

1. 두 다항식 $f(x) = x^2 + 3x + a$, $g(x) = x^3 + ax$ 를 $x+2$ 로 나눈 나머지가 같을 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -2$

해설

$f(x) = x^2 + 3x + a$, $g(x) = x^3 + ax$ 에서

$f(-2) = g(-2)$ 이므로

$$4 - 6 + a = -8 - 2a$$

$$\therefore a = -2$$

2. 다항식 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눌 때의 나머지는 3이고, $x-2$ 로 나눌 때의 나머지는 1이다. 이 다항식을 $(x-1)(x-2)$ 로 나눌 때의 나머지를 $ax+b$ 라고 할 때, $a+b$ 를 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$f(x) = (x-1)(x-2)Q(x) + ax + b$$

$$f(1) = a + b = 3, f(2) = 2a + b = 1$$

$$a = -2, b = 5$$

$$\therefore a + b = 3$$

3. 다항식 $f(x)$ 를 $2x - 1$ 로 나누면 나머지는 -4 이고, 그 몫을 $x + 2$ 로 나누면 나머지는 2 이다. 이때, $f(x)$ 를 $x + 2$ 로 나눌 때의 나머지를 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -14

해설

$$f(x) = (2x - 1)Q(x) - 4 \text{라 하면}$$

$$f(-2) = -5Q(-2) - 4$$

$$\text{그런데 } Q(-2) = 2 \text{ 이므로 } f(-2) = -14$$

4. x 의 다항식 $f(x)$ 를 $x+1$ 로 나눌 때, 나머지가 2이다. 이 때, $(x^2 - x + 3)f(x)$ 를 $x+1$ 로 나눈 나머지를 구하면?

① 10

② 6

③ 0

④ 30

⑤ 12

해설

$$f(-1) = 2$$

$$(x^2 - x + 3)f(x) = (x+1)Q(x) + R$$

$x = -1$ 대입

$$\therefore R = 5f(-1) = 5 \times 2 = 10$$

5. 다항식 $f(x) = x^2 + ax + b$ 에 대하여 $f(x) - 2$ 는 $x - 1$ 로 나누어 떨어지고, $f(x) + 2$ 는 $x + 1$ 로 나누어떨어진다. 이 때, $a - 2b$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$f(x) - 2$ 는 $x - 1$ 로 나누어떨어지므로

$$f(1) - 2 = 0 \therefore 1 + a + b - 2 = 0$$

$$\therefore a + b = 1 \cdots \textcircled{1}$$

$f(x) + 2$ 는 $x + 1$ 로 나누어떨어지므로

$$f(-1) + 2 = 0 \therefore 1 - a + b + 2 = 0$$

$$\therefore -a + b = -3 \cdots \textcircled{2}$$

①, ② 에서 $a = 2$, $b = -1$

$$\therefore a - 2b = 4$$

6. x 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 - x + b$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. 다음 중 옳지 않은 것은?

k	1	a	-1	b
		c	d	a
1	4	3	5	

① $a = 3$

② $b = 2$

③ $c = 1$

④ $d = 4$

⑤ $k = -1$

해설

다항식 $x^3 + ax^2 - x + b$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

1	1	a	-1	b
		1	$a+1$	a
1	$a+1$	a	$b+a$	

$k = 1, a = 3, b = 2, c = 1, d = 4$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

7. x 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 - x + b$ 를 $x-3$ 로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. $a + b + c + d + k$ 의 값을 구하면?

k	1	a	-1	b
		c	d	33
	1	4	11	37

① 19

② 20

③ 21

④ 22

⑤ 23

해설

다항식 $x^3 + ax^2 - x + b$ 를 $x-3$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

3	1	a	-1	b
		3	$3a + 9$	$9a + 24$
	1	$a + 3$	$3a + 8$	$9a + b + 24$

이때 $k = 3$, $c = 3$, $a + 3 = 4$, $3a + 9 = d$, $9a + b + 24 = 37$
 이므로

$$k = 3, c = 3, a = 1, d = 12, b = 4$$

$$\text{따라서 } a + b + c + d + k = 1 + 4 + 3 + 12 + 3 = 23$$

8. x 에 관한 항등식 $x^3 + 2x^2 - 3x + 5 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$ 를 만족시키는 a, b, c, d 에 대하여 $abcd$ 의 값은?

