

1. 자연수 x 를 소인수분해 했을 때 나타나는 소인수들의 합을 기호 $S(x)$ 로 나타내기로 할 때, 어떤 자연수 m 을 소인수분해 하면 세 종류의 소인수가 나타나고, $S(m) = 12$ 라고 한다. 이 때, 이를 만족하는 m 의 값의 합을 구하여라.

(예를 들면, $72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$ 이므로 $S(72) = 2 + 2 + 2 + 3 + 3 = 12$ 가 된다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 102

해설

세 종류의 소수의 합이 12 이하인 경우는

$(2, 3, 5)$, $(2, 3, 7)$ 의 두 가지 경우이다.

$S(m) = 2 + 2 + 3 + 5$ 또는 $S(m) = 2 + 3 + 7$ 이므로 $m =$

$2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$ 또는 $m = 2 \times 3 \times 7 = 42$

따라서 $60 + 42 = 102$ 이다.

2. $24 \times a$ 가 어떤 자연수 A 의 제곱이 될 때, A 의 최솟값은?

① 9

② 12

③ 36

④ 54

⑤ 100

해설

$$24 \times a = 2^3 \times 3 \times a$$

$$\text{가장 작은 } a = 2 \times 3 = 6$$

$$A^2 = 2^3 \times 3 \times 2 \times 3 = 2^4 \times 3^2 = (12)^2$$

$$\therefore A = 12$$

3. I, M, O 는 $I \times M \times O = 2001$ 을 만족하는 서로 다른 자연수이다. 이 때, $I + M + O$ 의 최댓값은?

① 23 ② 55 ③ 99 ④ 111 ⑤ 671

해설

$2001 = 3 \times 23 \times 29$ 이고, 합의 최댓값을 구하므로, I, M, O 는 1, 3, 667 이 된다.

4. $A = 3^5 \times \square$ 의 약수가 18 개일 때, $\square$ 안에 들어갈 수 있는 최소의 자연수는?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$A = 3^5 \times \square$ 에서

약수의 개수가 18 개이면 $\square$ 가 가장 작은 소인수 2 일 때

$$\square = 2^2 = 4$$

5. 두 수 $2 \times 3 \times 5^{\square}$, $2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2$ 의 최소공배수가 $2^{\square} \times 3^{\square} \times 5^2 \times 7^{\square}$ 일 때, $\square$ 안에 알맞은 숫자들의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$2 \times 3 \times 5^{\square}$, $2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2$ 의 최소공배수를 구하면 $2 \times 3^2 \times 5^{\square} \times 7^2$ 이다.

또, $2 \times 3 \times 5^{\square}$, $2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2$ 의 최소공배수가 $2^{\square} \times 3^{\square} \times 5^2 \times 7^{\square}$ 이므로 위에서 구한 최소공배수와 비교해 보면 $2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^2$ 이다.

따라서 $\square$ 안에 들어가는 수는 차례대로 2, 1, 2, 2 이고, 구하는 값은 8 이다.

6. 다음의 수 중에서 수직선에 나타냈을 때 왼쪽에서 2 번째 수를 a , 가장 큰 수를 b , 절댓값이 가장 작은 수를 c 라 할 때, $a \times b \times c$ 의 값을 구하여라.

$+5, -3, \frac{7}{2}, -2.4, -\frac{21}{5}, \frac{100}{1}, 0.1$

▶ 답 :

▷ 정답 : -30

해설

수의 대소를 비교해 보면

$$-\frac{21}{5} < -3 < -2.4 < 0.1 < \frac{7}{2} < +5 < \frac{100}{1}$$

$$a = -3, b = \frac{100}{1}, c = 0.1$$

$$\therefore a \times b \times c = (-3) \times \frac{100}{1} \times 0.1 = -30$$

7. $\{x\}$ 를 $-x < a < x$ 인 정수 a 중 가장 큰 수라고 할 때, 다음을 알맞게 구한 것은 ?
 $\{8.4\} \div \{1.8\}$

① 2 ② 5 ③ 6 ④ 8 ⑤ 9

해설

$$\{8.4\} \div \{1.8\} = 8 \div 1 = 8$$

8. $0 < a < 1$ 일 때, 다음 중 가장 큰 것은?

