

1. $x^2 - 2x - y^2 + 2y$ 를 인수분해 하였더니 $(x + ay)(x - by + c)$ 가 된다고 할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$$\begin{aligned} & x^2 - 2x - y^2 + 2y \\ &= (x^2 - y^2) - 2(x - y) \\ &= (x + y - 2)(x - y) \\ &= (x + ay)(x - by + c) \end{aligned}$$

계수를 비교하면

$$a = -1, b = -1, c = -2$$
$$\therefore a + b + c = -1 - 1 - 2 = -4$$

2. 이차방정식 $x^2 + (a+2)x + 1 = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 모든 실수 a 의 값의 합을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

주어진 이차방정식이 중근을 가지려면

$D = (a+2)^2 - 4 = 0$ 이므로

$a^2 + 4a + 4 - 4 = a^2 + 4a = 0$

따라서 $a = 0$ 또는 $a = -4$

따라서 상수 a 의 값의 합은 -4

3. 사차방정식 $x^4 + 5x^3 - 20x - 16 = 0$ 의 네 근의 제곱의 합을 구하면?

- ① 25 ② 20 ③ 10 ④ 7 ⑤ 4

해설

$$\begin{aligned} & x^4 + 5x^3 - 20x - 16 \\ &= (x+1)(x^3 + 4x^2 - 4x - 16) \\ &= (x+1)(x+4)(x^2 - 4) \\ &= (x+1)(x+4)(x+2)(x-2) \\ &\text{따라서 네근은 } -1, -2, -4, 2 \\ &\therefore \text{네근의 제곱의 합은 } 1 + 4 + 16 + 4 = 25 \end{aligned}$$

4. 연립부등식 $\begin{cases} 8x - 5 \leq 10 \\ 2(1 + 3x) < 3x + 8 \end{cases}$ 을 만족하는 자연수의 개수는?

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$$8x - 5 \leq 10, \quad x \leq \frac{15}{8}$$

$$2(1 + 3x) < 3x + 8$$

$$2 + 6x < 3x + 8, \quad x < 2$$

따라서, 해는 $x \leq \frac{15}{8}$ 이며, 이를 만족하는 자연수는 1 밖에 없다.

5. 세 직선 $x + 2y = 5$, $2x - 3y = 4$, $ax + y = 0$ 이 삼각형을 이루지 못할 때, 상수 a 의 값들의 곱은?

- ① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{3}{23}$ ③ $-\frac{1}{23}$ ④ $\frac{2}{23}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

해설

주어진 세 직선이 일치하는 경우는 없으므로 삼각형을 이루지 못하는 것은 두 직선이 서로 평행해서 교점이 두 개만 생기거나 세 직선이 모두 한 점에서 만나는 경우이다.

(i) 두 직선이 평행한 경우 세 직선의 기울기는

각각 $-\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $-a$ 이므로

$a = \frac{1}{2}$ 또는 $a = -\frac{2}{3}$ 이면 두 직선이 평행하다.

(ii) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우

$x + 2y = 5$ 와 $2x - 3y = 4$ 의 교점은 $\left(\frac{23}{7}, \frac{6}{7}\right)$

이 점이 $ax + y = 0$ 위에 있으려면 $a = -\frac{6}{23}$

(i), (ii)에서 $a = \frac{1}{2}$, $-\frac{2}{3}$, $-\frac{6}{23}$

따라서 세 수의 곱은 $\frac{2}{23}$

6. 점 $(-1, 2)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동시킨 후, 다시 y 축에 대하여 대칭이동시켰다. 이것을 x 축으로 a , y 축으로 b 만큼 평행이동시킨 후 다시 원점에 대하여 대칭이동시켰더니 점 $(1, 2)$ 가 되었다. $a + b$ 의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

점 $(-1, 2)$ 를 x 축에 대하여
대칭이동하면 $(-1, -2)$
이것을 y 축에 대하여 대칭이동하면 $(1, -2)$
이것을 다시 x 축으로 a ,
 y 축으로 b 만큼 평행이동하면
 $(1 + a, -2 + b)$
원점에 대하여 대칭이동하면 $(-1 - a, 2 - b)$
이것이 점 $(1, 2)$ 가 되려면 $a = -2, b = 0$
 $\therefore a + b = -2$

7. x 에 대한 다항식 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지는 6이고, $(x-2)^2$ 으로 나눈 나머지는 $6x+1$ 이다. 이때, $f(x)$ 를 $(x-1)(x-2)$ 로 나눈 나머지는?

① $6x+7$

② $-6x+5$

③ $7x+7$

④ $7x-1$

⑤ $8x+13$

해설

$$f(1) = 6, f(x) = (x-2)^2 q(x) + 6x + 1$$

$$f(x) = (x-1)(x-2)Q(x) + ax + b \text{ 에서}$$

$$f(1) = a + b = 6, f(2) = 2a + b = 13$$

$$\therefore a = 7, b = -1$$

따라서 $f(x)$ 를 $(x-1)(x-2)$ 로 나눈 나머지는 $7x-1$ 이다.

