

1. 좌표평면 위의 두 점 $P(a, 3)$, $Q(1, a)$ 에 대하여 $\overline{PQ} = \sqrt{2}$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\overline{PQ} = \sqrt{(1-a)^2 + (a-3)^2} = \sqrt{2a^2 - 8a + 10}$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{2} \text{ 이므로 } \sqrt{2a^2 - 8a + 10} = \sqrt{2}$$

$$\text{양변을 제곱하면 } 2a^2 - 8a + 10 = 2$$

$$2a^2 - 8a + 8 = 0, a^2 - 4a + 4 = 0, (a-2)^2 = 0$$

$$\therefore a = 2$$

2. 좌표평면 위를 움직이는 두 점 $P(a+1, -3)$, $Q(3, -a+1)$ 에 대하여 P , Q 사이의 거리의 최솟값은?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= \sqrt{(3-a-1)^2 + (-a+1+3)^2} \\ &= \sqrt{(2-a)^2 + (4-a)^2} \\ &= \sqrt{2a^2 - 12a + 20} \\ &= \sqrt{2(a-3)^2 + 2}\end{aligned}$$

따라서, $\overline{PQ}$ 의 최솟값은 $a = 3$ 일 때, $\sqrt{2}$ 이다.

3. 두 점 A(-1, 2), B(4, 5)에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P와 y 축 위의 점Q의 좌표를 구하면?

① P(2.4, -1), Q(0, 6)

② P(3.6, 0), Q(-1, 6)

③ P(3.6, 0), Q(0, 6)

④ P(2.4, 0), Q(0, 5)

⑤ P(3.6, 0), Q(-1, 2)

해설

A(-1, 2), B(4, 5)에서 같은 거리에 있는 P(x , 0) 과 Q(0, y)
를 구해야 하므로 $\overline{AP} = \overline{BQ}$ 에서 $\sqrt{(x+1)^2+2^2} = \sqrt{(x-4)^2+5^2}$

양변을 정리하면 $10x = 36 \therefore x = 3.6 \therefore P(3.6, 0)$

$\overline{AQ} = \overline{BQ}$ 에서 $\sqrt{1^2+(y-2)^2} = \sqrt{4^2+(y-5)^2}$

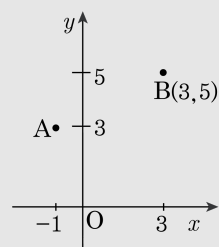
양변을 정리하면 $6y = 36 \therefore y = 6 \therefore Q(0, 6)$

4. 두 점 A(-1, 3), B(3, 5)에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점을 P, y 축 위의 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이를 구하면?

- ① 4 ② $\sqrt{5}$ ③ $2\sqrt{5}$ ④ $3\sqrt{5}$ ⑤ $4\sqrt{5}$

해설

P(a , 0)이라하면, $\overline{AP} = \overline{BP}$
 $(a+1)^2 + 3^2 = (a-3)^2 + 5^2$, $8a = 24$
 $\therefore a = 3$
Q(0, b)이라 하면, $\overline{AQ} = \overline{BQ}$
 $1^2 + (b-3)^2 = (-3)^2 + (b-5)^2$
 $\therefore 4b = 24$
 $\therefore b = 6$ P(3, 0), Q(0, 6)
 $\therefore \overline{PQ} = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$



5. 두 점 A(-2, 1), B(4, 7) 의 중점의 좌표는?

- ① $M\left(\frac{1}{2}, 4\right)$ ② $M(1, 2)$ ③ $M(1, 4)$
④ $M\left(1, \frac{3}{2}\right)$ ⑤ $M(2, 2)$

해설

중점 M의 좌표 $M(x, y)$ 라 하면

$$x = \frac{-2+4}{2} = 1, y = \frac{1+7}{2} = 4$$

따라서 $M(1, 4)$

6. 두 점 A(6, -4), B(1, 1) 을 이은 선분 AB를 2 : 3 으로 내분하는 점을 P, 외분하는 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 중점의 좌표는?

