1. x 에 대한 다항식 $3x^3y+5y-xz+9xy-4$ 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ 내림차순으로 정리하면
$3yx^3+(9y-z)x+5y-4$ 이다.
㉡ 오름차순으로 정리하면
$5y-4+(9y-z)x+3yx^3$ 이다.
㉢ 주어진 다항식은 x 에 대한 3 차식이다.
㉣ x^3 의 계수는 3이다.
㉤ 상수항은 -4 이다.

① ㉠, ㉢　② ㉠, ㉡, ㉢
③ ㉠, ㉡　④ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤
⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤

해설
㉣ x^3 의 계수는 $3y$ 이다.
㉤ 상수항은 $5y-4$ 이다.

2. 두 다항식 A, B에 대하여 연산 $A \ominus B$와 $A \otimes B$을 다음과 같이 정의하기로 한다.

$A \ominus B = A - 3B,\ A \otimes B = (A + B)B$

$P = 2x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - y^3,\ Q = x^3 + x^2y + xy^2$이라 할 때, $(P \ominus Q) \otimes Q$를 x, y에 관한 다항식으로 나타내면?

① $x^4y^2 + xy^5$　② $x^4y^2 - xy^5$　③ $x^3y^2 - xy^4$

④ $x^3y^2 + xy^4$　⑤ $2x^3y^2 - xy^4$

해설

정의에 따라 $(P \ominus Q) \otimes Q$를 변형하면

$$\begin{aligned}(P \ominus Q) \otimes Q &= (P - 3Q) \otimes Q \\ &= (P - 3Q + Q)Q \\ &= (P - 2Q)Q \quad \cdots \text{①}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&P - 2Q \\ &= 2x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - y^3 - 2(x^3 + x^2y + xy^2) \\ &= xy^2 - y^3\end{aligned}$$

이므로 ①식은

$$\begin{aligned}(P \ominus Q) \otimes Q &= (xy^2 - y^3)(x^3 + x^2y + xy^2) \\ &= x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 - x^3y^3 \\ &\quad - x^2y^4 - xy^5 \\ &= x^4y^2 - xy^5\end{aligned}$$

3. $(4x^4-5x^3+3x^2-4x+1)\div(x^2-x+1)$ 을 계산 하였을 때, 몫과 나머지의 합을 구하면?

① $4x^2-6x+1$　② $4x^2-7x+3$　③ $4x^2-4x+5$
④ $4x^2-8x+2$　⑤ $4x^2-6x+7$

해설
직접 나누어서 구한다.
몫 : $4x^2-x-2$, 나머지 : $-5x+3$
$\therefore$ 몫과 나머지의 합은 $4x^2-6x+1$

4. $(6x^3-x^2-5x+5)\div(2x-1)$ 의 몫을 a, 나머지를 b라 할 때, $a+b$를 구하면?

① $3x^2+x+1$ ② x^2+x+1 ③ $3x^2+1$
④ x^2+x-1 ⑤ $3x^2+x$

해설

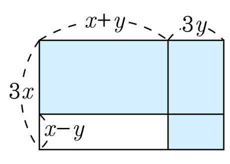
나눗셈을 이용하면 $a=3x^2+x-2$, $b=3$
$\therefore\ a+b=3x^2+x+1$

해설

조립제법을 이용할 수 있다.
이 때, $2x-1$로 나눈 몫은 $x-\frac{1}{2}$로 나눈 몫의 $\frac{1}{2}$이고 나머지는 같다.

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x-\frac{1}{2}\right)Q(x)+R \\ &= (2x-1)\cdot\frac{1}{2}\cdot Q(x)+R \end{aligned}$$

5. 다음 그림의 직사각형에서 색칠한 부분의 넓이를 나타내는 식을 세워 전개하였을 때, y^2 항의 계수는?

