1. $(x-2)+3yi=0$를 만족하는 실수 x, y의 합을 구하여라.(단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x-2=0,\ 3y=0$

$x=2,\ y=0 \rightarrow x+y=2$

2. $\dfrac{2+3i}{3-i}$ 를 계산하면?

① $\dfrac{3+11i}{8}$ ② $\dfrac{9+11i}{8}$ ③ $\dfrac{3+9i}{10}$
④ $\dfrac{3+11i}{10}$ ⑤ $\dfrac{9+11i}{10}$

해설

$$\frac{2+3i}{3-i} = \frac{(2+3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}$$
$$= \frac{6-3+11i}{10}$$
$$= \frac{3+11i}{10}$$

3. 이차방정식 $x^2 - 2x + k + 2 = 0$이 중근을 가지도록 하는 상수 k의 값을 구하면?

① -1 ② 1 ③ 0 ④ -2 ⑤ 2

해설

$x^2 - 2x + (k + 2) = 0$

$\frac{D}{4} = (-1)^3 - (k + 2) = 0$

$1 - k - 2 = 0 \quad \therefore \ k = -1$

4. 다음 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖은 것의 개수는?

㉠ $3x^2 - x - 1 = 0$	㉡ $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$
㉢ $2x^2 - \sqrt{3}x + 2 = 0$	㉣ $x^2 - x + 2 = 0$

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

㉠ $D = (-1)^2 - 4 \cdot 3(-1) = 13 > 0$ 이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

㉡ $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = 0$ 이므로 중근을 갖는다.

㉢ $D = (\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = -13 < 0$ 이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

㉣ $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -7 < 0$ 이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

5. 이차방정식 $x^2+8x+2k=0$이 허근을 가지도록 하는 정수 k의 값의 최솟값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

이차방정식에서 허근을 가질 조건은

$\frac{D'}{4}<0$이어야 하므로,

$16-2k<0,\ 2k>16,\ \therefore\ k>8$

$\therefore$ 정수 k의 최소값은 9

6. 이차함수 $y = -x^2 + 4x$ 의 최댓값 또는 최솟값과 그 때의 x 의 값은?

① $x = 2$ 일 때, 최댓값은 4
② $x = -2$ 일 때, 최댓값은 4
③ $x = 4$ 일 때, 최댓값은 4
④ $x = 2$ 일 때, 최솟값은 4
⑤ $x = 4$ 일 때, 최솟값은 0

해설

$y = -x^2 + 4x$
$= -(x-2)^2 + 4$
따라서 $x = 2$ 일 때, 최댓값 4를 갖는다.

7. 이차함수 $y = -2 + 3x - x^2$ $(-1 \le x \le 2)$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① $-\frac{23}{4}$　② $-\frac{16}{3}$　③ $-\frac{3}{4}$　④ $\frac{7}{4}$　⑤ $\frac{11}{3}$

해설

$y = -(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{1}{4}$ 이므로

$x = \frac{3}{2}$ 가 x 의 값의 범위 $-1 \le x \le 2$ 에 포함되므로

$x = \frac{3}{2}$ 에서 최솟값 $\frac{1}{4}$ 를 갖고,

$x = -1$ 에서 최댓값 -6 을 갖는다.

따라서 최솟값과 최댓값의 합은 $-\frac{23}{4}$ 이다.

8. 다음 방정식을 만족하는 x, y의 값을 차례대로 구하여라.

$$2x-y=4x+10=x+y-5$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=-5$

▷ 정답 : $y=0$

해설

주어진 방정식은 다음의 연립방정식과 같다.

$$\begin{cases} 2x-y=4x+10 \\ 2x-y=x+y-5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x+y+10=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-2y+5=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡에서 $x=2y-5$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $2(2y-5)+y+10=0$

$\therefore\ y=0$

$y=0$을 ㉢에 대입하면 $x=-5$

$\therefore\ x=-5,\ y=0$

9. $z=\dfrac{2}{1-i}$ 일 때, $2z^2-4z-1$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 2 ③ -3 ④ 4 ⑤ -5

해설

$z=\dfrac{2}{1-i}=1+i$

$\therefore\ 2z^2-4z-1 = 2(1+i)^2-4(1+i)-1$
$= 4i-4-4i-1$
$= -5$

해설

$z=1+i, z-1=i$
양변을 제곱하고 정리하면
$z^2-2z=-2$
$2z^2-4z-1$
$=2(z^2-2)z-1$
$=-4-1=-5$

10. 이차방정식 $x^2+2(k-a)x+k^2+a^2+b-2=0$이 실수 k의 값에 관계없이 중근을 가질 때, $a+b$의 값을 구하라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$\frac{D}{4}=(k-a)^2-(k^2+a^2+b-2)=0$

$\therefore\ -2ka-b+2=0$

이 식은 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

k에 대한 항등식이다.

