1. x^2-2x-y^2+2y를 인수분해 하였더니 $(x+ay)(x-by+c)$가 된다고 할 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** -4

해설

x^2-2x-y^2+2y

$=(x^2-y^2)-2(x-y)$

$=(x+y-2)(x-y)$

$=(x+ay)(x-by+c)$

계수를 비교하면

$a=-1, b=-1, c=-2$

$\therefore a+b+c=-1-1-2=-4$

2. 이차방정식 $x^2 + (a+2)x + 1 = 0$이 중근을 갖도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

주어진 이차방정식이 중근을 가지려면

$D = (a+2)^2 - 4 = 0$이므로

$a^2 + 4a + 4 - 4 = a^2 + 4a = 0$

따라서 $a = 0$ 또는 $a = -4$

따라서 상수 a의 값의 합은 -4

3. 사차방정식 $x^4+5x^3-20x-16=0$의 네 근의 제곱의 합을 구하면?

① 25　　② 20　　③ 10　　④ 7　　⑤ 4

해설

$x^4+5x^3-20x-16$
$=(x+1)(x^3+4x^2-4x-16)$
$=(x+1)(x+4)(x^2-4)$
$=(x+1)(x+4)(x+2)(x-2)$
따라서 네근은 $-1,\ -2,\ -4,\ 2$
$\therefore$ 네근의 제곱의 합은 $1+4+16+4=25$

4. 연립부등식 $\begin{cases} 8x - 5 \le 10 \\ 2(1+3x) < 3x+8 \end{cases}$ 을 만족하는 자연수의 개수는?

① 1 개　　② 2 개　　③ 3 개　　④ 4 개　　⑤ 5 개

해설

$8x - 5 \le 10,\ \ x \le \dfrac{15}{8}$

$2(1+3x) < 3x+8$

$2+6x < 3x+8,\ \ x < 2$

따라서, 해는 $x \le \dfrac{15}{8}$ 이며, 이를 만족하는 자연수는 1 밖에 없다.

5. 세 직선 $x+2y=5$, $2x-3y=4$, $ax+y=0$이 삼각형을 이루지 못할 때, 상수 a의 값들의 곱은?

① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{3}{23}$ ③ $-\frac{1}{23}$ ④ $\frac{2}{23}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

해설

주어진 세 직선이 일치하는 경우는 없으므로
삼각형을 이루지 못하는 것은 두 직선이
서로 평행해서 교점이 두 개만 생기거나
세 직선이 모두 한 점에서 만나는 경우이다.

(ⅰ) 두 직선이 평행한 경우 세 직선의 기울기는

각각 $-\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $-a$이므로

$a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=-\frac{2}{3}$이면 두 직선이 평행하다.

(ⅱ) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우

$x+2y=5$와 $2x-3y=4$의 교점은 $\left(\frac{23}{7}, \frac{6}{7}\right)$

이 점이 $ax+y=0$ 위에 있으려면 $a=-\frac{6}{23}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{3}$, $-\frac{6}{23}$

따라서 세 수의 곱은 $\frac{2}{23}$

6. 점 $(-1, 2)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동시킨 후, 다시 y 축에 대하여 대칭이동시켰다. 이것을 x 축으로 a, y 축으로 b 만큼 평행이동시킨 후 다시 원점에 대하여 대칭이동시켰더니 점 $(1, 2)$ 가 되었다. $a + b$ 의 값은?

① -3　② -2　③ -1　④ 0　⑤ 1

해설

점$(-1,\ 2)$ 를 x 축에 대하여
대칭이동하면 $(-1, -2)$
이것을 y 축에 대하여 대칭이동하면 $(1, -2)$
이것을 다시 x 축으로 a,
y 축으로 b 만큼 평행이동하면
$(1 + a,\ -2 + b)$
원점에 대하여 대칭이동하면 $(-1 - a,\ 2 - b)$
이것이 점 $(1, 2)$ 가 되려면 $a = -2,\ b = 0$
$\therefore a + b = -2$

7. x에 대한 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는 6이고, $(x-2)^2$으로 나눈 나머지는 $6x+1$이다. 이때, $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나눈 나머지는?

① $6x+7$　　② $-6x+5$　　③ $7x+7$

④ $7x-1$　　⑤ $8x+13$

해설

$f(1)=6,\ f(x)=(x-2)^2q(x)+6x+1$

$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$에서

$f(1)=a+b=6,\ f(2)=2a+b=13$

$\therefore\quad a=7,\ b=-1$

따라서 $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나눈 나머지는 $7x-1$이다.