8. 이차함수 $y = x^2 + bx + c$ 는 $x = -1$ 일 때, 최솟값 2 를 갖는다고 한다.
 $b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x = -1$ 일 때, 최솟값 2 를 가지므로 꼭짓점의 좌표는 $(-1, 2)$

$$\begin{aligned} y &= x^2 + bx + c \\ &= (x + 1)^2 + 2 \\ &= x^2 + 2x + 3 \end{aligned}$$

$$\therefore b = 2, c = 3$$

$$\therefore b + c = 2 + 3 = 5$$

9. 방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 w 라고 할 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $w^3 - 1 = 0$

② $w^2 - w + 1 = 0$

③ $w + \frac{1}{w} = -1$

④ $w^{2008} + w^{2009} = -1$

⑤ 다른 허근은 w^2 이다.

해설

① $w^3 = 1$ 이므로 $w^3 - 1 = 0$

② $w^3 - 1 = 0$ 이므로

$(w - 1)(w^2 + w + 1) = 0$

$w - 1 \neq 0$ 이므로 $w^2 + w + 1 = 0$

$\therefore w^2 - w + 1 = -2w \neq 0$

③ $w^2 + w + 1 = 0$ 이고

$w \neq 0$ 이므로

양변을 w 로 나누면 $w + 1 + \frac{1}{w} = 0$

$\therefore w + \frac{1}{w} = -1$

④ $w^{2008} = (\omega^3)^{669} \cdot \omega = \omega,$

$\omega^{2009} = (\omega^3)^{669} \cdot \omega^2 = \omega^2$

$\therefore w^{2008} + w^{2009} = w + w^2 = -1$

($\because w^2 + w + 1 = 0$)

⑤ $(w^2)^3 = w^6 = (w^3)^2 = 1^2 = 1$

따라서, w^2 은 $x^3 = 1$ 의 다른 한 허근이다.

10. 연립부등식 $\begin{cases} 2-x \leq 6x+a \\ 4x-5 \geq 5x-6 \end{cases}$ 의 해가 $x=m$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

$$4x-5 \geq 5x-6$$

$$-x \geq -1$$

$$x \leq 1$$

$$2-x \leq 6x+a$$

$$-7x \leq a-2$$

$$x \geq \frac{a-2}{-7}$$

$$x=m \text{ 이므로 } \frac{a-2}{-7} = 1$$

$$\therefore a = -5$$

11. 윤지네 반 학생들을 긴 의자에 앉히려고 한다. 한 의자에 4 명씩 앉으면 9 명의 학생이 앉지 못하고, 5 명씩 앉으면 의자가 4 개 남는다. 긴 의자의 개수가 될 수 없는 것은?

① 30 개 ② 31 개 ③ 32 개 ④ 33 개 ⑤ 34 개

해설

$$5(x-5)+1 \leq 4x+9 \leq 5(x-5)+5$$

$$5x-24 \leq 4x+9 \leq 5x-20$$

$$x \leq 33, \quad x \geq 29$$

$$\therefore 29 \leq x \leq 33$$

12. 부등식 $|x+1|+|x-2|+1 < x+4$ 을 만족시키는 정수 x 의 개수는?

- ① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$$|x+1|+|x-2|+1 < x+4$$

i) $x < -1$

$$-x-1-x+2+1 < x+4, \quad x > -\frac{2}{3}$$

공통범위 없음

ii) $-1 \leq x < 2$

$$x+1-x+2+1 < x+4, \quad x > 0$$

공통범위 : $0 < x < 2 \rightarrow$ 정수 : 1

iii) $x \geq 2$

$$x+1+x-2+1 < x+4, \quad x < 4$$

공통범위 : $2 \leq x < 4 \rightarrow$ 정수 = 2, 3

$\therefore$ 정수 x 의 개수 : 1, 2, 3으로 3개

13. 이차부등식 $ax^2 - bx + c < 0$ 의 해가 $x < -1$ 또는 $x > 3$ 일 때, 이차부등식 $ax^2 + cx + b > 0$ 의 해는?

- ① $-2 < x < 1$ ② $-1 < x < 0$ ③ $1 < x < 2$
④ $1 < x < 3$ ⑤ $2 < x < 5$

해설

$x < -1$ 또는 $x > 3$ 인 해를 갖는 이차항계수가
1인 이차부등식은 $(x+1)(x-3) > 0$ 이므로,
 $ax^2 - bx + x < 0$ 의 a 가 음수이고,
이 부등식은 $a(x+1)(x-3) < 0$ 과 같다.
따라서 $b = 2a$, $c = -3a$ 이고 주어진 부등식
 $ax^2 - 3ax + 2a = a(x^2 - 3x + 2)$
 $= a(x-2)(x-1) > 0$ 이 된다.
 $a < 0$ 이므로 만족하는 해는 $(x-1)(x-2) < 0$ 에서
 $1 < x < 2$

14. 좌표평면 위의 점 A(1, 4) 에 대하여 $\overline{AB}$ 를 3 : 2 로 외분하는 점 Q 의 좌표가 (4, 1) 일 때, $\overline{AB}$ 의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}$

해설

점 B 의 좌표를 B(a , b) 라 하면

점 Q 의 좌표는 $Q\left(\frac{3a-2}{3-2}, \frac{3b-8}{3-2}\right)$ 이다.