$a=0,\ b=2$

$\therefore\ a+b=2$

11. 이차식 $x^2-2(k-1)x+2k^2-6k+4$가 x에 대하여 완전제곱식이 될 때, 상수 k의 값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

이차식이 완전제곱식이 되면
이차방정식 $x^2-2(k-1)x+2k^2-6k+4=0$
이 중근을 갖는다.
따라서, $\frac{D}{4}=(k-1)^2-(2k^2-6k+4)=0$
위의 식을 정리하면
$-k^2+4k-3=0$
$k^2-4k+3=0$
$(k-1)(k-3)=0$에서
$k=1$ 또는 $k=3$

12. 이차방정식 $2x^2-6x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$를 두 근으로 하는 이차방정식은?

① $2x^2-6x+1=0$ ② $x^2-6x+1=0$
③ $x^2-7x+3=0$ ④ $2x^2+6x-1=0$
⑤ $2x^2-7x+3=0$

해설

근과 계수의 관계에서

$\alpha+\beta=\frac{6}{2}=3$, $\alpha\beta=\frac{1}{2}$ 이므로

3 과 $\frac{1}{2}$을 이용한 근과 계수의 관계를 구해보면

$3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$, $3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$\therefore\ x^2-\frac{7}{2}x+\frac{3}{2}=0$

$\therefore\ 2x^2-7x+3=0$

13. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $1 - i$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하면? (단, a, b 는 실수)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 0

해설

다른 한 근은 복소수의 켤레근인 $1 + i$ 이므로
두 근의 합 : $(1 + i) + (1 - i) = -a \quad \therefore\ a = -2$
두 근의 곱 : $(1 + i)(1 - i) = b \quad \therefore\ b = 2$
$\therefore\ a + b = -2 + 2 = 0$

14. 함수 $y=-x^2+kx$의 그래프가 직선 $y=-x+4$에 접할 때, 양수 k의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

$y=-x^2+kx$가 $y=-x+4$에 접하려면
$4-x=-x^2+kx \Rightarrow x^2-(k+1)x+4=0$의 판별식은 $D=0$이어야 한다.
$D=(k+1)^2-16=0 \Rightarrow k+1=\pm 4$
$\therefore k=3\ (\because k>0)$

15. 이차함수 $y = -\frac{1}{3}x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -4 만큼 y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동시켰을 때, 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$y = -\frac{1}{3}(x+4)^2 + 1$

따라서 $x = -4$ 일 때, 최댓값은 1 이다.

16. $x=0$ 일 때, 최댓값 -1 을 갖고 한 점 $(2,\ -3)$ 을 지나는 포물선의 식은?

① $y=-2(x+1)^2-4$
② $y=(x-2)^2-3$
③ $y=-2(x-1)^2+3$
④ $y=-(x+1)^2+3$
⑤ $y=-\frac{1}{2}x^2-1$

해설

꼭짓점이 $(0,\ -1)$ 이므로 $y=ax^2-1$
$(2,\ -3)$ 을 대입하면 $-3=4a-1$
$a=-\frac{1}{2}$
$\therefore\ y=-\frac{1}{2}x^2-1$

17. 사차방정식 $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 2x - 3 = 0$ 을 풀면?

① $x = \pm 1,\ \ x = 1 \pm \sqrt{2}i$　　② $x = \pm 2,\ \ x = 1 \pm \sqrt{3}i$

③ $x = \pm 1,\ \ x = 1 \pm \sqrt{3}i$　　④ $x = \pm 2,\ \ x = 1 \pm \sqrt{2}i$

⑤ $x = \pm 2,\ \ x = 3 \pm \sqrt{2}i$

해설

조립제법을 이용한다.