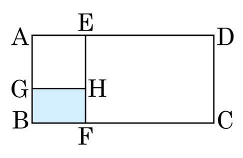


① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$(x+4y)(3x)-(x+y)(x-y)$
$=3x^2+12xy-x^2+y^2$
$=2x^2+12xy+y^2$

6. 다음 그림의 사각형 AGHE, 사각형 EFCD는 정사각형이고, $\overline{\mathrm{AD}} = a$, $\overline{\mathrm{AB}} = b$일때, 사각형 GBFH의 넓이는?



① $a^2 - 2ab - b^2$

② $a^2 + 3b^2 - 2ab$

③ $-a^2 + 3ab - 2b^2$

④ $-a^2 + 3ab - b^2$

⑤ $-a^2 + 2ab - b^2$

해설

$\square\mathrm{GBFH} = \square\mathrm{ABCD} - \square\mathrm{AGHE} - \square\mathrm{EFCD}$
$= ab - (a-b)^2 - b^2 = ab - (a^2 - 2ab + b^2) - b^2$
$= -a^2 + 3ab - 2b^2$

7. $(a+b-c)(a-b+c)$를 전개하면?

① $a^2+b^2-c^2-2bc$　　② $a^2-b^2+c^2-2bc$

③ $a^2+b^2-c^2+2ab$　　④ $a^2-b^2-c^2+2bc$

⑤ $a^2-b^2-c^2-2ab$

해설

$(a+b-c)(a-b+c)$

$=\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}$

$=a^2-(b-c)^2$

$=a^2-b^2-c^2+2bc$

8. $(2x^3 - 3x^2 + 3x + 4)(3x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 7x + 8)$을 전개한 식에서 x^3의 계수는?

① 31　② 33　③ 35　④ 37　⑤ 39

해설

$2x^3 \times 8 - 3x^2 \times (-7x) + 3x \times (-2x^2) + 4 \times 2x^3 = 39x^3$

9. 두 다항식 $A,\ B$ 에 대하여 $A+B=-x^3-2x^2+4x+5$, $2A-B=4x^3-x^2-x+1$ 일 때, 두 다항식 A, B 를 구하면?

① $A=x^3+x^2+x+2,\ B=-2x^3-3x^2+3x+3$

② $A=x^3-x^2+x+2,\ B=-2x^3-x^2+3x+3$

③ $A=x^3-x^2+x-2,\ B=-2x^3-x^2+3x+7$

④ $A=x^3-x^2-x+2,\ B=-2x^3-x^2+5x+3$

⑤ $A=3x^3-3x^2+3x+6,\ B=-4x^3+x^2+x-1$

해설

$A+B=-x^3-2x^2+4x+5\cdots$ ㉠

$2A-B=4x^3-x^2-x+1\cdots$ ㉡

(㉠ + ㉡) $\div 3$: $A=x^3-x^2+x+2$

(2㉠ − ㉡) $\div 3$: $B=-2x^3-x^2+3x+3$

10. 세 다항식 $A=x^2+3x-2,\ B=3x^2-2x+1,\ C=4x^2+2x-3$ 에 대하여
$3A-\{5A-(3B-4C)\}+2B$를 간단히 하면?

① $3x^2+12x-13$
② $-3x^2+24x+21$
③ $3x^2-12x+21$
④ $-3x^2-24x+21$
⑤ $x^2+12x+11$

해설

$3A-\{5A-(3B-4C)\}+2B$
$=-2A+5B-4C$
$=-2(x^2+3x-2)+5(3x^2-2x+1)-4(4x^2+2x-3)$
$=-3x^2-24x+21$

11. 다항식 $x^5\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)$ 의 차수는?