8. 이차함수 $y = x^2 + bx + c$ 는 $x = -1$ 일 때, 최솟값 2 를 갖는다고 한다. $b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x = -1$ 일 때, 최솟값 2 를 가지므로 꼭짓점의 좌표는 $(-1,\ 2)$

$$\begin{aligned} y &= x^2 + bx + c \\ &= (x+1)^2 + 2 \\ &= x^2 + 2x + 3 \end{aligned}$$

$\therefore b = 2,\ c = 3$

$\therefore b + c = 2 + 3 = 5$

9. 방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 w라고 할 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $w^3 - 1 = 0$

② $w^2 - w + 1 = 0$

③ $w + \dfrac{1}{w} = -1$

④ $w^{2008} + w^{2009} = -1$

⑤ 다른 허근은 w^2이다.

해설

① $w^3 = 1$이므로 $w^3 - 1 = 0$

② $w^3 - 1 = 0$이므로

$(w-1)(w^2 + w + 1) = 0$

$w - 1 \neq 0$이므로 $w^2 + w + 1 = 0$

$\therefore\ w^2 - w + 1 = -2w \neq 0$

③ $w^2 + w + 1 = 0$이고

$\omega \neq 0$이므로

양변을 w로 나누면 $w + 1 + \dfrac{1}{w} = 0$

$\therefore\ w + \dfrac{1}{w} = -1$

④ $\omega^{2008} = (\omega^3)^{669} \cdot \omega = \omega,$

$\omega^{2009} = (\omega^3)^{669} \cdot \omega^2 = \omega^2$

$\therefore\ w^{2008} + w^{2009} = w + w^2 = -1$

$(\because w^2 + w + 1 = 0)$

⑤ $(w^2)^3 = w^6 = (w^3)^2 = 1^2 = 1$

따라서, w^2은 $x^3 = 1$의 다른 한 허근이다.

10. 연립부등식 $\begin{cases} 2 - x \leq 6x + a \\ 4x - 5 \geq 5x - 6 \end{cases}$ 의 해가 $x = m$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

$4x - 5 \geq 5x - 6$

$-x \geq -1$

$x \leq 1$

$2 - x \leq 6x + a$

$-7x \leq a - 2$

$x \geq \dfrac{a-2}{-7}$

$x = m$이므로 $\dfrac{a-2}{-7} = 1$

$\therefore\ a = -5$

11. 윤지네 반 학생들을 긴 의자에 앉히려고 한다. 한 의자에 4 명씩 앉으면 9 명의 학생이 앉지 못하고, 5 명씩 앉으면 의자가 4 개 남는다. 긴 의자의 개수가 될 수 <u>없는</u> 것은?

① 30 개 ② 31 개 ③ 32 개 ④ 33 개 ⑤ 34 개

해설

$5(x-5)+1 \le 4x+9 \le 5(x-5)+5$

$5x-24 \le 4x+9 \le 5x-20$

$x \le 33,\ \ x \ge 29$

$\therefore\ \ 29 \le x \le 33$

12. 부등식 $|x+1|+|x-2|+1<x+4$을 만족시키는 정수 x의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$|x+1|+|x-2|+1<x+4$

i) $x<-1$

$-x-1-x+2+1<x+4,\ x>-\dfrac{2}{3}$

공통범위 없음

ii) $-1\leq x<2$

$x+1-x+2+1<x+4,\ x>0$

공통범위 : $0<x<2\rightarrow$ 정수 : 1

iii) $x\geq 2$

$x+1+x-2+1<x+4,\ x<4$

공통범위 : $2\leq x<4\rightarrow$ 정수$=2,\ 3$

$\therefore$ 정수 x의 개수 : 1, 2, 3으로 3개

13. 이차부등식 $ax^2 - bx + c < 0$ 의 해가 $x < -1$ 또는 $x > 3$ 일 때, 이차부등식 $ax^2 + cx + b > 0$ 의 해는?

① $-2 < x < 1$ ② $-1 < x < 0$ ③ $1 < x < 2$

④ $1 < x < 3$ ⑤ $2 < x < 5$

해설

$x < -1$ 또는 $x > 3$ 인 해를 갖는 이차항계수가
1 인 이차부등식은 $(x+1)(x-3) > 0$ 이므로,
$ax^2 - bx + x < 0$ 의 a 가 음수이고,
이 부등식은 $a(x+1)(x-3) < 0$ 과 같다.
따라서 $b = 2a,\ c = -3a$ 이고 주어진 부등식
$ax^2 - 3ax + 2a = a(x^2 - 3x + 2)$
$= a(x-2)(x-1) > 0$ 이 된다.
$a < 0$ 이므로 만족하는 해는 $(x-1)(x-2) < 0$ 에서
$1 < x < 2$

14. 좌표평면 위의 점 $\mathrm{A}(1,\ 4)$ 에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}$ 를 $3:2$ 로 외분하는 점 Q 의 좌표가 $(4,\ 1)$ 일 때, $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}$

해설

점 B 의 좌표를 $\mathrm{B}(a,\ b)$ 라 하면

점 Q 의 좌표는 $\mathrm{Q}\left(\dfrac{3a-2}{3-2},\ \dfrac{3b-8}{3-2}\right)$ 이다.