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
1 & 1 & -2 & 2 & 2 & -3 \\
 & & 1 & -1 & 1 & 3 \\
\hline
-1 & 1 & -1 & 1 & 3 & \boxed{0} \\
 & & -1 & 2 & -3 & \\
\hline
 & 1 & -2 & 3 & \boxed{0} &
\end{array}
$$

$\Rightarrow\ (x-1)(x+1)(x^2-2x+3) = 0$

$\therefore x = \pm 1,\ \ x = 1 \pm \sqrt{2}i$

18. 사차방정식 $x^4 - 11x^2 + 30 = 0$의 네 근 중 가장 작은 근을 a, 가장 큰 근을 b라 할 때, $a^2 + b^2$의 값은?

① 8　　② 9　　③ 10　　④ 11　　⑤ 12

해설

$x^4 - 11x^2 + 30 = 0$

$(x^2 - 5)(x^2 - 6) = 0$

$\therefore\ x = \pm\sqrt{5},\ x = \pm\sqrt{6}$

가장 작은 근 $a = -\sqrt{6}$, 가장 큰 근 $b = \sqrt{6}$

$\therefore\ a^2 + b^2 = 6 + 6 = 12$

19. 방정식 $x^3 - x^2 + ax - 1 = 0$의 한 근이 -1일 때, 상수 a의 값과 나머지 두 근을 구하면?

① $a = 3, 1 \pm \sqrt{2}$ ② $a = -3, 1 \pm \sqrt{2}$
③ $a = 3, 1 \pm \sqrt{3}$ ④ $a = -3, 1 \pm \sqrt{3}$
⑤ $a = -1, 1 \pm \sqrt{2}$

해설

$x = -1$이 근이므로 $-1 - 1 - a - 1 = 0$에서 $a = -3$
인수정리와 조립제법을 이용하면
(좌변) $= (x+1)(x^2 - 2x - 1) = 0$
$x^2 - 2x - 1 = 0$의 근은 $1 \pm \sqrt{2}$
$\therefore a = -3$, 나머지 근은 $1 \pm \sqrt{2}$

20. 삼차방정식 $2x^3-7x^2+11x+13=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, 다음 (가), (나), (다)에 알맞은 값을 차례로 쓴 것은?

(가) $\alpha+\beta+\gamma$ (나) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ (다) $\alpha\beta\gamma$

① $\frac{7}{2}$, $\frac{11}{2}$, $-\frac{13}{2}$　② $-\frac{7}{2}$, $\frac{13}{2}$, $\frac{11}{2}$　③ $\frac{13}{2}$, $\frac{7}{2}$, $-\frac{11}{2}$
④ $\frac{11}{2}$, $-\frac{13}{2}$, $\frac{7}{2}$　⑤ $\frac{7}{2}$, $-\frac{11}{2}$, $\frac{13}{2}$

해설

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq 0)$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$

$\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

21. 연립방정식 $\begin{cases} x^2-y^2=2 \\ x-y=1 \end{cases}$ 의 해를 순서쌍 (x, y)으로 나타내면?

① $(2, 1)$　② $(\sqrt{2}+1, \sqrt{2})$　③ $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$
④ $(\sqrt{3}, 1)$　⑤ $\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$

해설

$\begin{cases} x^2-y^2=2 \cdots ㉠ \\ x-y=1 \cdots ㉡ \end{cases}$

㉡을 $y=x-1$로 변형하여
㉠에 대입하면
$x^2-(x-1)^2=x^2-x^2+2x-1=2$
$2x=3$
$\therefore\ x=\frac{3}{2},\ y=\frac{1}{2}$

22. 연립방정식 $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 \\ x^2+2y^2=12 \end{cases}$ 을 만족하는 $x,\ y$에 대하여 $x+y$ 값이 될 수 없는 것은?