① 2차 ② 3차 ③ 6차 ④ 7차 ⑤ 8차

해설

$x^5\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)$

$=x^2(x^2+1)(x^2+2x+3)$

$\therefore$ 6차 다항식

12. 두 다항식 $A = a + 2b$, $B = 2a + 3b$ 일 때, $2A + B$를 구하는 과정에서 사용된 연산법칙 중 옳지 않은 것을 골라라.

$$\begin{aligned} 2A + B &= 2(a + 2b) + (2a + 3b) \\ &= (2a + 4b) + (2a + 3b) && \text{㉠ 분배법칙} \\ &= 2a + (4b + 2a) + 3b && \text{㉡ 결합법칙} \\ &= 2a + (2a + 4b) + 3b && \text{㉢ 교환법칙} \\ &= (2a + 2a) + (4b + 3b) && \text{㉣ 교환법칙} \\ &= (2 + 2)a + (4 + 3)b && \text{㉤ 분배법칙} \\ &= 4a + 7b \end{aligned}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉣

해설

㉣ $2a + (2a + 4b) + 3b = (2a + 2a) + (4b + 3b)$: 결합법칙

13. 다음은 연산법칙을 이용하여 $(x+3)(x+2)$를 계산한 식이다.

$$\begin{aligned}(x+3)(x+2) &= (x+3)x+(x+3)\times 2 \\ &= (x^2+3x)+(2x+6) \\ &= x^2+(3x+2x)+6 \\ &= x^2+5x+6\end{aligned}$$

위의 연산과정에서 사용한 연산법칙을 바르게 고른 것은?

① 교환법칙, 결합법칙

② 교환법칙, 분배법칙

③ 분배법칙, 결합법칙

④ 결합법칙, 분배법칙, 교환법칙

⑤ 연산법칙을 사용하지 않았다.

해설

$$\begin{aligned}(x+3)(x+2) &= (x+3)x+(x+3)\times 2 \ (\text{분배}) \\ &= (x^2+3x)+(2x+6) \ \ (\text{분배}) \\ &= x^2+(3x+2x)+6 \quad (\text{결합}) \\ &= x^2+5x+6\end{aligned}$$

14. 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라고 할 때, $xf(x)-3$을 $x+1$로 나눈 몫과 나머지는?

① $xQ(x), -R-3$　　② $xQ(x), -R+3$

③ $xQ(x), -R-6$　　④ $xQ(x)+R, -R-3$

⑤ $xQ(x)+R, -R+3$

해설

$f(x)=(x+1)Q(x)+R$

$\therefore\ xf(x)=x(x+1)Q(x)+xR$

$$\begin{aligned}\therefore\ xf(x)-3 &= x(x+1)Q(x)+xR-3\\ &= (x+1)\left\{xQ(x)\right\}+(x+1)R-R-3\\ &= (x+1)\left\{xQ(x)+R\right\}-R-3\end{aligned}$$

15. $2x^4-x^3+2x^2+a$를 x^2+x+1로 나누어 떨어지도록 하는 상수 a의 값을 구하면?

① -3 ② 3 ③ -6 ④ 6 ⑤ 12

해설

직접 나누어 본다.

$\therefore a-3=0, a=3$

해설

$x^2+x+1=0$이 되는 x값을 대입한다.

$x^2+x+1=0$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$, $x^3-1=0$

$\therefore x^3=1$

준 식의 좌변에 $x^3=1$, $x^2=-x-1$을 대입하면

$2x-1+2(-x-1)+a=0$, $a-3=0$

$\therefore\ a=3$

16. x^3+x^2+2를 다항식 x^2+2x-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 나머지를 $R(x)$라 할 때, $Q(x)+R(x)$의 값은?

① $2x-3$ ② $2x$ ③ $3x+2$
④ $4x$ ⑤ $4x+1$

해설
x^3+x^2+2를 x^2+2x-1로 직접 나누면
$Q(x)=x-1$, $R(x)=3x+1$
$\therefore\ Q(x)+R(x)=4x$

17. 다음 $\boxed{}$ 안에 알맞은 수를 차례대로 써 넣어라.

$$(x^3 + 4x^2 + 3x - 2) \div (\boxed{}x^2 + \boxed{}x + \boxed{}) = x + 2$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : -1

해설

$\boxed{}x^2 + \boxed{}x + \boxed{} = A$라 하면

$(x^3 + 4x^2 + 3x - 2) \div A = x + 2$

$\therefore\ A = (x^3 + 4x^2 + 3x - 2) \div (x + 2)$

$\therefore\ A = x^2 + 2x - 1$이므로

$\boxed{}$안에 알맞은 수는 차례대로 1, 2, -1이다.

