1. 삼차방정식 $x^3 + 27 = 0$의 모든 근의 합은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$x^3 + 3^3 = 0$, $(x+3)(x^2 - 3x + 9) = 0$

$\therefore x = -3, \dfrac{3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$

합 : $-3 + \dfrac{3 + 3\sqrt{3}i}{2} + \dfrac{3 - 3\sqrt{3}i}{2} = 0$

해설

$x^3 + 27 = 0$에서 x^2의 계수가 0이므로 근과 계수와의 관계에 의해 세 근의 합은 0

2. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$에서

$x^2 = t$로 놓으면

$t^2 - 13t + 36 = 0$, $(t-4)(t-9) = 0$

$\therefore\ t = 4$ 또는 $t = 9$

(ⅰ) $t = 4$일 때, $x^2 = 4$

$\therefore\ x = \pm 2$

(ⅱ) $t = 9$일 때, $x^2 = 9$

$\therefore\ x = \pm 3$

따라서 모든 해의 합은

$(-2) + 2 + (-3) + 3 = 0$

3. 삼차방정식 $2x^3 - 7x^2 + 11x + 13 = 0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, 다음 (가), (나), (다)에 알맞은 값을 차례로 쓴 것은?

(가) $\alpha + \beta + \gamma$
(나) $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$
(다) $\alpha\beta\gamma$

① $\frac{7}{2}$, $\frac{11}{2}$, $-\frac{13}{2}$　② $-\frac{7}{2}$, $\frac{13}{2}$, $\frac{11}{2}$　③ $\frac{13}{2}$, $\frac{7}{2}$, $-\frac{11}{2}$
④ $\frac{11}{2}$, $-\frac{13}{2}$, $\frac{7}{2}$　⑤ $\frac{7}{2}$, $-\frac{11}{2}$, $\frac{13}{2}$

해설

삼차방정식 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 (a \neq 0)$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$

$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$

4. 삼차방정식 $x^3 - 5x^2 + ax + b = 0$의 한 근이 $1+\sqrt{2}$일 때, 다른 두 근을 구하면? (단, a, b는 유리수)

① $1-\sqrt{2}$, 2　　② $-1+\sqrt{2}$, -3　　③ $1-\sqrt{2}$, 3

④ $1-\sqrt{2}$, -3　　⑤ $-1+\sqrt{2}$, 3

해설

한 근이 $1+\sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $1-\sqrt{2}$이다.
삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해 세근의 합은 5이므로
$\therefore\ 1+\sqrt{2}+(1-\sqrt{2})+\alpha = 5,\quad \alpha = 3$
$\therefore$ 다른 두 근은 $3, 1-\sqrt{2}$

5. $x^3 - 1 = 0$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^3 + \overline{\omega}^3$의 값을 구하면? (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1) = 0$

$x = 1$ 또는 $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$\dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$를 ω라 하면

$\overline{\omega} = \dfrac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

$\therefore\ \omega^3 = 1,\ \overline{\omega}^3 = 1,\ \omega^3 + \overline{\omega}^3 = 2$

6. $x^3=1$의 한 허근이 ω일 때, $\omega^{10}+\omega^5+1$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$w^3=1,$
$x^3-1=0$
$\Rightarrow\ (x-1)(x^2+x+1)=0$의 한 허근이 ω
$\Rightarrow w^2+w+1=0$
$\omega^{10}+\omega^5+1=(w^3)^3w+w^2\cdot w^3+1$
$=w^2+w+1$
$=0$

7. 방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 w라고 할 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $w^3 - 1 = 0$ ② $w^2 - w + 1 = 0$

③ $w + \frac{1}{w} = -1$ ④ $w^{2008} + w^{2009} = -1$

⑤ 다른 허근은 w^2이다.