① $3\sqrt{2}$ ② 4 ③ $-3\sqrt{2}$

④ -4 ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$x^2-3xy+2y^2=0$ 에서

$(x-y)(x-2y)=0 \quad \therefore x=y$ 또는 $x=2y$

ⅰ) $x=y$ 일 때

$x^2+2y^2=3x^2=12$

$x=\pm 2,\ y=\pm 2$

ⅱ) $x=2y$ 일 때

$x^2+2y^2=6y^2=12$

$y=\pm\sqrt{2},\quad x=\pm 2\sqrt{2}$

$\therefore x+y=4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}$

23. 이차함수 $y = x^2 + ax + 2a$ 의 그래프는 x 축과 두 점 A, B 에서 만나고 $\overline{\mathrm{AB}} = 2$ 일 때, 모든 실수 a 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$\mathrm{A}(\alpha,\ 0),\ \mathrm{B}(\beta,\ 0)(\alpha < \beta)$ 이라 하면
α, β 는 이차방정식 $x^2 + ax + 2a = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha + \beta = -a,\ \alpha\beta = 2a \quad \cdots$ ㉠
이 때, $\overline{\mathrm{AB}} = 2$ 이므로
$\beta - \alpha = 2$ 양변을 제곱하면
$(\beta - \alpha)^2 = 4$
$(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 4 \quad \cdots$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면 $a^2 - 8a - 4 = 0$
따라서 모든 실수 a 의 값의 합은 8 이다

24. 이차함수 $y = 2x^2 - 2ax - 2a - 4$ 의 최솟값을 m 이라고 할 때, m 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$y = 2x^2 - 2ax - 2a - 4$$
$$= 2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{2} - 2a - 4$$

y 의 최솟값 : $m = -\frac{a^2}{2} - 2a - 4$

$$= -\frac{1}{2}(a+2)^2 - 2$$

m 의 최댓값 : -2

25. 합이 18 인 두 수가 있다. 이 두 수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 17 ② 65 ③ 77 ④ 81 ⑤ 162

해설

두 수를 각각 x, $18-x$ 라고 하면

$$
\begin{aligned}
y &= x(18-x) \\
&= -x^2 + 18x \\
&= -(x^2 - 18x + 81 - 81) \\
&= -(x-9)^2 + 81
\end{aligned}
$$

$x = 9$ 일 때, 최댓값 81 을 갖는다.

26. x, y, z가 실수일 때, 다음 식의 최댓값을 구하여라.

$$4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$

$= -(x^2 - 4x) - y^2 - z^2 + 5$

$= -(x - 2)^2 - y^2 - z^2 + 9$

x, y, z는 실수이므로

$(x - 2)^2 \geq 0, y^2 \geq 0, z^2 \geq 0$

따라서 $4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$는

$x - 2 = 0, y = 0, z = 0$일 때,

최댓값 9를 갖는다.

27. 가로의 길이가 5cm , 세로의 길이가 9cm 인 직사각형의 가로의 길이를 $x$cm 만큼 늘이고, 세로의 길이를 $x$cm 만큼 줄여서 새로운 직사각형을 만들었다. 새로운 직사각형의 넓이가 최대가 되도록 하는 x 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 2.5 ④ 3 ⑤ 3.5

해설

새로운 사각형의 넓이를 S 라 하면

$S = (5+x)(9-x)$

$= -x^2 + 4x + 45$

$= -(x-2)^2 + 49$

따라서 $x = 2$ 일 때 새로운 직사각형의 넓이의 최댓값 49cm^2 를 가진다.

28. 지면으로부터 60m 되는 높이에서 초속 60m 로 곧바로 위로 쏘아 올린 물체의 x 초 후의 높이를 ym 라고 하면 대략 $y = -5x^2 + 60x + 60$ 인 관계가 성립한다. 그 물체의 높이가 최대가 되는 것은 쏘아 올린 지 몇 초 후인가? 또한, 그 때의 높이를 구하여라.

▶ 답: ______ 초

▶ 답: ______ m

▷ 정답: 6 초

▷ 정답: 240 m

해설

$y = -5x^2 + 60x + 60 = -5(x-6)^2 + 240$
따라서 $x = 6$ 일 때, 최댓값 240을 갖는다.

29. 방정식 $x^3+x^2+px+q=0$ 에 대하여 한 근이 $1-i$ 일 때, $p+q$ 값을 구하면?