18. 사차식 $3x^4-5x^2+4x-7$을 이차식 A로 나누었더니 몫이 x^2-2이고 나머지가 $4x-5$일 때, 이차식 A를 구하면?

① $3x^2-2$　② $3x^2-1$　③ $3x^2$
④ $3x^2+1$　⑤ $3x^2+2$

해설

검산식 : $3x^4-5x^2+4x-7=A(x^2-2)+4x-5$

$A=\dfrac{3x^4-5x^2-2}{x^2-2}=3x^2+1$

19. 다항식 $2x^2+5ax-a^2$을 다항식 $P(x)$로 나눈 몫이 $x+3a$, 나머지가 $2a^2$일 때, 다항식 $(x+a)P(x)$를 나타낸 것은?

① $x^2+2ax-2a^2$　　② x^2-a^2

③ $2x^2+3ax+a^2$　　④ $2x^2-3ax-a^2$

⑤ $2x^2+ax-a^2$

해설

$2x^2+5ax-a^2=P(x)(x+3a)+2a^2$이므로

$P(x)(x+3a)=2x^2+5ax-3a^2$

따라서, 다항식 $P(x)$는 $2x^2+5ax-3a^2$을 $x+3a$로 나눈 몫이므로

$P(x)=2x-a$

$$\begin{aligned}\therefore\ (x+a)P(x) &= (x+a)(2x-a)\\ &= 2x^2+ax-a^2\end{aligned}$$

20. 다항식 $f(x)=4x^3+ax^2+x+1$을 $x+\dfrac{1}{2}$로 나누면 나머지가 1일 때, 다항식 $f(x)$를 $2x+1$로 나눈 몫 $Q(x)$와 나머지 R을 구하면?

① $Q(x)=2x^2-x,\ R=1$
② $Q(x)=2x^2+x,\ R=1$
③ $Q(x)=2x^2-2x,\ R=1$
④ $Q(x)=4x^2-2x,\ R=\dfrac{1}{2}$
⑤ $Q(x)=4x^2+2x,\ R=\dfrac{1}{2}$

해설

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=1=\dfrac{a}{4}\ \therefore a=4$

따라서 $f(x)=4x^3+4x^2+x+1$
$=x(4x^2+4x+1)+1$
$=x(2x+1)^2+1$

$2x+1$로 나누면 $Q(x)=2x^2+x,\ R=1$

21. 다항식 $f(x)$를 $x-\frac{1}{2}$으로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라고 할 때, $f(x)$를 $2x-1$으로 나눌 때의 몫과 나머지는?

① 몫 : $2Q(x)$ 나머지 : $\frac{1}{2}R$

② 몫 : $2Q(x)$ 나머지 : R

③ 몫 : $\frac{1}{2}Q(x)$ 나머지 : $\frac{1}{2}R$

④ 몫 : $\frac{1}{2}Q(x)$ 나머지 : R

⑤ 몫 : $\frac{1}{2}Q(x)$ 나머지 : $2R$

해설

$x-\frac{1}{2}$에 2를 곱하면 $2x-1$

$$f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)Q(x)+R=(2x-1)\frac{1}{2}Q(x)+R$$

22. 다항식 $f(x)$ 를 $x+\frac{1}{3}$ 으로 나누었을 때, 몫과 나머지를 $Q(x)$, R 라고 한다. 이 때, $f(x)$ 를 $3x+1$ 으로 나눈 몫과 나머지를 구하면?

① $Q(x)$, R ② $3Q(x)$, $3R$ ③ $3Q(x)$, R
④ $\frac{1}{3}Q(x)$, R ⑤ $\frac{1}{3}Q(x)$, $\frac{1}{3}R$

해설

$f(x)=Q(x)\left(x+\frac{1}{3}\right)+R=\frac{1}{3}Q(x)(3x+1)+R$

23. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2$ 이고 $ab \neq 0$ 일 때, 다음 중 성립하는 것을 고르면? (단, 문자는 모두 실수이다.)