해설

① $w^3 = 1$이므로 $w^3 - 1 = 0$
② $w^3 - 1 = 0$이므로
$(w-1)(w^2+w+1) = 0$
$w - 1 \neq 0$이므로 $w^2 + w + 1 = 0$
$\therefore\ w^2 - w + 1 = -2w \neq 0$
③ $w^2 + w + 1 = 0$이고
$\omega \neq 0$이므로
양변을 w로 나누면 $w + 1 + \frac{1}{w} = 0$
$\therefore\ w + \frac{1}{w} = -1$
④ $\omega^{2008} = (\omega^3)^{669} \cdot \omega = \omega$,
$\omega^{2009} = (\omega^3)^{669} \cdot \omega^2 = \omega^2$
$\therefore\ w^{2008} + w^{2009} = w + w^2 = -1$
$(\because w^2 + w + 1 = 0)$
⑤ $(w^2)^3 = w^6 = (w^3)^2 = 1^2 = 1$
따라서, w^2은 $x^3 = 1$의 다른 한 허근이다.

8. $x^3-1=0$의 한 허근을 ω라 할 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

㉠ $\omega^6=1$	㉡ $\omega^2=\overline{\omega}$
㉢ $\omega+\overline{\omega}=-1$	㉣ $\omega^2+\omega=-1$

① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉢　③ ㉠, ㉢, ㉣
④ ㉡, ㉢, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

$x^3-1=0$의 한 허근이 ω이므로,
$\omega^3=1,\ (x-1)(x^2+x+1)=0$
$\omega^2+\omega+1=0$켤레근 $\overline{\omega}$일 경우도
$\overline{\omega}^3=1,\ \overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$
㉠ $\omega^3=1,\ (\omega^3)^2=1\rightarrow$(○)
㉢ $\omega+\overline{\omega}=-1,$
$\overline{\omega}=-1-\omega=-(\omega+1)$
$\omega^2+\omega+1$을 이용.
$\omega+1=-\omega^2$이므로 $\overline{\omega}=\omega^2\rightarrow$(○)
㉡ 두 근 $\omega,\overline{\omega}$의 합은
$x^2+x+1=0$의 두 근의 합이므로
$\omega+\overline{\omega}=-1$
㉣ $\omega^2+\omega+1=0,$
$\omega^2+\omega=-1\rightarrow$(○)

9. $x^3-1=0$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^6+\omega^2+\omega+1$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$

$(\omega^3)^2+(\omega^2+\omega+1)=1^2+0=1$

10. $x^3=1$ 의 한 허근을 ω 라고 할 때, $(\omega^2+1)^4+(\omega^2+1)^8$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ -1 ④ ω ⑤ $-\omega$

해설

$x^3-1=0 \Rightarrow (x-1)(x^2+x+1)=0$

$\Rightarrow \omega^2+\omega+1=0,\ \omega^3=1$

$\Rightarrow (\omega^2+1)^4+(\omega^2+1)^8=(-\omega)^4+(-\omega)^8$

$=\omega^3\times\omega+(\omega^3)^2\times\omega^2$

$=\omega^2+\omega=-1$

11. 연립방정식 $\begin{cases} y = x+1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 의 해를

$x=\alpha$,$y=\beta$라 할 때, $\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$\begin{cases} y = x+1 & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$x^2+(x+1)^2=5$, $2x^2+2x-4=0$,

$2(x+2)(x-1)=0$

$\therefore\ x=1,\ -2$

$x=1$일 때, $y=2$,

$x=-2$일 때, $y=-1$

$\therefore\ \alpha=1, \beta=2$ 또는 $\alpha=-2$, $\beta=-1$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2-\alpha\beta=3$

12. 연립방정식 $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 \\ x^2+2y^2=12 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y에 대하여 $x+y$ 값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① $3\sqrt{2}$ ② 4 ③ $-3\sqrt{2}$

④ -4 ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$x^2-3xy+2y^2=0$

$(x-y)(x-2y)$

$\Rightarrow \quad (x-y)(x-2y)=0$

$\Rightarrow \quad x=y$ 또는 $x=2y$

ⅰ) $x=y$

$x^2+2y^2=3x^2=12$

$x=\pm 2 \quad \Rightarrow \quad y=\pm 2$

ⅱ) $x=2y$

$x^2+2y^2=6y^2=12$

$y=\pm\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad x=\pm 2\sqrt{2}$

$x+y=(4,-4,3\sqrt{2},-3\sqrt{2})$

13. 연립방정식 $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 0 \\ 5x^2 - y^2 = 4 \end{cases}$ 의 근을 $x = \alpha$, $y = \beta$라 할 때, $\alpha + \beta$의 최댓값은?

