1. $a > b > 1$ 인 실수 a, b 에 대하여 다음 중 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ② $\frac{a}{1-a} > \frac{b}{1-b}$ ③ $a+3 < b+3$

④ $a-1 < b-1$ ⑤ $\frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b}$

해설

① 양변에 ab 를 곱하면 주어진 조건과 다르게 나온다.

② $1-a < 0, 1-b < 0$ 에서 $(1-a)(1-b) > 0$ 이므로
양변에 $(1-a)(1-b)$ 를 곱하면
$a(1-b) > b(1-a)$, $a-ab > b-ab$, $a > b$
주어진 조건에 만족한다.

③ 양변에 3을 빼주면 주어진 조건에 만족하지 않는다.

④ 양변에 1을 더해주면 주어진 조건에 만족하지 않는다.

⑤ $1+a > 0, 1+b > 0$ 이므로 $(1+a)(1+b)$ 를 양변에 곱하면
$a(1+b) < b(1+a)$
$a+ab < b+ab$
$a < b$
주어진 조건을 만족하지 않는다.

2. $3x+y=1$이고 $1 \le x \le 5$일 때, y의 최댓값과 최솟값의 합은?

① -20 ② -16 ③ -12 ④ -8 ⑤ 4

해설

$x=\dfrac{1-y}{3}$이므로 $1 \le x \le 5$에 대입하면

$1 \le \dfrac{1-y}{3} \le 5,\ 3 \le 1-y \le 15$

$2 \le -y \le 14$

$\therefore -14 \le y \le -2$

따라서 y의 최댓값은 -2, 최솟값은 -14이므로 합은 -16

3. 부등식 $3x+2 \geq 8$을 풀면?

① $x \geq -2$　② $x \geq -1$　③ $x \geq -\frac{1}{2}$

④ $x \geq \frac{3}{2}$　⑤ $x \geq 2$

해설

$3x+2 \geq 8,\ 3x \geq 6 \ \therefore x \geq 2$

4. 다음 연립부등식을 풀면?

$$\begin{cases} 2x-1>-5 \\ x+2 \geq 4x-1 \end{cases}$$

① $x>-2$ ② $x \leq 1$ ③ $-2 \leq x<1$

④ $-2<x \leq 1$ ⑤ 해는 없다.

해설

$$\begin{cases} 2x-1>-5 \\ x+2 \geq 4x-1 \end{cases} \Rightarrow -2<x \leq 1$$

5. 부등식 $4-x \le 3x-4 < 2x+2$ 를 풀면?

① $x \le 2$ ② $x \ge 2$ ③ $2 \le x < 6$

④ $x \le 6$ ⑤ $x \ge 6$

해설

$4-x \le 3x-4 < 2x+2$

$\Rightarrow \begin{cases} 4-x \le 3x-4 \\ 3x-4 < 2x+2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -x-3x \le -4-4 \\ 3x-2x < 2+4 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -4x \le -8 \\ x < 6 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x < 6 \end{cases}$

$\therefore\ 2 \le x < 6$

6. 부등식 $|x-1|<2$을 풀면?

① $-1<x<0$　② $-1<x<3$

③ $1<x<3$　④ $x<-1$ 또는 $x>3$

⑤ $\frac{1}{2}<x<1$

해설

$|x-1|<2$에서 $-2<x-1<2$

$\therefore -1<x<3$

7. 부등식 $|7-3x|>2$를 풀면?

① $x<\frac{5}{3}$ 또는 $x>3$　② $x<\frac{5}{2}$ 또는 $x>2$

③ $x<\frac{5}{4}$ 또는 $x>4$　④ $x<1$ 또는 $x>3$

⑤ $x<\frac{5}{6}$ 또는 $x>6$

해설

$|7-x|>2$ 에서

$7-3x>2$ 또는 $7-3x<-2$

$-3x>-5$ 또는 $-3x<-9$

$\therefore x<\frac{5}{3}$ 또는 $x>3$

8. 연립부등식 $\begin{cases} x^2-2x+1>0 \\ 2x^2-9x-18\le 0 \end{cases}$ 을 만족하는 정수해의 개수는?