① $ax+by=0$ ② $a+b=x+y$ ③ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

④ $x=y$ ⑤ $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$

해설

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2=0$ 을

간단히 정리하면

$a^2y^2+b^2x^2-2abxy=0$

즉, $(ay-bx)^2=0$

$\therefore\ ay-bx=0$($\because$ $a,\ x,\ b,\ y$는 실수)

따라서, $ay=bx$에서 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$

24. $x+y+z=1$, $xy+yz+zx=2$, $xyz=3$ 일 때, $(x+y)(y+z)(z+x)$의 값을 구하면?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$x+y+z=1$ 에서
$x+y=1-z$
$y+z=1-x$
$z+x=1-y$
$(x+y)(y+z)(z+x)=(1-z)(1-x)(1-y)$
$=1-(x+y+z)+(xy+yz+zx)-xyz$
$=1-1+2-3=-1$

25. 다음 중 식의 전개가 바르지 <u>않은</u> 것을 고르면?

① $(1-x)(1+x+x^2)=1-x^3$

② $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)=x^4+x^2y^2+y^4$

③ $(x-3)(x-2)(x+1)(x+2)=x^4-8x^2+12$

④ $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)=a^8-b^8$

⑤ $(a+b-c)(a-b+c)=a^2-b^2-c^2+2bc$

해설

$(x-3)(x-2)(x+1)(x+2)$
$=(x^2-x-6)(x^2-x-2)$
$x^2-x=Y$라 놓자.

$$\begin{aligned}(Y-6)(Y-2)&=Y^2-8Y+12\\&=(x^2-x)^2-8(x^2-x)+12\\&=x^4-2x^3-7x^2+8x+12\end{aligned}$$

26. 다음 식을 전개한 것 중 옳은 것을 고르면?

① $(x-y-z)^2 = x^2 - y^2 - z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$

② $(3x-2y)^3 = 27x^3 - 54x^2y + 18xy^2 - 8y^3$

③ $(x+y)(x-y)(x^2+xy-y^2)(x^2-xy+y^2) = x^9 - y^9$

④ $(x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+2y^2) = x^4 + 4y^4$

⑤ $(x+y-1)(x^2+y^2-xy+2x+2y+1) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$

해설

① $(x-y-z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$
② $(3x-2y)^3 = 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$
③ $(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$
$= x^6 - y^6$
⑤ $(x+y-1)(x^2+y^2-xy+x+y+1)$
$= x^3 + y^3 - 3xy - 1$

27. $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$를 전개할 때, 각 항의 계수의 총합을 a, 상수항을 b라 할 때, $a+b$의 값을 구하면?

① 8　② 15　③ 24　④ 36　⑤ 47

해설

$(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$
$= (x^2+x-2)(x^2+x-12)(x^2+x=X(\text{치환}))$
$= (X-2)(X-12)$
$= X^2-14X+24$
$= (x^2+x)^2-14(x^2+x)+24$
$= x^4+2x^3-13x^2-14x+24$
$\therefore\ a=1+2-13-14+24=0,\ b=24$
$\therefore\ a+b=0+24=24$

해설

㉠ 각 항 계수의 총합 구하기
$x=1$ 대입, $a=0$
㉡ 상수항 구하기
$x=0$ 대입, $b=24$

28. $(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^3-b^3)$의 전개식으로 옳은 것은?

① a^3+b^3 ② a^6+b^6 ③ a^6-b^6
④ a^9+b^9 ⑤ a^9-b^9

해설
(준 식)$=(a^3+b^3)(a^3-b^3)=a^6-b^6$

29. $P = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ 의 값을 구하면?