① 4　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 10

해설

$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 0 & \cdots ① \\ 5x^2 - y^2 = 4 & \cdots ② \end{cases}$

①식을 인수분해하면

$(2x-y)(x-y) = 0 \quad \therefore\ y = 2x,\ y = x$

②식에 대입하면

$y = 2x$일 때 $5x^2 - (2x)^2 = 4,\ x^2 = 4,\ x = \pm 2,\ y = \pm 4$

$y = x$일 때 $5x^2 - x^2 = 4,\ \ 4x^2 = 4\ x^2 = 1,\ \ x = \pm 1,\ y = \pm 1$

$\therefore \alpha + \beta = 6,\ -6,\ 2,\ -2$

$\therefore \alpha + \beta$ 의 최댓값은 6

14. 연립이차방정식 $\begin{cases} 3x^2 + y = 6 \\ 9x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$ 를 만족시키는 x값을 모두 더하면?

① 0　② 15　③ 10　④ −10　⑤ −15

해설

$9x^2 - y^2 = 0$에 $3x^2 + y = 6$을 대입하면

$9x^2 - (-3x^2 + 6)^2 = -9x^4 + 45x^2 - 36 = 0$

$x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0$

$\therefore x = \pm 1,\ \pm 2$

$\therefore x$의 합은 $+1 - 1 + 2 - 1 = 0$

15. 연립방정식 $\begin{cases} x-y=2 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y에 대하여 xy는?

① 8 ② 3 ③ 0 ④ -1 ⑤ -3

해설

$\begin{cases} x-y=2 & \cdots ① \\ x^2+y^2=20 & \cdots ② \end{cases}$

①식 $(x=y+2)$을 ②식에 대입하면

$(y+2)^2+y^2=20$

$2y^2+4y-16=0$

$(y+4)(y-2)=0$

$y=2, x=4 \rightarrow xy=8$

$y=-4, x=-2 \rightarrow xy=8$

해설

①식을 제곱하면.

$(x-y)^2=4$

$x^2+y^2-2xy=4$

$xy=\dfrac{x^2+y^2-4}{2}=\dfrac{20-4}{2}=8$

16. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-xy+y^2=3 \end{cases}$ 의 해를 $x=a$, $y=b$ 라 할 때, ab 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2+y^2=5 \quad \cdots$ ㉠
$x^2-xy+y^2=3 \quad \cdots$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $5-xy=3$, $xy=2$
$\therefore \quad ab=2$

17. 방정식 $(x^2+x)^2+2(x^2+x+1)-10=0$ 의 모든 실근의 합은?

① -10　② -2　③ -1　④ 2　⑤ 10

해설

$(x^2+x)^2+2(x^2+x+1)-10=0$ 에서
$x^2+x=A$ 라 하면
$A^2+2A-8=0$,
$(A+4)(A-2)=0$
$\therefore A=-4$ 또는 $A=2$
(ⅰ) $x^2+x=-4$ 일 때,
$x^2+x+4=0$
$\therefore x=\dfrac{-1\pm\sqrt{15}i}{2}$
(ⅱ) $x^2+x=2$ 일 때,
$x^2+x-2=0$,
$(x+2)(x-1)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$
(ⅰ), (ⅱ)에서 실근은 $x=-2$ 또는 $x=1$ 이므로 실근의 합은
$-2+1=-1$

18. 방정식 $x(x+2)(x+4)(x+6)+15=0$ 을 풀면?