① -3　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

한 근이 $1-i$이므로
켤레복소수인 $1+i$ 도 근이 된다. 나머지 한 근을 α 라 하면 근과 계수와의 관계에 의해
$-1=(1-i)+(1+i)+\alpha \therefore \alpha=-3$
$p=(1-i)(1+i)-3(1-i)-3(1+i)$
$\therefore p=-4$
$-q=(1-i)(1+i)\cdot(-3)=-6$
$\therefore q=6$
$\therefore\ p+q=-4+6=2$

30. $x^2 - x + 1 = 0$ 일 때, x^{51} 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$x^2 - x + 1 = 0$ 에서
$(x^2 - x + 1)(x + 1) = 0$
$\therefore x^3 + 1 = 0$
$x^3 = -1$
$x^{51} = (x^3)^{17} = (-1)^{17} = -1$

31. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2+2x=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2+x+y=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 을 풀면 $x=\alpha,\ y=\beta$ 또는 $x=\gamma,\ y=\delta$ 이다. 이 때, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

인수분해되는 식은 없으나 이차항을 소거할 수 있다.
㉠ − ㉡에서 $x-y=-2$, 즉 $y=x+2$
㉠에 대입하여 정리하면
$x^2+3x+2=0$
$(x+1)(x+2)=0$
$\therefore\ x=-1,\ -2$
$\therefore\ x=-1,\ y=1$ 또는 $x=-2,\ y=0$
$\therefore\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=6$

32. $x^2+y^2-2y+1=0$을 만족하는 실수 $x,\ y$의 합 $x+y$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2+y^2-2y+1=0$에서 $x^2+(y-1)^2=0$
$x,\ y$는 실수이므로 $x^2\ge 0,\ (y-1)^2\ge 0$
따라서, $x=0,\ y-1=0$이므로 $x=0,\ y=1$
$\therefore\ x+y=0+1=1$

33. x, y 가 실수이고, 복소수 $z = x + yi$ 와 켤레복소수 $\bar{z} = x - yi$ 와의 곱이 $z \cdot \bar{z} = 1$ 일 때, $\frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right) i$ 의 값은?

① $\frac{y}{2}$ ② $-y$ ③ $2x$ ④ $\frac{-x}{2}$ ⑤ 100

해설

$z \cdot \bar{z} = 1$ 에서 $\bar{z} = \frac{1}{z}$ 이다.

그러므로 $\frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right) i = \frac{1}{2}(z - \bar{z})i$

$$= \frac{1}{2}(x + yi - x + yi)i$$

$$= \frac{1}{2}(2yi)i = -y$$

34. $\frac{\overline{z}+1}{z}+\frac{z-1}{\overline{z}}=i$를 만족하는 복소수 z에 대하여 z^2 의 값을 구하면?

① ± 1　② $\pm 2i$　③ ± 2　④ $\pm i$　⑤ 0

해설

$$\begin{cases} z = a + bi \\ z = a - bi \end{cases}$$

$$\frac{\overline{z}+1}{z}+\frac{z-1}{\overline{z}}=i$$

$$\frac{\overline{z}^2+\overline{z}+z^2-z}{z\overline{z}}=i$$

$$\frac{a^2-2abi-b^2+a-bi+a^2+2abi-b^2-a-bi}{a^2+b^2}$$

$$=i$$

$$\frac{2(a^2-b^2)}{a^2+b^2}+\frac{-2b}{a^2+b^2}i=i$$

$$a^2=b^2,\ \frac{-2b}{a^2+b^2}=+1$$

$$\therefore\ a=\pm 1, b=-1$$

$$z=\pm 1-i\ ,\ z^2=\pm 2i$$

35. 복소수 $z=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$ 에 대하여 $(3z^2+z)^2+(z^2+3z)^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$z=\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}=\frac{(1+\sqrt{3}i)^2}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$z^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

$(3z^2+z)^2+(z^2+3z)^2$

$=\left(\dfrac{-3-3\sqrt{3}i-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2$

$+\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}i-3+3\sqrt{3}i}{2}\right)^2$

$=(-2-\sqrt{3}i)^2+(-2+\sqrt{3}i)^2$

$=4+4\sqrt{3}i-3+4-4\sqrt{3}i-3=2$

해설

$z=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$

$=\dfrac{(1+\sqrt{3}i)^2}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}$

$=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

에서 양변에 2를 곱하고 -1 을 우변으로 이항하면 $2z+1=\sqrt{3}i$
양변을 제곱하면

$4z^2+4z+1=-3$

$\to 4z^2+4z+4=0$

$\to z^2+z+1=0$

$\to (z-1)(z^2+z+1)=0$

$\to z^3-1=0$

$\to z^3=1$

※방정식에 익숙한 학생들은

$z=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 에서 바로 $z^2+z+1=0$ 와 $z^3=1$ 을 도출할 수 있을 것이다.