① $2^{32}-1$　② $2^{32}+1$　③ $2^{31}-1$
④ $2^{31}+1$　⑤ $2^{17}-1$

해설

주어진 식에 $(2-1)=1$ 을 곱해도 식은 성립하므로

$$
\begin{aligned}
P &= (2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) \\
&= (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^16+1) \\
&= (2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) \\
&= \qquad \vdots \\
&= (2^{16}-1)(2^{16}+1) \\
&= 2^{32}-1
\end{aligned}
$$

30. 두 다항식 $(1+x+x^2+x^3)^3$, $(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$ 의 x^3 의 계수를 각각 a, b라 할 때, $a-b$의 값은?

① 4^3-5^3　　② 3^3-3^4　　③ 0

④ 1　　⑤ -1

해설

두 다항식이 $1+x+x^2+x^3$ 을 포함하고 있으므로 $1+x+x^2+x^3=A$라 놓으면

$(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$
$=(A+x^4)^3$
$=A^3+3A^2x^4+3Ax^8+x^{12}$
$=A^3+(3A^2+3Ax^4+x^8)x^4$

이 때 $(3A^2+3Ax^4+x^8)x^4$ 은 x^3 항을 포함하고 있지 않으므로 두 다항식의 x^3 의 계수는 같다.

$\therefore\ a-b=0$

31. $(-2x^3+x^2+ax+b)^2$ 의 전개식에서 x^3 의 계수가 -8 일 때, $a-2b$ 의 값은?

① -6　② -4　③ -2　④ 0　⑤ 2

해설

전개할 때 삼차항은 일차항과 이차항의 곱, 삼차항과 상수항의 곱이 각각 2 개씩 나온다.

$(-2x^3 \times b) \times 2 + (x^2 \times ax) \times 2 = (-4b+2a)x^3$

$2a-4b=-8$

$\therefore\ a-2b=-4$

32. 두 다항식 $(1+2x+3x^2+4x^3)^3$, $(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^3$ 의 x^3 의 계수를 각각 a, b 라 할 때, $a-b$ 의 값을 구하면?

① -21 ② -15 ③ -5 ④ -1 ⑤ 0

해설

$(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^3$ 의 전개식에서
x^4 항의 계수는 x^3 의 계수와는 관계가 없다.
따라서 $(1+2x+3x^2+4x^3)^3$ 의 전개식에서 x^3 의 계수와 $(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^3$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는 같다.
$\therefore\ a=b \quad \therefore\ a-b=0$

33. $a = 2004$, $b = 2001$ 일 때, $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ 의 값은?

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

해설

준 식은 $(a-b)^3$ 이다.
$a - b = 2004 - 2001 = 3$
$\therefore\ (a-b)^3 = 3^3 = 27$

34. $(10^5+2)^3$ 의 각 자리의 숫자의 합을 구하여라.

① 15　② 18　③ 21　④ 26　⑤ 28

해설

준식을 전개하면

$10^{15}+2^3+3\times2\times10^5(10^5+2)$

$=10^{15}+2^3+6\times10^{10}+12\times10^5$

$=10^{15}+10^{10}\times6+10^5\times12+8$

$\therefore\ 1+6+1+2+8=18$

35. 세 실수 a, b, c 에 대하여 $a+b+c=2$, $a^2+b^2+c^2=6$, $abc=-1$ 일 때, $a^3+b^3+c^3$ 의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^3+2(ab+bc+ca)$
$ab+bc+ca=-1$
$a^3+b^3+c^3$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$
$=2\times(6-(-1))-3=11$

36. 직육면체 모양의 상자가 있다. 이 상자의 겉넓이는 52이고, 모서리의 길이의 합은 36이다. 이 상자의 대각선의 길이는?

① 5　② $\sqrt{29}$　③ $\sqrt{33}$　④ 6　⑤ $\sqrt{42}$

해설

세 모서리의 길이를 a, b, c라 하면

$2(ab+bc+ca)=52$

$4(a+b+c)=36 \;\rightarrow\; a+b+c=9$

(직육면체 대각선의 길이)

$=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$=\sqrt{(a+b+c+)^2-2(ab+bc+ca)}$

$=\sqrt{81-52}=\sqrt{29}$

37. $a+b+c=0,\ a^2+b^2+c^2=1$ 일 때, $4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$\therefore\ ab+bc+ca = -\frac{1}{2}$

$4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

$= 4\{(ab+bc+ca)^2 - 2abc(a+b+c)\}$

$= 4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1$

38. 세 모서리의 길이의 합이 22이고 대각선의 길이가 14인 직육면체의 겉넓이는?

