 따라서 $2 \le x \le 5$ 를 만족하는 영역은 $x \ge a$를 만족하는 영역에 포함되어야 함으로 $a \le 2$
따라서 a의 최댓값은 2

8. 실수 a, b, c, x, y에 대하여 항상 성립하는 부등식(절대부등식)을 다음 [보기] 중에서 고를 때, 옳은 표현의 개수는?

보기

(가) $x^2 - xy + y^2 \geq 0$
(나) $x^2 - x + 1 > 0$
(다) $|a + b| \leq |a| + |b|$
(라) $a + b \geq 2\sqrt{ab}$
(마) $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$
(바) $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$

① 6개 ② 5개 ③ 4개 ④ 3개 ⑤ 2개

해설

(라) $a + b \geq 2\sqrt{ab}$(단, $a = b$일때 등호성립)
(마) $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$(단, $a = b = c$일때 등호성립)

9. $a>0$, $b>0$일 때, 다음 식의 최솟값을 구하여라.

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right)=ab+\frac{4}{ab}+5$$

$$\geq 2\sqrt{ab\cdot\frac{4}{ab}}+5=9$$

따라서, 최솟값은 9

10. $a>0$, $b>0$, $c>0$일 때, $\frac{2b}{a}+\frac{2c}{b}+\frac{2a}{c}$의 최소값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 6

해설

산술-기하평균 부등식에 의해,

$$\frac{2b}{a}+\frac{2c}{b}+\frac{2a}{c} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{2b}{a} \times \frac{2c}{b} \times \frac{2a}{c}} = 3 \times 2 = 6$$

$$\therefore \ \frac{2b}{a}+\frac{2c}{b}+\frac{2a}{c} \geq 6$$

11. 제곱의 합이 일정한 두 실수 x, y에 대하여 $2x+3y$의 값이 최대일 때, x와 y사이의 관계는?

① $x=y$　　② $2x=3y$　　③ $3x=2y$

④ $x=y^2$　　⑤ $x^2=y^2$

해설

$x^2+y^2=k$라 하면

$(x^2+y^2)(2^2+3^2) \geq (2x+3y)^2$

($\because$코시-슈바르츠 부등식에 의하여)

$\therefore\ 13k \geq (2x+3y)^2$

$\therefore -\sqrt{13k} \leq 2x+3y \leq \sqrt{13k}$

이 때, 등호는 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}$일 때 성립하므로

$3x=2y$

12. 함수 $f(x)$가 $f(x)=x^2+2x-3$ 이고 임의의 실수 x에 대하여 $g(x+1)=f(x-1)$이 성립할 때, $g(0)$의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** -3

해설

등식 $g(x+1)=f(x-1)$의 양변에
$x=-1$을 대입하면

$$\begin{aligned} g((-1)+1) = g(0) &= f((-1)-1) \\ &= f(-2) = (-2)^2 + 2\times(-2) - 3 \\ &= -3 \end{aligned}$$

13. 두 함수 $f(x)=2x+5$, $g(x)=-3x+k$에 대하여 $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$가 성립할 때, 상수 k 의 값은?

① -20 ② -10 ③ 0 ④ 10 ⑤ 20

해설

$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$에서

$-6x+2k+5=-6x-15+k$

$\therefore\ k=-20$

14. $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ 일 때, $g(f(x)) = x$가 되는 함수 $g(x)$는?

① $1-x$ ② $\dfrac{1}{1-x}$ ③ $\dfrac{x}{x-1}$ ④ $\dfrac{x-1}{x}$ ⑤ $\dfrac{x-1}{x+1}$

해설

$f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ 일 때

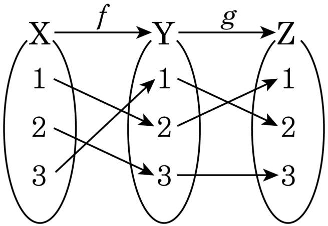
$g(f(x)) = x$에서 $f(x) = t$로 놓으면

$\dfrac{1}{1-x} = t$ 에서 $(1-x)t = 1,\ t - xt = 1$

$xt = t-1,\ \ x = \dfrac{t-1}{t}$ 이므로 $g(t) = \dfrac{t-1}{t}$

$\therefore\ g(x) = \dfrac{x-1}{x}$

15. 두 함수 f, g의 대응 관계가 다음 그림과 같을 때, $(f^{-1} \circ g)(2)$ 의 값은 얼마인가?



① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$(f^{-1} \circ g)(2) = f^{-1}(g(2)) = f^{-1}(1)$

f 의 역대응을 살펴보면 $f^{-1}(1) = 3$

16. $x^4-5x^2+1=0$이고 $x<-1$일 때 $x-\frac{1}{x}$의 값을 구하면?

① $-\sqrt{3}$ ② $-\sqrt{2}$ ③ 1 ④ $\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{2}$

해설

$x^4-5x^2+1=0$

$\Rightarrow \quad x^2+\frac{1}{x^2}=5$

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2=3$

$x-\frac{1}{x}=-\sqrt{3}\ (\because\ x<-1)$

17. 0이 아닌 실수 x, y가 $\dfrac{x-y}{4x+2y}=\dfrac{1}{3}$을 만족할 때, 유리식 $\dfrac{x^2-5y^2}{2xy}$이 값은?

① -2 ② 1 ③ 0 ④ 2 ⑤ 5

해설

$$\frac{x-y}{4x+2y}=\frac{1}{3}\Rightarrow 3x-3y=4x+2y \qquad x=-5y$$

$$\therefore\ \frac{x^2-5y^2}{2xy}=\frac{20y^2}{-10y^2}=-2$$

18. 유리식 $\frac{b+3c}{2a}=\frac{3c+2a}{b}=\frac{2a+b}{3c}=k$일 때, k의 값을 구하면? (단, $abc \neq 0$)

① 2 또는 -1　② 0 또는 -1　③ -1 또는 -1
④ 2 또는 3　⑤ -2 또는 -1

해설

$$\frac{b+3c}{2a}=\frac{3c+2a}{b}=\frac{2a+b}{3c}=k$$

$$\frac{b+3c}{2a}=k,\ \frac{3c+2a}{b}=k,\ \frac{2a+b}{3c}=k$$

각각 정리하면

$b+3c=2ak \cdots$ ①

$3c+2a=bk \cdots$ ②

$2a+b=3ck \cdots$ ③

① + ② + ③ : $2(b+3c+2a)=k(2a+b+3c)$

$\Rightarrow k=2$ 또는 $2a+b+3c=0$

$2a+b+3c=0$ 인 경우,

①에 대입해 보면 $-2a=2ak,\ k=-1$

$\therefore k=2,\ -1$

19. $y=\dfrac{2x}{2x+1}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 3, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프는?

① $y=2-\dfrac{2x}{2x-5}$ ② $y=2+\dfrac{2x}{2x-5}$

③ $y=3-\dfrac{1}{2x-5}$ ④ $y=2+\dfrac{x}{2x-5}$

⑤ $y=3+\dfrac{3x}{2x-5}$

해설

$x \to x-3$, $y \to y-2$를 식에 대입하면

$$y=\frac{2x}{2x+1}=\frac{2(x-3)}{2(x-3)+1}+2$$

$$=\frac{2x-6}{2x-5}+2$$

$$=\frac{(2x-5)-1}{2x-5}+2$$

$$=3-\frac{1}{2x-5}$$

20. 다음 중 함수 $y=\dfrac{5}{x+3}-5$의 그래프가 지나지 않는 사분면은?

① 제1사분면 ② 제2사분면

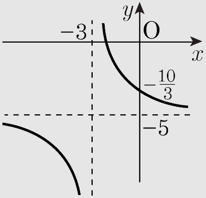
③ 제3사분면 ④ 제4사분면

⑤ 모든 사분면을 지난다.

해설

$$y=\frac{5}{x+3}-5$$

$x=0$일 때 $y=\dfrac{5}{0+3}-5=-\dfrac{10}{3}$



따라서 제1사분면을 지나지 않는다.

21. 무리식 $\sqrt{2x+3}-\dfrac{2}{\sqrt{5-x}}$의 값이 실수가 되도록 하는 정수 x의 개수는?

① 3개　② 4개　③ 5개　④ 6개　⑤ 7개

해설

$2x+3 \geq 0,\ 5-x>0$

$\therefore -\dfrac{3}{2} \leq x < 5$

따라서 정수 x는 $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$의 6개이다.