① $x=-2$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=-2\pm\sqrt{3}$

② $x=2$ 또는 $x=4$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=-5$

③ $x=-2\pm\sqrt{5}$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{6}$

④ $x=-3\pm\sqrt{5}i$ 또는 $x=-2\pm\sqrt{6}i$

⑤ $x=-1$ 또는 $x=-5$ 또는 $-3\pm\sqrt{6}$

해설

$x(x+6)=x^2+6x$
$(x+2)(x+4)=x^2+6x+8$
$x^2+6x=X$ 로 놓으면
$x(x+2)(x+4)(x+6)+15=0$
$X(X+8)+15=0,$
$X^2+8X+15=0$
$(X+3)(X+5)=0$
$\therefore\ X=-3, X=-5$
㉠ : $X=-3 \Rightarrow\ x^2+6x+3=0,$
$x=-3\pm\sqrt{9-3}=-3\pm\sqrt{6}$
㉡ : $X=-5 \Rightarrow\ x^2+6x+5=0,$
$(x+5)(x+1)=0,\ x=-1,-5$

19. 다음 방정식의 모든 해의 곱을 구하여라.

$$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$ 에서

$x^2-2x=t$ 로 놓으면

$t(t-2)-3=0$,

$t^2-2t-3=0$

$(t-3)(t+1)=0$

$\therefore\ t=3$ 또는 $t=-1$

(ⅰ) $t=3$, 즉 $x^2-2x=3$ 일 때

$x^2-2x-3=0$

$(x-3)(x+1)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=3$

(ⅱ) $t=-1$, 즉 $x^2-2x=-1$ 일 때

$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$

$\therefore\ x=1$ (중근)

따라서, $-1\times3\times1=-3$

20. 사차방정식 $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$의 서로 다른 실근은 모두 몇 개인가?

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 2)(x + 1)(x - 1) = 0$

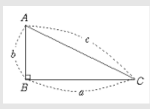
$\therefore\ x = 2$ 또는 $x = -2$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = -1$

21. 넓이가 30 이고, 둘레의 길이가 30 인 직각삼각형의 빗변의 길이를 구하면?

▶ 답:

▷ 정답: 13

해설



$\frac{1}{2}ab = 30,\ ab = 60$

$a + b + c = 30,\ a + b = 30 - c$

$a^2 + b^2 = c^2\ (a + b)^2 - 2ab = c^2$

$(30 - c)^2 - 2 \cdot 60 = c^2$

$c^2 - 60c + 900 - 120 = c^2$

$60c = 780,\ \therefore\ c = 13$

22. 연립방정식 $\begin{cases} 2x+y=k \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 가 오직 한 쌍의 해를 가질 때, 상수 k 의 값은?

① ± 1　　② ± 3　　③ ± 5　　④ ± 7　　⑤ ± 9

해설

$\begin{cases} 2x+y=k & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=k-2x$ 를 ㉡에 대입하면

$x^2+(k-2x)^2=5$

$5x^2-4kx+k^2-5=0$ 이 중근을 가지려면

$\frac{D}{4}=(-2k)^2-5\left(k^2-5\right)=0$

$-k^2+25=0,\ k^2=25$

$\therefore\ k \pm 5$

23. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2a \\ xy=a \end{cases}$ 를 만족하는 순서쌍 (x,y) 가 한 개 뿐일 때, 양의 실수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$\begin{cases} x+y=2a \cdots ① \\ xy=a \cdots ② \end{cases}$

①에서 $y=-x+2a$ 를 ②에 대입하면

$x(-x+2a)=a$

$\therefore -x^2+2ax=a$ 즉 $x^2-2ax+a=0$ 이 한 개의 실근을 가져야 하므로 $D/4=a^2-a=0$

$\therefore\ a=0$ 또는 1 그런데

a 는 양의실수 이므로

$a=1$

24. 두 이차방정식 $x^2 + kx + 3 = 0$, $x^2 + x + 3k = 0$이 공통인 실근 α를 가질 때, $\alpha - k$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

공통근이 α이므로

$\alpha^2 + k\alpha + 3 = 0 \quad \cdots\cdots ㉠$

$\alpha^2 + \alpha + 3k = 0 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠ − ㉡에서 $(k-1)\alpha - 3(k-1) = 0$,

$(k-1)(\alpha-3) = 0$

(i) $k = 1$인 경우 두 이차방정식이 $x^2+x+3 = 0$으로 일치하여 공통근은 갖지만 실근이 아니므로 부적합하다.