① 7 개 ② 8 개 ③ 9 개 ④ 10 개 ⑤ 11 개

해설

$\begin{cases} x^2-2x+1>0 & \cdots (가) \\ 2x^2-9x-18\le 0 & \cdots (나) \end{cases}$

(가)에서 $(x-1)^2>0$

$\therefore x\neq 1$ 인 모든 실수

(나)에서 $(2x+3)(x-6)\le 0$

$\therefore -\frac{3}{2}\le x\le 6$

따라서 공통 범위를 구하면

$-\frac{3}{2}\le x\le 6, x\neq 1$

이 범위를 만족하는 정수는

$-1,\ 0,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ 이다.

9. 실수 a는 $0 < a < \frac{1}{2}$을 만족할 때, 다음 중 가장 큰 수를 구하시오.

① 0 ② 1 ③ $\frac{1}{a}$ ④ $\frac{1}{1-a}$ ⑤ $\frac{a}{1+a}$

해설

주어진 a 값의 범위를 이용하여 보기식의 값의 범위를 알아낸다.

③ $\frac{1}{\frac{1}{2}} < \frac{1}{a} < \frac{1}{0}$, $2 < \frac{1}{a}$

④ $-\frac{1}{2} < -a < 0$, $\frac{1}{2} < 1-a < 1$

$1 < \frac{1}{1-a} < 2$

⑤(주어진 식)$=\frac{1+a-1}{1+a} = 1 - \frac{1}{1+a}$ 에서

$1 < 1+a < \frac{3}{2}$

$\frac{2}{3} < \frac{1}{1+a} < 1$

$0 < 1 - \frac{1}{1+a} < \frac{1}{3}$

10. 부등식 $ax-b^2 > bx+a^2-8$의 해가 모든 실수이기 위한 a의 조건은?
(a, b는 실수)

① $a=b$이고 $-1<a<1$　　② $a=b$이고 $-2<a<2$

③ $a=b$이고 $-3<a<3$　　④ $a=b$이고 $-4<a<4$

⑤ $a=b$이고 $-5<a<5$

해설

$ax-b^2 > bx+a^2-8$에서
$(a-b)x-b^2-a^2+8>0$이 모든 x에 대해서 성립해야 하므로
$a=b$
$\therefore -2a^2+8>0 \quad 2a^2<8$
$\therefore a^2<4$이므로 $-2<a<2$
즉 $a=b$이고 $-2<a<2$

11. $ax+b>0$의 해가 $x<2$일 때, $(a+b)x<5b$의 해는?

① $x>5$　② $x>10$　③ $x<1$

④ $x<5$　⑤ $x<10$

해설

$ax+b>0$에서 $ax>-b$

해가 $x<2$ 이므로

$a<0$ ·····㉠

$-\dfrac{b}{a}=2$ ·····㉡

㉡을 정리하면 $b=-2a$ ·····㉢

㉢에서 $b=-2a$를 $(a+b)x<5b$에 대입하면

$(a-2a)x<5\cdot(-2a)$, $-ax<-10a$

㉠에서 $a<0$이므로 $x<10$

12. 연립부등식 $\begin{cases} 7-2x \geq -3 \\ 4x+6 > x \\ x-1 < 3 \end{cases}$ 을 만족하는 정수는 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 5개

해설

$\begin{cases} 7-2x \geq -3 \\ 4x+6 > x \\ x-1 < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ x > -2 \\ x < 4 \end{cases}$

따라서 $-2 < x < 4$이므로 연립방정식을 만족하는 정수는 -1, 0, 1, 2, 3으로 5개 이다.

13. 연립부등식 $\begin{cases} 3(x-1) \geq 2+4(2x-5) \\ 2(3-2x) < -x+10 \end{cases}$ 을 만족하는 양의 정수 x 의 개수는?