① a

② a^2

③ a^3

④ $\frac{1}{a}$

⑤ $-a$

해설

$a = \frac{1}{2}$ 라고 놓으면,

① $a = \frac{1}{2}$

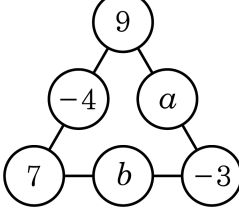
② $a^2 = \frac{1}{4}$

③ $a^3 = \frac{1}{8}$

④ $\frac{1}{a} = 2$

⑤ $-a = -\frac{1}{2}$

9. 다음 그림에서 각 변에 놓인 세 수의 합이 모두 같을 때, $a \times b$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 48 또는 +48

해설

각 변에 놓인 세 수의 합은 $9 + (-4) + 7 = 12$ 이다.
(i) $9 + a + (-3) = 12$
 $a + 9 + (-3) = 12$
 $a + 6 = 12$
 $\therefore a = 6$
(ii) $7 + b + (-3) = 12$
 $b + 7 + (-3) = 12$
 $b + 4 = 12$
 $\therefore b = 8$
따라서 $a \times b = 6 \times 8 = 48$ 이다.

10. 어떤 유리수에서 $\frac{1}{12}$ 을 더하고 $\frac{3}{5}$ 을 빼야 하는데 $\frac{1}{12}$ 을 빼고 $\frac{3}{5}$ 을 더했더니 0.25 가 나왔다. 바르게 계산한 것은?

- ① $-\frac{1}{2}$
- ② $-\frac{31}{60}$
- ③ $-\frac{8}{15}$
- ④ $-\frac{47}{60}$
- ⑤ $-\frac{17}{30}$

해설

$$a - \frac{1}{12} + \frac{3}{5} = 0.25 = \frac{1}{4}$$

$$a - \frac{5}{60} + \frac{36}{60} = \frac{15}{60}$$

$$a = \frac{15}{60} + \frac{5}{60} - \frac{36}{60} = -\frac{16}{60} = -\frac{4}{15}$$

$$\text{바르게 계산한 결과는 } -\frac{4}{15} + \frac{1}{12} - \frac{3}{5} = \frac{-16 + 5 - 36}{60} = -\frac{47}{60}$$

11. 두 수 a, b 에 대하여 $a * b = (-|a|^2 \div |b^2|) \div (|a| \div |b|)$ 으로 정의할 때, $A \times B$ 를 구하여라.

A = (-10) * (+2), B = (+4) * (-4)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

A와 B를 $a * b = (-|a|^2 \div |b^2|) \div (|a| \div |b|)$ 으로 계산하면

A = (-10) * (+2)
= (-| -10 |² ÷ | +2² |) ÷ (| -10 | ÷ | +2 |)
= { -100 ÷ 4 ÷ (10 ÷ 2) }
= (-100 ÷ 4 ÷ 5) = -5 ,
B = (+4) * (-4)
= (-| +4 |² ÷ | -4² |) ÷ (| +4 | ÷ | -4 |)
= { -16 ÷ 16 ÷ (4 ÷ 4) }
= (-16 ÷ 16 ÷ 1) = -1
∴ A × B = (-5) × (-1) = 5

12. 두 유리수 a, b 에 대하여 $a \times b < 0$, $|a| < |b|$, $a + b < 0$ 일 때, a 와 b 의 부호로 옳은 것을 골라라.

- ① $a > 0, b < 0$ ② $a > 0, b > 0$ ③ $a < 0, b > 0$
④ $a < 0, b < 0$ ⑤ $a < 0, b = 0$

해설

$a \times b < 0$ 에서 a 와 b 는 서로 다른 부호이다.

부호가 다른 두 수의 합의 부호는, 더하는 두 수 중 절댓값이 더 큰 수의 부호를 따라간다.