22. 실수 x, y에 대하여 $\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = -\sqrt{\dfrac{y}{x}}$일 때, 다음 식을 간단히 하면?

$$\sqrt{x^2} + ^3\sqrt{(x+y)^3} + \sqrt[4]{(x-y)^4}$$

① x
② $x-y$
③ $-x+y$
④ $-x-y$
⑤ $-x+2y$

해설

$\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = -\sqrt{\dfrac{y}{x}} \Leftrightarrow x < 0,\ y \geq 0$이므로

$\sqrt{x^2} = |\ x\ | = -x$, $\sqrt[3]{(x+y)^3} = x+y$, $\sqrt[4]{(x-y)^4} = |\ x-y\ | = -x+y$

$\therefore\ \sqrt{x^2} + ^3\sqrt{(x+y)^3} + \sqrt[4]{(x-y)^4}$

$= -x+x+y-x+y = -x+2y$

23. $x = 2 + \sqrt{3}$, $y = 2 - \sqrt{3}$일 때, $\sqrt{x} + \sqrt{y}$의 값으로 옳은 것은?

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

해설

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = x + y + 2\sqrt{xy}(x > 0, y > 0)$$
$$= 4 + 2 = 6$$
$$\therefore \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{6}(\because \sqrt{x} + \sqrt{y} > 0)$$

해설

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}$$
$$= \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}} + \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{(\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}$$

24. 함수 $y = \sqrt{-2x+a}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하였더니 함수 $y = \sqrt{-2x+4} - 3$의 그래프와 겹쳐졌다. 이 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

▷ 정답 : $b = -3$

해설

함수 $y = \sqrt{-2x+a}$의 그래프를
x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 b만큼
평행이동한 함수의 그래프의 식은
$y = \sqrt{-2(x-1)+a} + b = \sqrt{-2x+2+a} + b$
이 식이 $y = \sqrt{-2x+4} - 3$과 같으므로
$2 + a = 4,\ b = -3$
$\therefore\ a = 2,\ b = -3$

25. 함수 $y = 1 - \sqrt{2-x}$의 그래프에 대한 설명 중 옳은 것은?

① 정의역은 $\{x \mid x \geq 2\}$이다.

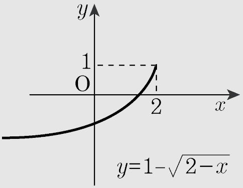
② 치역은 $\{y \mid y \geq 1\}$이다.

③ 그래프는 점 $(-2,\ -1)$ 을 지난다.

④ 그래프는 $y = -\sqrt{x}$ 의 그래프를 평행이동한 것이다.

⑤ 그래프는 제 1, 2, 3사분면을 지난다.

해설



① 정의역은 $\{x \mid x \leq 2\}$이다.
② 치역은 $\{y \mid y \leq 1\}$이다.
④ 그래프는 $y = -\sqrt{-x}$ 의 그래프를 평행이동한 것이다.
⑤ 그래프는 제 1, 3, 4사분면을 지난다.

26. $-\frac{1}{3} \le x \le \frac{8}{3}$ 에서 함수 $y = \sqrt{3x+a}+2$ 의 최댓값이 b , 최솟값이 2 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$y = \sqrt{3x+a}+2 = \sqrt{3\left(x+\frac{a}{3}\right)}+2$$

주어진 함수의 그래프는 $y = \sqrt{3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{a}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이므로 x 의 값이 증가할 때, y 의 값도 증가한다.

i) $x = -\frac{1}{3}$ 일 때 최솟값을 가지므로

$$2 = \sqrt{3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+a}+2 \quad \therefore\ a = 1$$

ii) $x = \frac{8}{3}$ 일 때 최댓값을 가지므로

$$b = \sqrt{3\cdot\frac{8}{3}+1}+2 = 5$$

i), ii) 에서 $a+b = 1+5 = 6$

27. 두 함수 $y = \sqrt{x+3}$과 $y = x+k$의 그래프가 서로 다른 두 개의 교점을 갖도록 상수 k의 값의 범위를 구하면?