① -10

② 10

③ 50

④ 100

⑤ 200

해설

$$\begin{aligned} & a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d \\ &= (x-1)\{a(x-1)^2 + b(x-1) + c\} + d \\ &= (x-1)[(x-1)\{a(x-1) + b\} + c] + d \end{aligned}$$

따라서 $x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ 를 $x-1$ 로 연속으로 나눌 때 나오는 나머지가 순서대로 d, c, b 가 되고 마지막의 몫이 a 이다.

$$a = 1, b = 5, c = 4, d = 5$$

$$\therefore abcd = 100$$

9. 다항식 $f(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지는 5이고, 몫 $Q(x)$ 를 다시 $x+3$ 으로 나누면 나머지가 3이다. 이때, $f(x)$ 를 $x+3$ 으로 나눈 나머지는?

① 10

② -10

③ 9

④ -9

⑤ 8

해설

나머지정리에 의해 $f(x)$ 를 $x+3$ 으로 나눈 나머지는 $f(-3)$ 이다.

$f(x) = (x-2)Q(x) + 5$ 에서

$x = -3$ 을 대입하면 $f(-3) = (-3-2)Q(-3) + 5$

$Q(x)$ 를 $x+3$ 으로 나누었을 때의 나머지가 3이므로 $Q(-3) = 3$

$\therefore f(-3) = -10$

10. 다항식 $f(x)$ 에 대하여 $f(x) + 2$, $xf(x) + 2$ 가 모두 일차식 $x - \alpha$ 로 나누어떨어질 때, $f(1)$ 의 값을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$\begin{cases} f(x) = (x - \alpha)Q(x) - 2 \cdots \textcircled{㉠} \\ xf(x) = (x - \alpha)Q'(x) - 2 \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

$\textcircled{㉠} \times x = \textcircled{㉡}$ 에서

$$\begin{aligned} xf(x) &= (x - \alpha)Q(x) - 2x \\ &= (x - \alpha)Q(x) - 2(x - \alpha) - 2\alpha \\ &= (x - \alpha)\{Q(x) - 2\} - 2\alpha \end{aligned}$$

$$\therefore -2\alpha = -2$$

$$\therefore \alpha = 1$$

$$\therefore f(x) = (x - 1)Q(x) - 2$$

$$\therefore f(1) = -2$$

해설

$f(x) + 2$, $xf(x) + 2$ 가 모두 일차식 $x - \alpha$ 로 나누어떨어지므로
 $f(\alpha) + 2 = 0 \therefore f(\alpha) = -2 \cdots \textcircled{㉠}$

$$\alpha f(\alpha) + 2 = 0 \cdots \textcircled{㉡}$$

①, ②에서 $\alpha = 1$

$$\therefore f(1) = f(\alpha) = -2 (\because \textcircled{㉠})$$

11. x^{30} 을 $x-3$ 으로 나눌 때 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라 하면 $Q(x)$ 의 계수의 총합(상수항 포함)과 R 과의 차는?

① $\frac{1}{2}(3^{29} + 1)$

② $\frac{1}{2} \cdot 3^{30}$

③ $\frac{1}{2}(3^{30} - 1)$

④ $\frac{1}{2}(3^{30} + 1)$

⑤ $\frac{1}{2}(3^{29} - 1)$

해설

$$x^{30} = (x-3)Q(x) + R$$

$$x = 3 \text{을 대입하면 } 3^{30} = R$$

$Q(x)$ 의 계수의 총합은 $Q(1)$ 과 같으므로

$$x = 1 \text{을 대입하면 } 1 = -2Q(1) + 3^{30}$$

$$\therefore Q(1) = \frac{3^{30} - 1}{2}$$

$$\therefore R - Q(1) = 3^{30} - \frac{3^{30} - 1}{2} = \frac{3^{30} + 1}{2} = \frac{1}{2}(3^{30} + 1)$$

12. x 의 다항식 $f(x) = x^5 - ax - 1$ 이 계수가 정수인 일차인수를 갖도록 정수 a 의 값을 구하면?

- ① $a = 0$ 또는 2 ② $a = 1$ 또는 2 ③ $a = -1$ 또는 2
④ $a = 0$ 또는 1 ⑤ $a = 0$ 또는 -2

해설

상수항이 -1 이므로 만일 일차인수가 있다면 그것은 $x - 1$ 또는 $x + 1$ 뿐이다.

(i) $f(1) = 1 - a - 1 = 0$ 에서 $a = 0$

(ii) $f(-1) = -1 + a - 1 = 0$ 에서 $a = 2$

13. $f(x) = 3x^3 - x + 2$ 일 때, $f(x+1) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ 이다. 이 때, $A + B + C + D$ 의 값을 구하면 ?