그런데, $a + b < 0$ 이므로, 절댓값이 큰 b 의 부호가 음수라는 것을 알 수 있다. 따라서 a 는 양수이다.

$\therefore a > 0, b < 0$

13. 네 자리 자연수 $b3a1$ 이 11 의 배수이고, $c581$ 이 9 의 배수일 때, $\frac{a+b}{c}$

의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : $\frac{15}{4}$

해설

11 의 배수는 짝수 자리 수의 합에서 홀수 자리 수의 합을 뺀
절댓값이 0 이거나 11 의 배수이면 되므로,

$a + b - 4 = 11k$ 이므로, $a + b = 4, 15$ 이다.

9 의 배수는 각 자리의 수를 더한 값이 9 의 배수이므로

$c + 5 + 8 + 1 = 9n$ 이므로, $c = 4$ 이다.

$\therefore \frac{a+b}{c} = 1, \frac{15}{4}$

14. $32 \times a$ 가 어떤 자연수의 제곱이 될 때, a 가 될 수 있는 수 중 20 보다 작은 수의 개수를 구하면?

① 3 개 ② 4 개 ③ 5 개 ④ 6 개 ⑤ 7 개

해설

$32 = 2^5$ 이므로

a 가 될 수 있는 수는 $2 \times (\text{자연수})^2$ 의 꼴이다.

따라서 a 가 될 수 있는 20 보다 작은 수는 2, 2^3 , 2×3^2 , 즉 3 개이다.

15. 자연수 $2^a \times 3^b$ 에 24 를 곱하였더니 어떤 자연수의 제곱이 되었다. 이때, 가능한 a, b 중 가장 작은 a, b 를 올바르게 구한 것을 골라라.

- ① $a : 0, b : 0$
- ② $a : 0, b : 1$
- ③ $a : 1, b : 1$
- ④ $a : 1, b : 0$
- ⑤ $a : 2, b : 1$

해설

$2^a \times 3^b$ 이 자연수이려면 a 와 b 는 0 이상이어야 한다.
또, 어떤 자연수의 제곱이 되는 수는 소인수분해를 했을 때 모든 소인수의 지수가 짝수여야 한다. 따라서, $2^a \times 3^b$ 에 $24 = 2^3 \times 3$ 를 곱한 수가 어떤 자연수의 제곱이 되어야 하므로, $2^a \times 3^b \times 2^3 \times 3 = 2^a \times 2^3 \times 3^b \times 3 = 2^{a+3} \times 3^{b+1}$ 에서 2 의 지수인 $(a+3)$ 과 3 의 지수인 $(b+1)$ 이 모두 짝수여야 한다. 이를 만족하는 가장 작은 수 a, b 는 각각 1 과 1 이다.

16. 자연수 n 에 대해 $S(n)$ 은 n 의 약수의 개수이다. 자연수 a, b 가 서로 소일 때, $S(a)+S(b) = 6$ 을 만족하는 $S(a \times b)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$S(a) + S(b) = 6$ 이므로,
 $(S(a), S(b)) = (2, 4), (3, 3), (4, 2)$ 이다.
(1) $(S(a), S(b)) = (2, 4)$ 일 때, $a = x, b = y^3$ 이거나 $b = y \times z$ 의 형태이므로,
 $S(a \times b) = 8$ 이다. ($(S(a), S(b)) = (4, 2)$ 일 때도 같다.)
(2) $(S(a), S(b)) = (3, 3)$ 일 때, $a = x^2, b = y^2$ 의 형태이므로,
 $S(a \times b) = 9$ 이다.
 $\therefore S(a \times b)$ 의 최솟값 = 8

17. 두 자연수 A, B 의 최대공약수를 $[A, B]$ 로 나타낼 때, $[A, B] = [C, D] = k$ 이다. 다음을 간단히 하여라. (단, A 와 C, D, B 와 C, D 는 서로소)

$$\left[\frac{[AB, CD]}{[A+B, C+D]}, \frac{[AD, BC]}{[A+D, B+C]} \right]$$

▶ 답 :