① $1 \le k < \frac{13}{4}$　② $2 \le k < \frac{13}{4}$　③ $3 \le k \le \frac{13}{4}$

④ $3 < k < \frac{13}{4}$　⑤ $3 \le k < \frac{13}{4}$

해설

직선과 포물선이 접하려면 $\sqrt{x+3} = x+k$

$\therefore\ x+3 = (x+k)^2$

$x^2 + (2k-1)x + (k^2-3) = 0$ 에서

$D = (2k-1)^2 - 4(k^2-3) = 0$

$4k^2 - 4k + 1 - 4k^2 + 12 = 0$

$\therefore\ -4k + 13 = 0$

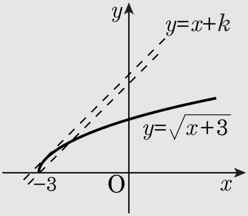
$\therefore\ k = \frac{13}{4}$

또, 직선 $y = x+k$가 점 $(-3,\ 0)$을 지날 때

$0 = -3 + k \quad \therefore\ k = 3$

따라서 서로 다른 두 개의 교점을 가질 때의 k 의 값의 범위는

$3 \le k < \frac{13}{4}$



28. 정의역이 $\{x \mid x > -1\}$ 인 두 함수 $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, $g(x) = \sqrt{3x+4} - 2$ 에 대하여 $(g \circ (f^{-1} \circ g)^{-1} \circ g)(4)$ 의 값을 구하면?

① -1　② $-\dfrac{3}{4}$　③ $\dfrac{1}{3}$　④ $\dfrac{2}{3}$　⑤ $\dfrac{5}{4}$

해설

$$\begin{aligned}&(g \circ (f^{-1} \circ g)^{-1} \circ g)(4)\\ &= (g \circ (g^{-1} \circ f) \circ g)(4)\\ &= ((g \circ g^{-1}) \circ f \circ g)(4)\\ &= (f \circ g)(4)\end{aligned}$$

이때, $g(4) = \sqrt{3 \cdot 4 + 4} - 2 = 2$ 이므로

구하는 값은 $f(g(4)) = f(2) = \dfrac{1}{3}$ 이다.

29. 무리함수 $y = \sqrt{x-a}+1$에 대하여 $f^{-1}(2)=3$일 때, 상수 a의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(3)=2$

$\therefore 2=\sqrt{3-a}+1$

$\therefore a=2$

30. 두 집합 $A=\{x \mid x$는 9의 배수$\}$, $B=\{x \mid x$는 $\boxed{}$의 배수$\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 일 때, $\boxed{}$안에 들어갈 수 있는 수를 모두 골라라.

2, 3, 9, 11, 15, 18

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 9

해설

$A \subset B$ 이면 $\boxed{}$는 9 의 약수이어야 한다. 따라서, $\boxed{}$안에 들어갈 수 있는 수는 1, 3, 9 중 하나이며 보기 중에는 3, 9 이다.

31. 다음 조건을 만족하는 두 집합 A, B 에 대하여 $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

㉠ $A=\{2,\ a,\ a^2\}$, $B=\{b,\ c,\ 4\}$
㉡ $A\subset B$, $B\subset A$
㉢ a, b, c 가 서로 다른 자연수

▶ 답 :

▷ 정답 : 22

해설

$A\subset B$, $B\subset A$ 이므로 $A=B$

$4\in B$ 이므로 $4\in A$

$a=4$ 또는 $a^2=4$

(i) $a=4$ 일 때, $A=\{2,\ 4,\ 16\}$, $B=\{b,\ c,\ 4\}$

$\therefore\ b=2,\ c=16$ 또는 $b=16,\ c=2$

(ii) $a^2=4$ 일 때, $a=2$ (a 는 자연수)

$A=\{2,\ 2^2\}=\{2,\ 4\}$, $B=\{b,\ c,\ 4\}$

b 또는 c 가 2 이어야 하므로 a, b, c 가 서로 다른 자연수가 될 수 없다.

$\therefore\ a+b+c=4+2+16=22$

32. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합 중에서 1 또는 2 를 포함하는 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 24 개

해설

(i) 1 을 포함하는 경우

$2^{5-1} = 2^4 = 16$ (개)

(ii) 2 를 포함하는 경우

$2^{5-1} = 16$ (개)

(iii) 1 과 2 를 모두 포함하는 경우

$2^{5-2} = 8$ (개)

따라서 구하는 부분집합의 개수는

$16 + 16 - 8 = 24$ (개) 이다.