① 144　　② 196　　③ 288　　④ 308　　⑤ 496

해설

세 모서리를 $x,\ y,\ z$라 하면
$x+y+z=22\cdots\cdots$①
$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=14\cdots\cdots$②이고
겉넓이는 $2(xy+yz+zx)$이다.
①, ② 에서 $22^2=14^2+2(xy+yz+zx)$
$\therefore\ 2(xy+yz+zx)=288$

39. 다음 중에서 겉넓이가 22, 모든 모서리의 길이의 합이 24 인 직육면체의 대각선의 길이는?

① $\sqrt{11}$ ② $\sqrt{12}$

③ $\sqrt{13}$ ④ $\sqrt{14}$

⑤ 유일하지 않다.

해설

겉넓이 : $2xy + 2xz + 2yz = 22$

모서리 : $4x + 4y + 4z = 24$

대각선 : $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$ $\therefore\ d = \sqrt{14}$

$= (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx)$

$= 6^2 - 22 = 14$

40. $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$ 일 때, $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ 1 ⑤ 4

해설

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ 에 대입하면

$ab+bc+ca = -\frac{1}{2}$

$(ab+bc+ca)^2 = a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$

$\frac{1}{4} = a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$

따라서 $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 = \frac{1}{4}$

41. $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ 이고, $a = \sqrt{3} + 1$ 일 때, $a^{x^2} \div a^{2\sqrt{2}x+3}$ 의 값을 구하면?

① $\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$　② $\dfrac{4+\sqrt{3}}{4}$　③ $\dfrac{2\sqrt{3}-3}{4}$

④ $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$　⑤ $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$

해설

(i) $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ 에서 $x - \sqrt{2} = \sqrt{3}$

$x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 3$

$\therefore\ x^2 - 2\sqrt{2}x = 1$

(ii) $a^{x^2} \div a^{2\sqrt{2}x+3} = a^{x^2 - 2\sqrt{2}x - 3} = a^{-2}$

$= \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$

42. $x^2+x-1=0$ 일 때, x^5-5x 의 값을 구하면?

① 2　　② 1　　③ 0　　④ -1　　⑤ -3

해설

x^5-5x 를 x^2+x-1 로 나누면

즉, $x^5-5x=(x^2+x-1)\times$ 몫-3

$x^2+x-1=0$

$\therefore\ x^5-5x=-3$

해설

다음과 같이 식의 차수를 낮춰 나갈 수 있다.

$x^2=-x+1$

$$\begin{aligned} x^5-5x &= (x^2)^2\times x-5x \\ &= x(-x+1)^2-5x \\ &= x^3-2x^2-4x \\ &= x(-x+1)-2(-x+1)-4x \\ &= -x^2-x-2 \\ &= -(x^2+x)-2 \\ &= -1-2=-3 \end{aligned}$$

43. 세 실수 a, b, c가 다음 세 조건을 만족한다.

$$a+b+c=1,\ ab+bc+ca=1,\ abc=1$$

이 때, $(a+b)(b+c)(c+a)$의 값은?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$a+b+c=1$에서

$a+b=1-c,\ b+c=1-a,\ c+a=1-b$

$(a+b)(b+c)(c+a)$

$=(1-c)(1-a)(1-b)$

$=1-(a+b+c)+(ab+bc+ca)-abc$

$=1-1+1-1=0$

44. $x+y+z=4$, $xy+yz+zx=1$, $xyz=2$일 때, $(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$의 값을 구하면?