① 1 개 ② 3 개 ③ 5 개 ④ 6 개 ⑤ 7 개

해설

i) $3(x-1) \geq 2+4(2x-5) \Rightarrow x \leq 3$

ii) $2(3-2x) < -x+10 \Rightarrow x > -\frac{4}{3}$

연립부등식의 해는 $-\frac{4}{3} < x \leq 3$ 이므로, 이를 만족하는 양의 정수 x 의 개수는 1, 2, 3 의 3 개이다.

14. 연립부등식 $\begin{cases} 3x+1 \geq \frac{1}{2}x-4 \\ 4x-4 < x+2 \end{cases}$ 를 만족하는 x 의 값 중 가장 작은 정수를 a , 가장 큰 정수를 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$3x+1 \geq \frac{1}{2}x-4$ 의 양변에 2를 곱하면

$6x+2 \geq x-8$

$5x \geq -10$

$x \geq -2$

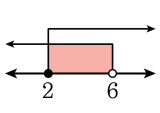
$4x-x < 2+4$

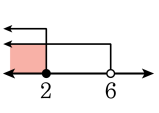
$3x < 6$, $x < 2$

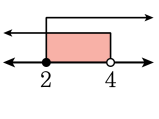
그러므로 $-2 \leq x < 2$

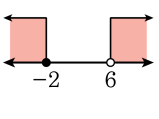
$a+b=(-2)+1=-1$

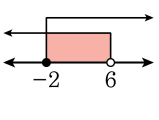
15. 부등식 $3x-11<x+1\le 4x-5$ 의 해를 수직선에 바르게 나타낸 것은?

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

해설

$$\begin{cases} 3x-11<x+1 \\ x+1\le 4x-5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x<6 \\ x\ge 2 \end{cases}$$

따라서 $2\le x<6$

16. 연립부등식 $\begin{cases} 3x-3>-x+9 \\ 5x<4x+a \end{cases}$ 를 만족하는 자연수가 2개일 때, a의 값의 범위는?

① $3<a\le 4$ ② $3<a<4$ ③ $4\le a<5$

④ $4<a\le 5$ ⑤ $5<a\le 6$

해설

$3x-3>-x+9,\ x>3$

$5x<4x+a,\ x<a$

$\therefore\ 3<x<a$

만족하는 자연수가 2개, 즉 4, 5 이므로 $5<a\le 6$

17. 연립부등식 $\begin{cases} 0.2x+1 \geq 0.7x \\ \dfrac{x}{2}-1 > \dfrac{x}{6}+\dfrac{1}{3} \end{cases}$ 을 만족시키는 정수 x의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 없다.

해설

(ⅰ) $0.2x+1 \geq 0.7x$, $x \leq 2$

(ⅱ) $\dfrac{x}{2}-1 > \dfrac{x}{6}+\dfrac{1}{3}$, $3x-6 > x+2$

$\therefore\ x > 4$

따라서 연립부등식을 만족시키는 정수는 없다.

18. 연립부등식 $\begin{cases} -x+a>5 \\ 3-2x \le 1 \end{cases}$ 의 해가 없을 때, 상수 a 의 값의 범위는?

① $a>3$ ② $a<3$ ③ $a>6$ ④ $a<6$ ⑤ $a \le 6$

해설

$\begin{cases} -x+a>5 \rightarrow a-5>x \\ 3-2x \le 1 \rightarrow 1 \le x \end{cases}$

해가 없으려면 $a-5 \le 1$

$\therefore a \le 6$

19. 200 원짜리 자두와 500 원짜리 복숭아를 합하여 9 개를 사는데, 그 값이 2800 원 이상 3600 원 이하가 되게 하려고 한다. 복숭아는 최대 몇 개까지 살 수 있는가?