33. 두 집합 $A = \{4, 6, x\}, B = \{1, 3, x+3\}$ 에 대하여 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 를 만족할 때, x 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$A \cup B = \{1, 3, 4, 6, x, x+3\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 이므로

$x = 2,\ x + 3 = 5$ 이다. 따라서 $x = 2$

34. 두 집합 A, B에 대하여 $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, $B = \{5, 9, 14\}$ 이고 $A \cap X = X$, $(A \cap B) \cup X = X$ 를 만족할 때 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고르면? (정답 2 개)

① $X \subset A$

② $X \subset (A \cap B)$

③ $\{5, 9\} \subset X$

④ $(A \cap B) \subset X \subset A$

⑤ $(A \cap B) \subset X \subset B$

해설

$A \cap X = X$ 일 때 $X \subset A$ 이고 $(A \cap B) \cup X = X$ 이면 $(A \cap B) \subset X$ 를 만족한다.

② $(A \cap B) \subset X$ 이므로 옳지 않다.

③ $A \cap B = \{5, 9\}$ 이므로 $\{5, 9\} \subset X$ 이다.

⑤ $(A \cap B) \subset X \subset A$ 이지만 $X \subset B$ 라고 할 수 없기 때문에 $(A \cap B) \subset X \subset B$ 이라고 할 수 없다.

35. 전체집합 $U = \{2,4,6,8,10\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{2,6,8\}$, $B^C \cap A = \{8\}$ 일 때, 집합 B 가 될 수 있는 모든 집합의 개수를 구하여라.

▶ **답 :** ______ 개

▷ **정답 :** 4 개

해설

$A = \{2,6,8\}$, $B^C \cap A = \{8\}$ 이므로 남은 원소는 4, 10 이므로 B 가 될 수 있는 모든 집합의 개수는 4개이다.

36. 다음 중 옳은 것은?

① $A \subset B$ 이면 $A \cap B = B$

② $B \subset A$ 이면 $A \cup B = B$

③ $A \cup \varnothing = \varnothing$

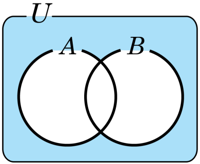
④ $A \subset B,\ B \not\subset A$ 이면 $A \cap B = A$

⑤ $A \subset (A \cap B) \subset (A \cup B)$

해설

① $A \subset B$ 이면 $A \cap B = A$
② $B \subset A$ 이면 $A \cup B = A$
③ $A \cup \varnothing = A$
⑤ $(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B)$

37. 다음 중 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분이 나타내는 집합을 모두 고르면?



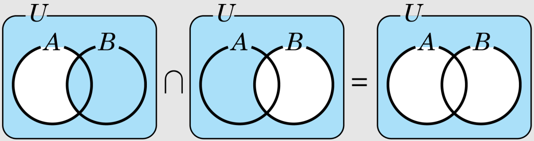
① $(A \cap B)^c$ ② $A^c \cap B^c$

③ $U-(A \cap B)$ ④ $U-(A \cup B)$

⑤ $(A \cup B)^c$

해설

$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$

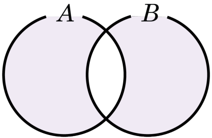


38. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 연산 $\triangle$를 $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$로 정의할 때, 다음 중에서 $(A \triangle B) \triangle A$와 같은 집합은?

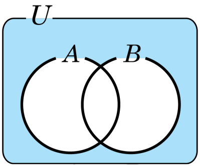
① A　　② B　　③ $A \cap B$　　④ $A \cup B$　　⑤ $A - B$

해설

$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$ 를 벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같다. $(A \triangle B) \triangle A = [(A \triangle B) - A] \cup [A - (A \triangle B)] = (B - A) \cup (A \cap B) = B$



39. 다음 벤 다이어그램에서 $n(U)=45$, $n(A)=17$, $n(B)=24$, $n(A\cap B)=8$일 때, 색칠한 부분에 해당하는 집합의 원소의 개수를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

색칠하지 않은 부분이 의미하는 집합은 $A\cup B$이다.
따라서 색칠한 부분에 해당하는 원소의 개수는 전체집합의 원소의 개수에서 $A\cup B$의 원소의 개수를 뺀 것과 같다.
$n(A\cup B)=17+24-8=33$이므로 $n(U)-n(A\cup B)=45-33=12$이다.

40. 세 조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R라고 하면 $P \cup Q = P, Q \cap R = R$ 인 관계가 성립한다. 이 때, 다음 중 반드시 참인 명제가 <u>아닌</u> 것은?