이때, 점 Q 의 좌표가 (4, 1) 이므로

$$3a-2=4 \quad \therefore a=2,$$

$$3b-8=1 \quad \therefore b=3$$

$$\therefore B(2, 3)$$

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{(2-1)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{2}$$

15. 두 직선 $3x + 4y = 24$ 와 $3x + 4y = 4$ 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

두 직선이 평행하므로 한 직선의 임의의 점과 나머지 직선 사이의 거리를 구하면 된다.

$3x + 4y = 24$ 의 점 $(0, 6)$

$$\frac{|0 \times 3 + 6 \times 4 - 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 4$$

16. 직선 $y = \sqrt{3}x + 5$ 에 평행하고, 원 $x^2 + y^2 = 16$ 에 접하는 직선의 방정식을 구하면?
- ① $y = \sqrt{3}x \pm 8$ ② $y = \sqrt{2}x \pm 8$ ③ $y = \sqrt{3}x \pm 7$
④ $y = -\sqrt{3}x \pm 8$ ⑤ $y = -\sqrt{2}x \pm 8$

해설

기울기 $\sqrt{3}$ 인 접선을 구하는 문제이다.
공식에서 $y = \sqrt{3}x \pm 4\sqrt{3+1}$,
 $\therefore y = \sqrt{3}x \pm 8$

해설

(다른 풀이1)
기울기 $\sqrt{3}$ 인 직선 $y = \sqrt{3}x + n$ 이라 두면
 $x^2 + y^2 = 16$ 에 접하므로 연립방정식의 해는 중근이다.
 $x^2 + (\sqrt{3}x + n)^2 = 16$, $4x^2 + 2n\sqrt{3}x + n^2 - 16 = 0$,
 $D/4 = (n\sqrt{3})^2 - 4(n^2 - 16) = 0$
 $\therefore n = \pm 8$
구하는 접선은 $y = \sqrt{3}x \pm 8$
(다른 풀이2)
기울기 $\sqrt{3}$ 인 접선 $y = \sqrt{3}x + n$ 에서
 $\sqrt{3}x - y + n = 0$
원의 중심에서 이 직선에
이르는 거리가 반지름과 같으므로
 $\frac{|n|}{\sqrt{3+1}} = 4$,
 $\therefore n = \pm 8$,
따라서 $y = \sqrt{3}x \pm 8$

17. $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+a$ 가 이차식의 완전제곱이 되도록 a 의 값을 정하면?

① 4

② 8

③ 12

④ 15

⑤ 16

해설

$$(\text{준식}) = (x^2 - 8x + 7)(x^2 - 8x + 15) + a$$

여기서, $x^2 - 8x + 7 = X$ 로 놓으면

$$(\text{준식}) = X(X + 8) + a$$

$$= X^2 + 8X + a = (X + 4)^2 + a - 16$$

따라서 $a = 16$

18. 두 실수 a, b 에 대하여 복소수 $z = a + bi$ 와 켤레복소수 $\bar{z} = a - bi$ 의 곱 $z\bar{z} = 5$ 일 때, $\frac{1}{2}\left(z + \frac{5}{z}\right)$ 를 간단히 하면?

① b ② $2b$ ③ 0 ④ $5a$ ⑤ a

해설

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= 5, \quad \bar{z} = \frac{5}{z} \\ \therefore \frac{1}{2}\left(z + \frac{5}{z}\right) &= \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2} \times 2a = a \end{aligned}$$

19. 이차방정식 $x^2 - 2ax + a + 2 = 0$ 의 두 근이 모두 1보다 클 때 실수 a 의 값의 범위는?

① $0 \leq a < 1$

② $1 \leq a < 2$

③ $2 \leq a < 3$

④ $3 \leq a < 4$

⑤ $4 \leq a < 5$

해설

$$f(x) = x^2 - 2ax + a + 2 = (x - a)^2 - a^2 + a + 2$$

i) $D/4 = a^2 - a - 2 \geq 0, \quad a \leq -1 \text{ or } a \geq 2$

ii) $f(1) = 1 - 2a + a + 2 > 0 \quad \therefore a < 3$

iii) 대칭축 $x = a > 1$

i), ii), iii)에서 $2 \leq a < 3$

20. 두 원 $x^2 + y^2 - 2 = 0$, $x^2 + y^2 + kx - 4y - 1 = 0$ 의 교점을 지나는 직선이 $x + 2y + 1 = 0$ 과 평행일 때, k 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -2$

해설

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 2 - (x^2 + y^2 + kx - 4y - 1) = 0$$

$$\therefore kx - 4y + 1 = 0$$

이 직선이 직선 $x + 2y + 1 = 0$ 과 평행하므로

$$\frac{k}{1} = \frac{-4}{2} \neq \frac{1}{1}$$

$$\therefore k = -2$$