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 6 개

해설

자두의 개수 : $(9-x)$ 개 , 복숭아의 개수 : x 개

$2800 \le 200(9-x)+500x \le 3600$

$$\begin{cases} 2800 \le 200(9-x)+500x \\ 200(9-x)+500x \le 3600 \end{cases}$$

$\therefore \frac{10}{3} \le x \le 6$

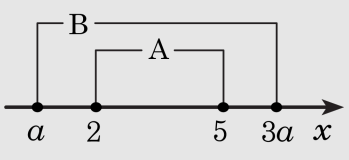
따라서 살 수 있는 복숭아의 최대 개수는 6 개이다.

20. 양의 실수 a에 대하여 $-x^2+7x-10 \geq 0$의 모든 해가 $x^2-4ax+3a^2 \leq 0$을 만족할 때, a의 값의 범위는?

① $\frac{1}{3} \leq a \leq 2$ ② $\frac{2}{3} \leq a \leq 2$ ③ $\frac{5}{3} \leq a \leq 2$
④ $\frac{5}{3} \leq a \leq 5$ ⑤ $2 \leq a \leq 5$

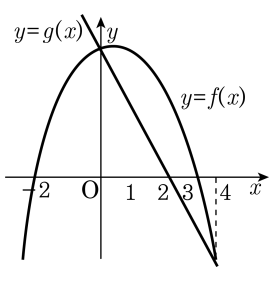
해설

$-x^2+7x-10 \geq 0$
$x^2-7x+10 \leq 0$
$(x-2)(x-5) \leq 0$
$2 \leq x \leq 5$
$x^2-4ax+3a^2 \leq 0$
$(x-a)(x-3a) \leq 0$
$a \leq x \leq 3a (\because a > 0)$
㉠의 모든 해가 ㉡에 포함되므로



따라서 $a \leq 2$, $3a \geq 5$이므로 $\frac{5}{3} \leq a \leq 2$

21. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = g(x)$ 가 다음 그림과 같을 때, 부등식 $f(x) > g(x)$ 의 해를 구하면?



① $-2 < x < 4$ ② $-2 < x < 3$

③ $0 < x < 4$ ④ $2 < x < 3$

⑤ $3 < x < 4$

해설

부등식 $f(x) > g(x)$ 의 해는
함수 $f(x)$ 의 그래프가 직선 $y = g(x)$ 보다
위쪽에 있는 x 의 구간을 의미하므로
구하는 해는 $0 < x < 4$

22. 다음 부등식을 동시에 만족하는 정수 x의 개수는?

$x^2 < 3x + 40$, $3x^2 - 7x \geq 40$

① 4개 ② 5개 ③ 6개 ④ 7개 ⑤ 8개

해설

$x^2 < 3x + 40$, $x^2 - 3x - 40 < 0$,
$(x-8)(x+5) < 0$, $-5 < x < 8$
$3x^2 - 7x \geq 40$, $3x^2 - 7x - 40 \geq 0$
$(3x+8)(x-5) \geq 0$,
$x \geq 5$ 또는 $x \leq -\frac{8}{3}$ →
공통범위는 $-5 < x \leq -\frac{8}{3}$, $5 \leq x < 8$
정수는 -4, -3, 5, 6, 7 : 5개이다.

23. 부등식 $|x^2 - 4x - 6| \le 6$의 해를 구하면?

① $-2 \le x < 6$　② $0 \le x \le 4$

③ $x \le -2$또는$x \ge 6$　④ $-2 \le x \le 0$또는$4 \le x \le 6$

⑤ $x \le 0$또는$x \ge 4$

해설

$|x^2 - 4x - 6| \le 6$에서

$$\underset{㉠}{-6 < x^2-4x-6} \le \underset{㉡}{6}$$

㉠에서 $x^2 - 4x \ge 0, x(x-4) \ge 0$

$\therefore x \le 0$또는$x \ge 4$

㉡에서 $x^2 - 4x - 12 \le 0, (x+2)(x-6) \le 0$

$\therefore -2 \le x \le 6$

따라서 공통 범위를 구하면

$-2 \le x \le 0$ 또는 $4 \le x \le 6$

24. 이차부등식 $[x]^2 + [x] - 12 \le 0$의 해가 $a \le x < b$일 때, $a + b$의 값은?
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$[x]^2 + [x] - 12 \le 0$에서