① $r \to p$ ② $\sim p \to \sim q$ ③ $\sim p \to \sim r$

④ $\sim r \to \sim p$ ⑤ $\sim q \to \sim r$

해설

$P \cup Q = P, Q \cap R = R$ 이면

$Q \subset P, R \subset Q$ 이므로 $q \to p$, $r \to q$ 가 참

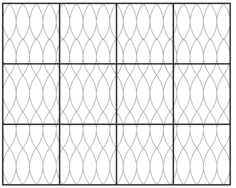
$R \subset Q \subset P$ 이므로 $r \to p$ 가 참

$Q \subset P, R \subset Q$ 이면 $Q^c \supset P^c, R^c \supset Q^c$ 이므로 $\sim p \to \sim q$, $\sim q \to \sim r$ 이 참

해설

'주어진 명제가 참일 때, 그 대우도 참'을 이용하여 $q \to p$, $r \to q$ 가 참이면 $\sim p \to \sim q$, $\sim q \to \sim r$ 가 참임을 쉽게 판단할 수 있다.

41. 어떤 농부가 길이 120 m 인 철망을 가지고 아래 그림과 같이 열두 개의 작은 직사각형 모양으로 이루어진 가축의 우리를 만들려고 한다. 전체 우리의 최대넓이를 구하여라.



① $120\,\mathrm{m}^2$ ② $180\,\mathrm{m}^2$ ③ $240\,\mathrm{m}^2$

④ $300\,\mathrm{m}^2$ ⑤ $360\,\mathrm{m}^2$

해설

전체의 가로를 x, 세로를 y라 하면

$4x+5y=120$

넓이 : xy

$4x+5y=120\ge 2\sqrt{4x\cdot 5y}$

$60\ge\sqrt{20xy}$, $3600\ge 20xy$

$\therefore 180\ge xy$

따라서 넓이의 최대값은 180

해설

$$\begin{aligned}xy&=x\times\frac{1}{5}(120-4x)\\&=-\frac{4}{5}x^2+24x\\&=-\frac{4}{5}(x^2-30x+225-225)\\&=-\frac{4}{5}(x-15)^2+180\end{aligned}$$

$x=15(\mathrm{m}),\ y=12(\mathrm{m})$ 일 때,

최대넓이는 $180\,\mathrm{m}^2$

42. 함수 $f(x)=x+3$ 에 대하여 $f^1=f,\ f^{n+1}=f\circ f^n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 으로 정의할 때, $f^{100}(100)$ 의 값은?

① 300　② 400　③ 500　④ 600　⑤ 700

해설

$f^1(x)=x+3$
$f^2(x)=f(f^1(x))=f(x+3)=x+6$
$f^3(x)=f(f^2(x))=f(x+6)=x+9$

$\vdots$ 이므로
$f^n(x)=x+3n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 으로
추정할 수 있다.
따라서, $f^{100}(x)=x+300$ 이므로
$f^{100}(100)=100+300=400$

43. 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자. $x \neq 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f\left(2g(x) - \dfrac{x}{x-1}\right) = x$ 라 할 때, $f(2)$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(f^{-1}(x)) = x$

$\therefore\ 2g(x) - \dfrac{x}{x-1} = g(x)$

$\Rightarrow g(x) = \dfrac{x}{x-1}$

$f(2) = k$ 라고 하면

$g(k) = 2 \Rightarrow k = 2$

44. $\begin{cases} 2x+1 & (x \geq 1) \\ x+2 & (x < 1) \end{cases}$ 에 대하여 $f^{-1}(5)+f^{-1}(k)=-2$ 일 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k=-2$

해설

$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & (x \geq 1) \\ x+2 & (x < 1) \end{cases}$ 에서

$x \geq 1$ 일 때, $f(x) \geq 3$ 이며

$x < 1$ 일 때, $f(x) < 3$ 이다.

이 때, $f^{-1}(5)+f^{-1}(k)=-2$ 에서

$f^{-1}(5)=a$ 라고 놓으면

$f(a)=5 \geq 3$ 이므로 $f(a)=2a+1=5$

$\therefore a=2$

그러므로 $f^{-1}(k)=-4$

$f(-4)=-4+2=k\ (\because -4<3)$

$\therefore k=-2$

45. $2 \le x \le 4$일 때, 함수 $y = \dfrac{3x-4}{x-1}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 한다. Mm의 값은?