$(3z^2+z)^2+(z^2+3z)^2$

$=10z^4+12z^3+10z^2$

$=(10z^4+10z^3+10z^2)+2z^3$

$=10z^2(z^2+z+1)+2z^3$

$=0+2$

$=2$

36. $x^2+xy+ay^2+x+y-2$가 x, y의 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 상수 a의 값을 구하면 ?

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{4}{9}$ ④ $\frac{5}{9}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

해설

$x^2+xy+ay^2+x+y-2$
$=x^2+(y+1)x+ay^2+y-2$가
x, y의 두 일차식의 곱으로 나타내어지려면
$D=(y+1)^2-4(ay^2+y-2)$
$\quad=y^2+2y+1-4ay^2-4y+8$
$\quad=(1-4a)y^2-2y+9$에서
$\frac{D}{4}=1-9(1-4a)=0$
$\therefore\ 1-9+36a=0$
$\therefore\ a=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$

37. x에 관한 방정식 $\dfrac{x^2-bx}{ax-c}=\dfrac{m-1}{m+1}$에서 두 근의 절대값은 같고 부호만 다를 때, m의 값은? (단, $a \neq \pm b$)

① ab ② $\dfrac{a+b}{a-b}$ ③ $\dfrac{a-b}{a+b}$ ④ $a+b$ ⑤ $a-b$

해설

$(m+1)(x^2-bx)=(m-1)(ax-c)$

$mx^2-bmx+x^2-bx=amx-cm-ax+c$

$(m+1)x^2+(a-b-am-bm)x+cm-c=0$의 두 근을 α,β라고 하면,

$\alpha+\beta=0$

$\therefore \dfrac{a-b-am-bm}{m+1}=0,\quad am+bm=a-b$

$m(a+b)=a-b,\ a\neq -b$이므로 $a+b\neq 0$

$\therefore m=\dfrac{a-b}{a+b}$

38. $x = 1$ 일 때 최솟값 -1 을 갖고, y 절편이 3 인 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식을 $y = a(x-p)^2 + q$ 라 할 때, 상수 a, p, q 의 곱 apq 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$y = a(x-1)^2 - 1 = ax^2 - 2ax + a - 1$
$a - 1 = 3$, $a = 4$
$y = 4(x-1)^2 - 1$
$\therefore apq = 4 \times 1 \times (-1) = -4$

39. x 가 실수일 때, $x^2 + 4y^2 - 8x + 16y - 4 = 0$ 을 만족하는 y 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -5

해설

준식을 x 에 관하여 정리하면
$x^2 - 8x + 4y^2 + 16y - 4 = 0$
이것은 x 에 대한 이차 방정식으로 볼 때
x 가 실수이므로 실근을 갖는다.
$\therefore\ D/4 = (-4)^2 - (4y^2 + 16y - 4) \geq 0$
$\rightarrow\ 4y^2 + 16y - 20 \leq 0$
$\rightarrow\ y^2 + 4y - 5 \leq 0$
$\rightarrow\ (y+5)(y-1) \leq 0$
$\therefore\ -5 \leq y \leq 1$
$\therefore\ y$ 의 최댓값은 1 , 최솟값은 -5

40. 다음 방정식의 실근의 합을 구하여라.

$$x^4+5x^3-12x^2+5x+1=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

$x=0$을 대입하면
$1=0$이 되어 모순이므로 $x\neq 0$이다.
따라서, 주어진 식의 양변을
x^2으로 나누면

$x^2+5x-12+\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$

$\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-12=0$

$\therefore \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-14=0$

여기서 $x+\dfrac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2+5X-14=0$, $(X+7)(X-2)=0$

$\therefore X=-7$ 또는 $X=2$

(ⅰ) $X=-7$일 때,

$x+\dfrac{1}{x}=-7$에서

$x^2+7x+1=0$

$\therefore \dfrac{-7\pm3\sqrt{5}}{2}$

(ⅱ) $X=2$일 때,

$x+\dfrac{1}{x}=2$에서

$x^2-2x+1=0$, $(x-1)^2=0$

$\therefore x=1$

(ⅰ), (ⅱ)로부터

$x=1$(중근) 또는 $x=\dfrac{-7\pm3\sqrt{5}}{2}$

따라서, 모든 근의 합은

$1+\dfrac{-7+3\sqrt{5}}{2}+\dfrac{-7-3\sqrt{5}}{2}=-6$이다.