$([x] + 4)([x] - 3) \le 0$

$\therefore -4 \le [x] \le 3$

$x = -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$

$\therefore -4 \le x < 4$

따라서 $a = -4,\ b = 4$이므로 $a + b = 0$이다

25. 부등식 $2[x]^2 - 9[x] + 9 < 0$ 을 만족하는 x의 값의 범위는? (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수)

① $\frac{2}{3} < x < \frac{7}{2}$ ② $\frac{3}{2} < x \le 3$ ③ $2 \le x < 3$
④ $1 \le x < 3$ ⑤ $1 \le x \le 4$

해설

$[x] = t$로 놓으면 $2t^2 - 9t + 9 < 0$이므로
부등식을 풀면 $(2t-3)(t-3) < 0$
$\therefore \frac{3}{2} < t < 3$
따라서, $\frac{3}{2} < [x] < 3$에서 $[x] = 2$
$\therefore 2 \le x < 3$

26. 모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{x^2-2(k-4)x+4}$가 실수가 되도록 하는 k의 값의 범위는?

① $-1 \le k \le 2$
② $k \le -1$ 또는 $k \ge 2$
③ $2 \le k \le 6$
④ $k \le 2$ 또는 $k \ge 6$
⑤ $k \ge 6$

해설

근호가 실수가 되려면
근호 속의 수가 양수이어야 한다.
즉, $x^2-2(k-4)x+4 \ge 0$ 을 항상 만족시키면 되므로
판별식 $\frac{D}{4} \le 0$이 될 조건을 구하면 된다.

$\frac{D}{4} = (k-4)^2 - 4 \le 0$

$k^2-8k+12 \le 0$, $(k-2)(k-6) \le 0$

$\therefore\ 2 \le k \le 6$

27. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $\alpha<x<\beta$일 때, 이차부등식 $cx^2-bx+a>0$의 해는?(단, $\alpha>0$이다.)

① $-\frac{1}{\alpha}<x<-\frac{1}{\beta}$ ② $-\beta<x<-\alpha$

③ $\frac{1}{\beta}<x<\frac{1}{\alpha}$ ④ $x>\frac{1}{\alpha},\ x<\frac{1}{\beta}$

⑤ $x>-\frac{1}{\beta},\ x<-\frac{1}{\alpha}$

해설

$ax^2+bx+c>0$의 해가 $\alpha<x<\beta$이므로

$a<0,\ \alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$

$cx^2-bx+a>0$

에서 $a<0$이므로 양변을 a로 나누면

$\frac{c}{a}x^2-\frac{b}{a}x+1<0$

$\therefore \alpha\beta x^2+(\alpha+\beta)x+1<0$

$\therefore (\alpha x+1)(\beta x+1)<0$이고

$0<\alpha<\beta$에서 $\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\beta}$이므로

$-\frac{1}{\alpha}<-\frac{1}{\beta}$

$\therefore -\frac{1}{\alpha}<x<-\frac{1}{\beta}$

28. 포물선 $y = x^2 - 2x + 3$ 이 직선 $y = 2x + k$ 보다 위쪽에 있도록 실수 k 의 범위를 구하면?

① $k < -1$ ② $-1 < k < 0$ ③ $k > 0$

④ $0 < k < 1$ ⑤ $k > 1$

해설

포물선 $y = x^2 - 2x + 3$ 이 직선 $y = 2x + k$ 보다 위쪽에 있으려면

위 그림에서 모든 실수 x 에 대하여

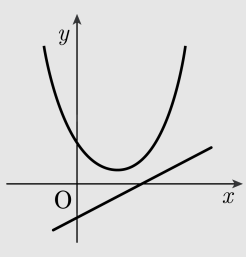
부등식 $x^2 - 4x + 3 - k > 0$ 가 항상 성립해야 한다.