① $\dfrac{2}{3}$　② $\dfrac{4}{3}$　③ $\dfrac{8}{3}$　④ $\dfrac{16}{3}$　⑤ $\dfrac{20}{3}$

해설

$$y = \frac{3x-4}{x-1} = \frac{-1}{x-1} + 3$$

$x = 2$일 때 최소이므로, $M = \dfrac{-1}{2-1} + 3 = 2$

$x = 4$일 때 최대이므로, $m = \dfrac{-1}{4-1} + 3 = \dfrac{8}{3}$

$$\therefore \quad Mm = 2 \times \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

46. 함수 $y=-\frac{2}{x}+2$의 그래프와 직선 $y=2x+k$가 서로 만나지 않을 때, 정수 k의 개수는?

① 3 개　② 4 개　③ 5 개　④ 6 개　⑤ 7 개

해설

$-\frac{2}{x}+2=2x+k$ 에서 $-2+2x=2x^2+kx$

$2x^2+(k-2)x+2=0$이 이차방정식의 판별식을

D라 하면 $D=(k-2)^2-16<0$에서

$k^2-4k-12<0,\ (k+2)(k-6)<0$

$\therefore\ -2<k<6$

따라서 이를 만족하는 정수 k의 값은

$-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$의 7개이다.

47. $\sqrt{11-6\sqrt{2}}$의 소수 부분 x에 대하여 $y = x + \dfrac{1}{x}$일 때, $\sqrt{x(y-2)}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}-1$

해설

$$\sqrt{11-6\sqrt{2}} = \sqrt{11-2\sqrt{18}}$$
$$= \sqrt{(\sqrt{9}-\sqrt{2})^2}$$
$$= 3-\sqrt{2}3-\sqrt{2}$$
$$= 1.\cdots \Rightarrow \text{소수부분 } x : 2-\sqrt{2}$$

$$y = x + \frac{1}{x} = 2-\sqrt{2} + \frac{1}{2-\sqrt{2}}$$
$$= 2-\sqrt{2} + \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$
$$= 3 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y-2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

$$\sqrt{x(y-2)} = \sqrt{(2-\sqrt{2})\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)}$$
$$= \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$$
$$= \sqrt{2}-1$$

48. 세 집합 $A=\{x|x$는 6의 약수$\}$, $B=\{x|x$는 12의 약수$\}$, $C=\{x|x$는 6의 배수$\}$에 대하여 4 미만의 자연수를 나타내는 집합을 모두 골라라.

㉠ $A\cap B\cap C$	㉡ $A\cap B-C$	㉢ $A\cap B^c-C$
㉣ $A\cap B\cap C^c$	㉤ $A^c\cap B\cap C$	

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉡

▷ 정답 : ㉣

해설

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$, $C=\{6,\ 12,\ 18,\cdots\}$

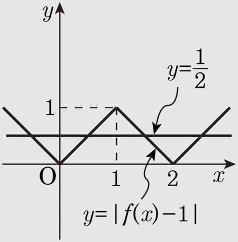
$A\cap B=\{1,2,\ 3,\ 6\}$ 에서 집합 C를 빼면 $\{1,\ 2,\ 3\}$ 즉 4 미만의 자연수가 남는다.

49. 함수 $f(x) = |x-1|$ 에 대하여 $(f \circ f)(x) = \frac{1}{2}$ 의 실근의 개수를 구하면?

① 0개　② 1개　③ 2개　④ 3개　⑤ 4개

해설

$(f \circ f)(x) = |f(x)-1|$ 이므로
$y = |f(x)-1|$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y = |f(x)-1|$ 의 그래프와

직선 $y = \frac{1}{2}$ 이 4 개의 점에서

만나므로 주어진 방정식의 실근의 개수는 4개이다.

50. 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$, 함수 $f(2x-1)$ 의 역함수를 $h(x)$ 라고 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $h(x)=2g(x)+1$

② $h(x)=2g(x)-1$

③ $h(x)=\frac{1}{2}\{g(x)+1\}$

④ $h(x)=g(\frac{x}{2}+1)$

⑤ $h(x)=\frac{1}{2}g(2x-1)+1$

해설

$f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로

$y=f(2x-1) \Leftrightarrow 2x-1=g(y) \cdots$ ㉠

$f(2x-1)$ 의 역함수가 $h(x)$ 이므로

$y=f(2x-1) \Leftrightarrow x=h(y) \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 x 를 소거하면 $2h(y)-1=g(h)$

그러므로 $h(y)=\frac{1}{2}\{g(h)+1\}$

$\therefore\ h(x)=\frac{1}{2}\{g(x)+1\}$