① (8, -10)

② (8, -8)

③ (8, -6)

④ (10, -8)

⑤ (10, -6)

해설

$$P\left(\frac{2 \times 1 + 3 \times 6}{2 + 3}, \frac{2 \times 1 + 3 \times (-4)}{2 + 3}\right) = (4, -2)$$

$$Q\left(\frac{2 \times 1 - 3 \times 6}{2 - 3}, \frac{2 \times 1 - 3 \times (-4)}{2 - 3}\right) = (16, -14)$$

따라서 선분 PQ의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{4 + 16}{2}, \frac{-2 + (-14)}{2}\right)$$

$$\therefore (10, -8)$$

7. 두 점 $A(1, 2), B(3, -2)$ 를 이은 $\overline{AB}$ 의 B 방향으로의 연장선 위에 $\overline{AC} : \overline{BC} = 2 : 1$ 을 만족하는 점 C 의 좌표를 (a, b) 라 할 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 61

해설

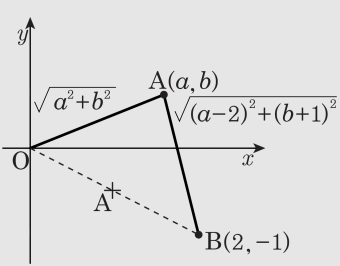
점 C 는 선분 AB 를 $2 : 1$ 로 외분하는 점이므로 $C(5, -6)$ 이다.
 $\therefore a^2 + b^2 = 5^2 + (-6)^2 = 61$

8. 좌표평면 위에 점 $O(0, 0)$, $A(a, b)$, $B(2, -1)$ 이 있다. 이때, $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{(a-2)^2 + (b+1)^2}$ 의 최솟값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ $\sqrt{5}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

해설

$\sqrt{a^2 + b^2}$ 은 $\overline{OA}$ 의 길이이고,
 $\sqrt{(a-2)^2 + (b+1)^2}$ 은 $\overline{AB}$ 의 길이이다.
따라서, 준 식은 O, A, B 가 일
직선상에 있을 때
최소가 된다. (그림 참조)
따라서, $\overline{OA} + \overline{AB}$ 의 최솟값은
 $\overline{OB} = \sqrt{5}$



9. $A(a, 8)$, $B(b, a)$, $C(5, b)$ 인 $\triangle ABC$ 의 무게중심이 $G(a, 3)$ 일 때, 선분 BG 의 길이는?

① 2 ② $\sqrt{10}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{34}$

해설

$$\frac{a+b+5}{3} = a, \frac{8+a+b}{3} = 3$$

$$\therefore a = 2, b = -1$$

$$\text{따라서 } \overline{BG} = \sqrt{(2+1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{10}$$

10. $\triangle ABC$ 의 세 변 AB, BC, CA의 중점의 좌표가 각각 $(-2, 7)$, $(-6, 4)$, $(5, -2)$ 일 때, 이 삼각형의 무게중심의 좌표는 (a, b) 이다. 이 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$A(a_1, b_1)$ $B(a_2, b_2)$ $C(a_3, b_3)$ 라고 하면 각 중점좌표는

$$\left(\frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{b_1 + b_2}{2}\right),$$

$$\left(\frac{a_2 + a_3}{2}, \frac{b_2 + b_3}{2}\right),$$

$$\left(\frac{a_3 + a_1}{2}, \frac{b_3 + b_1}{2}\right) \text{ 이고}$$

이들의 합을 3으로 나누면,

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}, \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3}\right) \text{ 로}$$

$\triangle ABC$ 의 무게중심의 좌표와 같다.

따라서 무게중심의 좌표는

$$G = \left(\frac{-2 - 6 + 5}{3}, \frac{7 + 4 - 2}{3}\right) = (-1, 3)$$

$\therefore 2$

11. 세 점 $A(4, -5)$, $B(-5, 2)$, $C(-8, 3)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 $\triangle ABC$ 에 대하여 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 의 값이 최소가 될 때, 점 P의 좌표는?

① $(-3, -3)$

② $(-3, 0)$

③ $(0, 0)$

④ $(3, 0)$

⑤ $(3, 3)$

해설

P(x, y)라 하면

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$$

$$= (x-4)^2 + (y+5)^2 + (x+5)^2 + (y-2)^2 + (x+8)^2 + (y-3)^2$$

$$= 3(x+3)^2 + 3y^2 + 116$$

따라서 $x = -3, y = 0$ 일 때, $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 은 최소가 된다.