① 16　② 8　③ 4　④ 2　⑤ 1

해설

$(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$을
$xy+yz+zx=1$을 이용하여 변형하면
$(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$
$=(1-zx)(1-xy)(1-yz)$
$=1-(xy+yz+zx)+(x^2yz+xy^2z+xyz^2)-(xyz)^2$
$=1-(xy+yz+zx)+xyz(x+y+z)-(xyz)^2$
$=1-1+2\cdot 4-4$
$=4$
※ 위에서 아래의 전개식을 이용하였다.
$(x-a)(x-b)(x-c)$
$=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$

45. $a^2 - b^2 = 2$일 때, $\{(a+b)^n + (a-b)^n\}^2 - \{(a+b)^n - (a-b)^n\}^2$의 값은?

① 2^n　　② 2^{n+1}　　③ 2^{n+2}　　④ 2^{n+3}　　⑤ 2^{n+4}

해설

$(a+b)^n = A,\ (a-b)^n = B$

$$
\begin{aligned}
(\text{준식}) &= \left(A^2 + 2AB + B^2\right) - \left(A^2 - 2AB + B^2\right) \\
&= 4AB \\
&= 4\left\{(a+b)(a-b)\right\}^n \\
&= 4 \times 2^n \\
&= 2^{n+2}
\end{aligned}
$$

46. 다음 다항식의 일차항의 계수는?

$$(1+x+x^2)^2(1+x)+(1+x+x^2+x^3)^3$$

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

해설

i) $(1+x+x^2)^2(x+1)$ 의 일차항의 계수

: $(1+x+x^2)^2$ 의 일차항에 1을 곱할 때,

계수$=2$

: $(1+x+x^2)^2$ 의 상수항에 x를 곱할 때,

계수$=1$

ii) $(1+x+x^2+x^3)^3$ 의 일차항의 계수

$x+x^2+x^3=Y$라 하면,

$(Y+1)^3=Y^3+3Y^2+3Y+1$

$3Y=3x+3x^2+3x^3$

일차항의 계수$=3$, 다른 항에는 일차항이 없다.

i), ii) 에서 $2+1+3=6$

47. 세 변의 길이가 a, b, c인 $\triangle ABC$에 대하여 $a^2-ab+b^2=(a+b-c)c$인 관계가 성립할 때, $\triangle ABC$는 어떤 삼각형인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 정삼각형

해설

$a^2-ab+b^2=(a+b-c)c$에서 $a^2-ab+b^2=ac+bc-c^2$
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$
즉, $\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}=0$
$\therefore\ a=b=c$
따라서, $\triangle ABC$는 정삼각형이다.

48. $x+\frac{1}{x}=3$ 일 때, $x^2+\frac{1}{x^2}$ 의 값과 $x^3+\frac{1}{x^3}$ 의 값을 차례대로 구하면? (단, $x>0$)

① 5, 6 ② 7, 18 ③ 8, 16
④ 9, 18 ⑤ 10, 27

해설

$x+\frac{1}{x}=3$ 일 때

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=7$

$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=27-9=18$

49. $a+b+c=7$, $a^2+b^2+c^2=21$, $abc=8$일 때, $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$의 값은?

① 26　② 48　③ 84　④ 96　⑤ 112

해설

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^c+2(ab+bc+ca)$

$49=21+2(ab+bc+ca)$

$\therefore\ ab+bc+ca=14$

$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$

$=(14)^2-2(8\times 7)$

$=84$

50. $x+y=2,\ x^3+y^3=14$일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $xy=-1$ ② $x^2+y^2=6$ ③ $x^4+y^4=34$

④ $x^5+y^5=86$ ⑤ $x^6+y^6=198$

해설

① $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$ 에서

$14=2^3-3xy\times 2$

$\therefore\ xy=-1$

② $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ 에서

$x^2+y^2=2^2-2(-1)=6$

③ $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$ 에서

$x^4+y^4=6^2-2(-1)^2=34$

④ $x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y)$ 에서

$x^5+y^5=6\times 14-(-1)^2\times 2=82\neq 86$

⑤ $x^6+y^6=(x^3+y^3)^2-2x^3y^3$ 에서

$x^6+y^6=14^2-2(-1)^3=198$