즉 $x^2 - 4x + 3 - k > 0$ 에서

판별식이 0 보다 작아야 하므로

$\frac{D}{4} = 4 - (3 - k) < 0$

$\therefore\ k < -1$



29. 연립부등식 $\begin{cases} x^2-4>0 \\ 2x^2+(7-2a)x-7a<0 \end{cases}$

을 만족하는 정수가 -3 한 개뿐일 때, 상수 a 의 값의 범위를 구하면?

① $-3<a\le 3$ ② $-3<a\le 2$ ③ $-2<a\le 7$

④ $0<a\le 7$ ⑤ $7<a\le 10$

해설

$x^2-4>0$ 에서
$(x+2)(x-2)>0$
$\therefore x<-2$ 또는 $x>2\cdots$㉠
$2x^2+(7-2a)x-7a<0$ 에서
$(2x+7)(x-a)\cdots$㉡
㉠, ㉡를 동시에 만족하는 정수가
-3 뿐이어야 하므로
a 가 취할 수 있는 범위는 $-3<a\le 3$ 이다.

30. 연립방정식 $\begin{cases} x-y=2 \\ cx+y=3 \end{cases}$ 의 해 $(x,\ y)$가 제1사분면에 있을 상수 c의 조건은?

① $c=-1$　② $c>-1$　③ $c<\frac{3}{2}$

④ $0<c<\frac{3}{2}$　⑤ $-1<c<\frac{3}{2}$

해설

$\begin{cases} x-y=2 \\ cx+y=3 \end{cases}$ 을 풀면 $x=\frac{5}{c+1}, y=\frac{3-2c}{c+1}$

$x>0, y>0$ 인 c의 범위를 구한다.

$c+1>0,\ \ 3-2c>0$

$\therefore\ -1<c<\frac{3}{2}$

31. x에 관한 이차방정식 $x^2 - ax + 9 = 0$이 $x < 1$에서 두 개의 실근을 갖도록 하는 실수 a의 범위를 구하면 $a \le k$이다. 이 때, k의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $k = -6$

해설

$f(x) = x^2 - ax + 9$라 놓으면

i) 축이 $x < 1$에 있어야 하므로 $\frac{1}{2}a < 1,\ a < 2$

ii) $f(1) > 0,\quad 1 - a + 9 > 0,\quad a < 10$

iii) 두 개의 실근을 가져야 하므로

$D = a^2 - 4 \cdot 9 \ge 0,\ a \ge 6,\ a \le -6$

따라서 i), ii), iii)에 의해 $a \le -6$

$\therefore k = -6$

32. 이차방정식 $x^2-(a+1)x-3=0$의 한 근이 3보다 크고, 다른 한 근은 3보다 작을 때, 실수 a의 값의 범위는?

① $a>-3$ ② $a>-1$ ③ $a>1$

④ $a<1$ ⑤ $a<3$

해설

$f(x)=x^2-(a+1)x-3$이라 하면
방정식 $f(x)=0$의 두근 사이에 3이 있으므로
$f(3)=9-3(a+1)-3<0$
$-3a+3<0$
$\therefore\ a>1$

33. 연립부등식 $\begin{cases} x-5 \le 3x+3 \\ \dfrac{-x+a}{3} \ge x \end{cases}$ 의 해가 $x=m$ 일때, $\dfrac{a}{m}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$$\begin{cases} x-5 \le 3x+3 \\ \dfrac{-x+a}{3} \ge x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x \le 8 \\ -x+a \ge 3x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \ge -4 \\ x \le \dfrac{a}{4} \end{cases}$$

해가 $x=m$ 이므로 $m=-4$ 이다.