(ii) $\alpha = 3$인 경우 $9 + 3k + 3 = 0 \quad \therefore\ k = -4$

$\therefore\ \alpha - k = 7$

25. 두 이차방정식 $3x^2-(k+1)x+4k=0$, $3x^2+(2k-1)x+k=0$이 단 하나의 공통인 근 α를 가질 때, $3k+\alpha$의 값은? (단, k는 실수인 상수)

① -1　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

공통근이 α이므로

$3\alpha^2-(k+1)\alpha+4k=0$

$3\alpha^2+(2k-1)\alpha+k=0$

두 식을 변변끼리 빼면 $3k(\alpha-1)=0$

$k=0$ 또는 $\alpha=1$

$k=0$이면 두 식이 같아지므로

조건에 맞지 않는다.

$\therefore\ \alpha=1$을 대입하면

$3-(k+1)+4k=0,\quad k=-\frac{2}{3}$

$\therefore\ 3k+\alpha=-1$

26. 방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라 할 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\omega^2 + \omega + 1 = 0$　　② $\omega + \frac{1}{\omega} = -1$

③ $(1 + \omega^2)^2 = \omega$　　④ $(1 + \omega)^{10} = \omega^2$

⑤ $\omega^3 = 1$

해설

$x^3 = 1$

$(x^3 - 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$

ω는 $x^2 + x + 1 = 0$의 한 근이다.

$\omega^3 = 1,\ \omega^2 + \omega + 1 = 0 \cdots$ ①

①식을 ω로 나누면

$\omega + \frac{1}{\omega} = -1$(○)

③ $(1 + \omega^2)^2 = (-\omega)^2 = \omega^2$(×)

④ $(1 + \omega)^{10} = (-\omega^2)^{10}$

$= \omega^{20}$

$= (\omega^3)^6\omega^2$

$= \omega^2$ (○)

27. 방정식 $x^3=1$의 두 허근을 $\omega,\ \overline{\omega}$라고 할 때, 다음 관계식이 성립하지 않는 것은?

① $\omega+\overline{\omega}=-1$　　② $\omega\cdot\overline{\omega}=1$

③ $\omega^2+(\overline{\omega})^2=1$　　④ $\omega^2=\overline{\omega}\ ,\ (\overline{\omega})^2=\omega$

⑤ $\omega^2+\omega+1=0$

해설

$x^3=1\ ,\ (x-1)(x^2+x+1)=0\ ,$
$x^2+x+1=0\ \omega^3=1\ ,$
$\omega^2+\omega+1=0\ ,$
$\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$
① $x^2+x+1=0$두근은
$\omega,\overline{\omega}$이므로
$\omega+\overline{\omega}=-1$(○)
② $x^2+x+1=0$두근은
$\omega,\overline{\omega}$이므로
$\omega\cdot\overline{\omega}=1$(○)
③ $\omega^2+\overline{\omega}^2=(\omega+\overline{\omega})^2-2\omega\cdot\overline{\omega}$
$=(-1)^2-2\cdot1=-1$(×)
④ $\omega+\overline{\omega}=-1,$
$\overline{\omega}=-1-\omega$
$=-(1+\omega)=\omega^2$
$\omega+\overline{\omega}=-1,\omega=-1-\overline{\omega}=-(1+\overline{\omega})$
$=\overline{\omega}^2$(○)
⑤$\omega^2+\omega+1=0$ (○)