이때, 점 Q 의 좌표가 $(4,\ 1)$ 이므로

$3a-2=4 \quad \therefore\ a=2,$

$3b-8=1 \quad \therefore\ b=3$

$\therefore\ \mathrm{B}(2,\ 3)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(2-1)^2+(3-4)^2}=\sqrt{2}$

15. 두 직선 $3x+4y=24$와 $3x+4y=4$사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

두 직선이 평행하므로 한 직선의 임의의 점과 나머지 직선 사이의 거리를 구하면 된다.

$3x+4y=24$의 점 $(0,6)$

$$\frac{|0\times3+6\times4-4|}{\sqrt{3^2+4^2}}=4$$

16. 직선 $y = \sqrt{3}x + 5$ 에 평행하고, 원 $x^2 + y^2 = 16$ 에 접하는 직선의 방정식을 구하면?

① $y = \sqrt{3}x \pm 8$ ② $y = \sqrt{2}x \pm 8$ ③ $y = \sqrt{3}x \pm 7$

④ $y = -\sqrt{3}x \pm 8$ ⑤ $y = -\sqrt{2}x \pm 8$

해설

기울기 $\sqrt{3}$ 인 접선을 구하는 문제이다.
공식에서 $y = \sqrt{3}x \pm 4\sqrt{3+1}$,
$\therefore\ y = \sqrt{3}x \pm 8$

해설

(다른 풀이1)
기울기 $\sqrt{3}$ 인 직선 $y = \sqrt{3}x + n$ 이라 두면
$x^2 + y^2 = 16$ 에 접하므로 연립방정식의 해는 중근이다.
$x^2 + (\sqrt{3}x + n)^2 = 16$, $4x^2 + 2n\sqrt{3}x + n^2 - 16 = 0$,
$D/4 = (n\sqrt{3})^2 - 4(n^2 - 16) = 0$
$\therefore\ n = \pm 8$
구하는 접선은 $y = \sqrt{3}x \pm 8$
(다른 풀이2)
기울기 $\sqrt{3}$ 인 접선 $y = \sqrt{3}x + n$ 에서
$\sqrt{3}x - y + n = 0$
원의 중심에서 이 직선에
이르는 거리가 반지름과 같으므로
$$\frac{|n|}{\sqrt{3+1}} = 4,$$
$\therefore\ n = \pm 8$,
따라서 $y = \sqrt{3}x \pm 8$

17. $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+a$가 이차식의 완전제곱이 되도록 a의 값을 정하면?

① 4 ② 8 ③ 12 ④ 15 ⑤ 16

해설

(준식)$=(x^2-8x+7)(x^2-8x+15)+a$
여기서, $x^2-8x+7=X$로 놓으면
$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= X(X+8)+a \\ &= X^2+8X+a=(X+4)^2+a-16\end{aligned}$$
따라서 $a=16$

18. 두 실수 a, b에 대하여 복소수 $z = a + bi$와 켤레복소수 $\bar{z} = a - bi$의 곱 $z\bar{z} = 5$일 때, $\frac{1}{2}\left(z + \frac{5}{z}\right)$를 간단히 하면?

① b　② $2b$　③ 0　④ $5a$　⑤ a

해설

$z\bar{z} = 5, \quad \bar{z} = \frac{5}{z}$

$\therefore \frac{1}{2}\left(z + \frac{5}{z}\right) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2} \times 2a = a$

19. 이차방정식 $x^2-2ax+a+2=0$의 두 근이 모두 1보다 클 때 실수 a의 값의 범위는?

① $0 \le a < 1$　② $1 \le a < 2$　③ $2 \le a < 3$

④ $3 \le a < 4$　⑤ $4 \le a < 5$

해설

$f(x)=x^2-2ax+a+2=(x-a)^2-a^2+a+2$

ⅰ) $D/4=a^2-a-2 \ge 0,\quad a \le -1 \ or \ a \ge 2$

ⅱ) $f(1)=1-2a+a+2>0 \quad \therefore a<3$

ⅲ) 대칭축 $x=a>1$

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에서 $2 \le a < 3$

20. 두 원 $x^2+y^2-2=0$, $x^2+y^2+kx-4y-1=0$ 의 교점을 지나는 직선이 $x+2y+1=0$ 과 평행일 때, k 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : $k=-2$

해설

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-2-(x^2+y^2+kx-4y-1)=0$

$\therefore kx-4y+1=0$

이 직선이 직선 $x+2y+1=0$ 과 평행하므로

$$\frac{k}{1}=\frac{-4}{2}\neq\frac{1}{1}$$

$\therefore\ k=-2$