$\dfrac{a}{4}=-4,\ a=-16$

$\therefore\ \dfrac{a}{m}=\dfrac{-16}{-4}=4$

34. 십의 자리 숫자가 일의 자리 숫자의 두 배인 어떤 두 자리 자연수가 21 보다 크고 60 보다 작다고 한다. 처음 두 자리 자연수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 42

해설

일의 자리 숫자를 x 라 하면 십의 자리 숫자는 $2x$ 이다.
즉, 이 두 자리 자연수는 $(10 \times 2x) + x = 21x$ 이다.
$21 < 21x < 60$
$1 < x < \frac{20}{7}$, $\frac{20}{7} = 2.857142\cdots$
$\therefore x = 2$
처음 두 자리 자연수는 42 이다.

35. 부등식 $a(x^2-2x+1)>2(x^2-2x-2)$를 만족하는 실수 x가 존재할 때, 상수 a의 범위는?

① $a>2$　② $a\geq 2$　③ $a<2$

④ a는 모든 실수　⑤ $a<\pm 2$

해설

$a=2$일 때, $6>0$이므로 x는 모든 실수

$a\neq 2$일 때,

$(a-2)x^2-2(a-2)x+a+4=0\cdots$㉠에서

$\frac{D}{4}=(a-2)^2-(a-2)(a+4)=-6(a-2)$이므로

i) $a>2$이면, x는 모든 실수

ii) $a<2$이면, $\frac{D}{4}>0$이므로 ㉠의 근을

$\alpha,\beta(\alpha<\beta)$라 하면

부등식의 해는 $\alpha<x<\beta$이므로 x값이 존재한다.

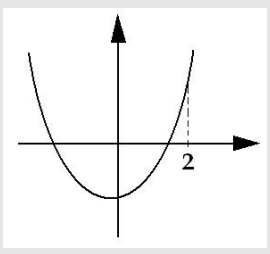
$\therefore$ a는 모든 실수

36. $x > 2$인 모든 실수 x에 대하여 $x^2 - 2kx + k - 1 > 0$을 성립하게 하는 실수 k의 최댓값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$D/4 = k^2 - k + 1 > 0$이므로 서로 다른 두 실근을 가진다.



문제의 조건을 만족하기 위해서는 대칭축이 2보다 왼쪽에 있어야 하고 $f(2) \geq 0$의 두 조건을 모두 만족해야 한다.

대칭축 조건에서 $k < 2$ ……㉠

$f(2) = 3 - 3k \geq 0$에서 $k \leq 1$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $k \leq 1$

k의 최댓값은 1이다.

37. $\alpha < 0 < \beta$ 이고 이차부등식 $ax^2 + bx + c < 0$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$ 일 때, 이차부등식 $cx^2 + bx + a < 0$ 의 해는?

① $\frac{1}{\alpha} < x < \frac{1}{\beta}$ ② $\frac{1}{\beta} < x < \frac{1}{\alpha}$

③ $x < \frac{1}{\alpha}$ 또는 $x > \frac{1}{\beta}$ ④ $x < \frac{1}{\beta}$ 또는 $x > \frac{1}{\alpha}$

⑤ b 의 부호에 따라 다르다.

해설

$ax^2 + bx + c < 0$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$ $(\alpha < 0 < \beta)$ 이므로

$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta),\ a > 0$

$\therefore\ \alpha + \beta = -\frac{b}{a},\ \alpha\beta = \frac{c}{a} < 0 \quad \therefore\ c < 0$

따라서,

$$\begin{aligned} cx^2 + bx + a &= c\left(x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c}\right) \\ &= c\left(x^2 - \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}x + \frac{1}{\alpha\beta}\right) \\ &= c\left\{x^2 - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)x + \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\right\} \\ &= c\left(x - \frac{1}{\alpha}\right)\left(x - \frac{1}{\beta}\right) < 0 \end{aligned}$$

$c < 0$ 이고 $\frac{1}{\alpha} < 0 < \frac{1}{\beta}$ 이므로 구하는 해는 $x < \frac{1}{\alpha}$ 또는 $x > \frac{1}{\beta}$

38. 이차방정식 $2x^2 + 2kx + k + 2 = 0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 이차부등식 $x^2 - kx + k + 3 \geq 0$가 절대부등식이 되기 위한 실수 k값의 범위를 구하면?