▷ 정답 : k

해설

$[A, B] = [C, D] = k \rightarrow A, B, C, D$ 모두 인수 k 를 가진다.
 AB 와 CD, AD 와 BC 는 모두 인수 k^2 을 가지고,
 $(A+B)$ 와 $(C+D), (A+D)$ 와 $(B+C)$ 는 모두 인수 k 를 가진다.

$$\therefore \left[\frac{[AB, CD]}{[A+B, C+D]}, \frac{[AD, BC]}{[A+D, B+C]} \right] = \left[\frac{k^2}{k}, \frac{k^2}{k} \right] = [k, k] = k$$

18. 어떤 학교에 남자 260 명, 여자 273 명의 신입생이 들어왔다고 한다. 반별 인원수가 같고 각 반에 속한 남녀의 비가 같도록 반을 나누려고 할 때, 최대 몇 반까지 나오는가?

① 14반 ② 13반 ③ 12반 ④ 11반 ⑤ 10반

해설

잘 수 있는 반의 수를 x 라 할 때,
 $260 = x \times \square$, $273 = x \times \triangle$
 x 는 260 과 273 의 최대공약수
 $260 = 2^2 \times 5 \times 13$, $273 = 3 \times 7 \times 13$
 $\therefore x = 13$

19. 1 에서 200 까지의 자연수 중에서 약수의 갯수가 3 개인 수는 모두 몇 개인가?

① 6개 ② 8개 ③ 9개 ④ 12개 ⑤ 14개

해설

약수가 3 개인 수는 p 를 소수라 할 때 p^2 인 수,
 $13^2 = 169$, $17^2 = 289$ 이므로
 p 가 될 수 있는 수는 2, 3, 5, 7, 11, 13 의 6 개

20. 한 자리 자연수 a, b 와 두 자리 자연수 c, d 에 대하여
 $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{5}$, $\frac{1}{b} + \frac{1}{d} = \frac{1}{6}$ 일 때, cd 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1260

해설

$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{5}$ 을 만족하는 두 자리 수 c 는 반드시 5 의 배수이어야 한다.

따라서 $a = 6$, $c = 30$ 이다.

$\frac{1}{b} + \frac{1}{d} = \frac{1}{6}$ 을 만족하는 두 자리 수 d 는 반드시 6 의 배수이어야 한다.

따라서 $(b, d) = (9, 18), (8, 24), (7, 42)$ 이다.

$\therefore (cd \text{의 최댓값}) = 30 \times 42 = 1260$

21. 기호 $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수를 말한다. 기약분수 $\frac{k}{18}$ 에 대하여 $[\frac{k}{18}] = 1$ 을 만족하는 정수 k 의 값을 모두 구하여라.

- ▶ 답 :
- ▶ 답 :
- ▶ 답 :
- ▶ 답 :
- ▶ 답 :
- ▶ 답 :
- ▷ 정답 : 19
- ▷ 정답 : 23
- ▷ 정답 : 25
- ▷ 정답 : 29
- ▷ 정답 : 31
- ▷ 정답 : 35

해설

$[\frac{k}{18}] = 1$ 이므로 $1 \leq \frac{k}{18} < 2$ 이다.
 $18 \leq k < 36$ 중 18 과 서로소인 k 를 찾으면 된다.
 $\therefore k = 19, 23, 25, 29, 31, 35$

22. 연속하는 5 개의 정수의 합이 0 보다 작을 때, 5 개 중 가장 작은 정수와 가장 큰 정수의 곱의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

연속하는 5 개의 정수를 각각 $n, n + 1, n + 2, n + 3, n + 4$ 라 두면,
 $5n + 10 < 0, n < -2$ 이다.
 $n \times (n + 4)$ 는 n 이 -4 보다 작으면 양의 정수가 되므로,
-3 일 때 최솟값을 가진다.
따라서 $-3 \times 1 = -3$ 이므로 가장 작은 정수와 가장 큰 정수의 곱의 최솟값은 -3 이다.