① 4

② 14

③ 24

④ 34

⑤ 44

해설

$f(x+1) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ 에 $x = 1$ 을 대입하면

$f(2) = A + B + C + D$ 이므로

$f(2)$ 를 구하기 위해서는

$f(x) = 3x^3 - x + 2$ 에 $x = 2$ 를 대입하면

$f(2) = 3 \times 2^3 - 2 + 2 = 24$

해설

$x + 1 = t$ 라 하면,

$f(t) = A(t-1)^3 + B(t-1)^2 + C(t-1) + D$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ & & 3 & 3 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 3 & 3 & 2 & 4 \\ & & 3 & 6 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 3 & 6 & 8 & \\ & & 3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rr} 3 & 9 & \end{array}$$

$\therefore A = 3, B = 9, C = 8, D = 4$

$\therefore A + B + C + D = 24$

14. x^{100} 을 $x + 2$ 로 나눈 몫을 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{99}x^{99}$ 라 할 때,
 $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{99}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{5}(1 - 2^{100})$

② $\frac{1}{6}(1 - 2^{100})$

③ $\frac{1}{4}(1 - 2^{100})$

④ $\frac{1}{3}(1 - 2^{100})$

⑤ 1

해설

(i) $f(x) = x^{100} = (x + 2)Q(x) + R$ 라 하면

$$f(-2) = 2^{100} = R$$

$$\therefore R = 2^{100}$$

$$f(1) = 3Q(1) + R$$

$$\therefore Q(1) = \frac{1}{3}(1 - R) = \frac{1}{3}(1 - 2^{100})$$

(ii) $Q(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{99}x^{99}$

$$\therefore Q(1) = a_0 + a_1 + \cdots + a_{99}$$

$$\therefore a_0 + a_1 + \cdots + a_{99} = Q(1) = \frac{1}{3}(1 - 2^{100})$$

15. x 에 대한 항등식 $x^{1997} + x + 1$ 을 $x^2 - 1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 할 때, $Q(x)$ 의 모든 계수와 상수항의 합을 구하면?

- ① 997 ② 998 ③ 1997 ④ $\frac{1997}{2}$ ⑤ $\frac{1997}{3}$

해설

$$x^{1997} + x + 1 = (x^2 - 1)Q(x) + ax + b \text{라 하면}$$

$$x = 1 \text{ 일 때, } 3 = a + b$$

$$x = -1 \text{ 일 때, } -1 = -a + b$$

$$\therefore a = 2, b = 1$$

$$\therefore x^{1997} + x + 1 = (x^2 - 1)Q(x) + 2x + 1$$

$$x^{1997} - x = (x^2 - 1)Q(x)$$

$$x(x-1)(x^{1995} + x^{1994} + \cdots + x + 1)$$

$$= (x-1)(x+1)Q(x)$$

$$\therefore x(x^{1995} + x^{1994} + \cdots + x + 1) = (x+1)Q(x)$$

$Q(1)$ 이 $Q(x)$ 의 모든 계수의 합이므로 $x = 1$ 을 대입하면

$$2Q(1) = 1996 \quad \therefore Q(1) = \frac{1996}{2} = 998$$

16. x 에 대한 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 + 1$ 로 나누면 나누어 떨어지고, $x - 3$ 으로 나눌 때의 나머지는 5이다. 이 다항식 $f(x)$ 를 $(x^2 + 1)(x - 3)$ 으로 나눌 때의 나머지를 구하면?

① $\frac{1}{2}(x^2 + 1)$

② $\frac{1}{3}(x^2 + 1)$

③ $\frac{1}{5}(x^2 + 1)$

④ $2x^2 - 3x + 1$

⑤ $\frac{2}{3}x^2 - x + \frac{1}{2}$

해설

$$f(x) = (x^2 + 1)Q_1(x)$$

$$f(x) = (x - 3)Q_2(x) + 5$$

$$\therefore f(3) = 5$$

$$f(x) = (x^2 + 1)(x - 3)Q_3(x) + ax^2 + bx + c$$

$$= (x^2 + 1)(x - 3)Q_3(x) + a(x^2 + 1)$$

($\because f(x)$ 는 $x^2 + 1$ 로 나누어 떨어지므로)

$$= (x^2 + 1)\{(x - 3)Q_3(x) + a\}$$

$$x = 3 \text{을 대입하면 } f(3) = 10a = 5$$

$$\therefore a = \frac{1}{2} \text{이고 나머지는 } \frac{1}{2}(x^2 + 1)$$