① $1 - \sqrt{5} < k < 1 + \sqrt{5}$

② $1 - \sqrt{5} \leq k \leq 1 + \sqrt{5}$

③ $-2 < k < 1 - \sqrt{5}$ 또는 $1 + \sqrt{5} < k < 6$

④ $-2 \leq k < 1 - \sqrt{5}$ 또는 $1 + \sqrt{5} < k \leq 6$

⑤ $-2 < k \leq 1 - \sqrt{5}$ 또는 $1 + \sqrt{5} \leq k < 6$

해설

ⅰ) 서로 다른 두 실근을 가지려면,
$D' = k^2 - (2k + 4) > 0$이므로
$k^2 - 2k - 4 > 0$
$k < 1 - \sqrt{5}$ 또는 $k > 1 + \sqrt{5}$ ··· ①
ⅱ) $x^2 - kx + k + 3 \geq 0$이 절대부등식이 되려면
$D = k^2 - 4(k + 3) \leq 0$이므로$(k + 2)(k - 6) \leq 0$
$-2 \leq k \leq 6$ ··· ②
①, ②의 공통범위는
$-2 \leq k < 1 - \sqrt{5}$ 또는 $1 + \sqrt{5} < k \leq 6$

39. 두 부등식 $x^2+ax+b \geq 0,\ x^2+cx+d \leq 0$을 동시에 만족하는 x의 범위가 $-3 \leq x \leq -1$ 또는 $x=2$라고 한다.
이 때 $a+b+c+d$의 값을 구하면?

① -6 ② -5 ③ -8 ④ -10 ⑤ -3

해설

$x^2+ax+b \geq 0$의 해를 $x \leq \alpha,\ x \geq \beta$
$x^2+cx+d \leq 0$의 해를 $\gamma \leq x \leq \delta$라고 하면

공통의 해가 $-3 \leq x \leq -1$ 또는 $x=2$이려면
다음 그림에서와 같이 $\alpha=-1,\ \beta=2,\ \gamma=-3,\ \delta=2$이어야 한다.
$\therefore x^2+ax+b=(x+1)(x-2)=x^2-x-2$이므로 $a=-1,\ b=-2$
$x^2+cx+d=(x+3)(x-2)=x^2+x-6$이므로 $c=1,\ d=-6$
따라서 $a+b+c+d=-1+(-2)+1+(-6)=-8$

40. 이차방정식 $x^2-(p+1)x+2p-1=0$의 두 근이 모두 -2와 2사이에 있도록 실수 p의 값의 범위를 구하면?

① $p>5, p<1$ ② $-\frac{5}{4}<p<1$ ③ $-5<p<3$

④ $p>1, p<-1$ ⑤ $p>5, p<-1$

해설

$f(x)=x^2-(p+1)x+2p-1$로 놓으면

(i) 이차방정식이 두 근을 가지므로 D >0에서

$(p+1)^2-4(2p-1)>0,\ p^2+2p+1-8p+4>0$

$p^2-6p+5>0,\ (p-5)(p-1)>0$

$\therefore\ p>5,\ p<1$

(ii) $f(-2)>0$에서

$4+2(p+1)+2p-1>0$

$4p+5>0,\ 4p>-5 \quad \therefore\ p>-\frac{5}{4}$

(iii) $f(2)>0$에서

$4-2p-2+2p-1>0$ $\therefore$ 성립

(iv) 대칭축이 -2 와 2 사이에 있어야 하므로

$-2<\frac{p+1}{2}<2 \quad -4<p+1<4$

$\therefore\ -5<p<3$

따라서 (i), (ii), (iii), (iv)에서

$\therefore\ -\frac{5}{4}<p<1$