1. 원 $x^2+y^2=20$ 위의 점 $(4,-2)$ 에서의 접선의 방정식이 $y=ax+b$ 일 때, 상수 $a,\ b$ 의 합 $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

원 $x^2+y^2=20$ 위의 점 $(4,-2)$ 에서의 접선의 방정식은
$4x-2y=20 \quad \therefore\ y=2x-10$
따라서, $a=2,\ b=-10 \quad \therefore\ a+b=2-10=-8$

2. 직선 $3x+4y+a=0$ 이 원 $x^2+y^2-2x+2y=2$ 에 접할 때, 양수 a 의 값을 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: $a=11$

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면
$(x-1)^2+(y+1)^2=2^2$
직선이 원에 접하므로 원의 중심
$(1,\ -1)$ 에서 직선까지의 거리가
원의 반지름의 길이2 와 같다.
따라서, $\dfrac{|3\cdot 1+4\cdot(-1)+a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$
$|a-1|=10$
$a-1=\pm 10$
$a>0$ 이므로 $a=11$

3. $x^2+y^2=5$에 접하고, 기울기가 -2이며, 제 $1,2,4$사분면을 지나는 접선의 방정식을 구하면?

① $y=-2x-\sqrt{5}$　② $y=-2x+5\sqrt{5}$

③ $y=-2x-3\sqrt{5}$　④ $y=-2x+3\sqrt{5}$

⑤ $y=-2x-5\sqrt{5}$

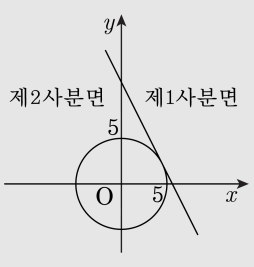
해설

기울기가 -2인 직선의 방정식을 $y=-2x+c$라 하고, 직선과 원점간의 거리가 원의 반지름인 5와 같으므로 $\dfrac{|-c|}{\sqrt{2^2+1^2}}=5$

$\therefore\ c=\pm 5\sqrt{5}$

다음 그림과 같이 제 $1,2,4$사분면을 지나야 하므로 $\therefore\ c=5\sqrt{5}$

$\therefore y=-2x+5\sqrt{5}$



4. 원$x^2+y^2=4$에 접하고 직선 $y=\frac{1}{2}x+1$에 수직인 직선의 y절편은?

① $\pm\sqrt{2}$　② $\pm\sqrt{3}$　③ $\pm\sqrt{5}$

④ $\pm2\sqrt{3}$　⑤ $\pm2\sqrt{5}$

해설

직선 $y=\frac{1}{2}x+1$ 에 수직인 직선의 기울기는 -2

원 $x^2+y^2=4$에 접하는 기울기가 -2인

직선의 방정식은 $y=-2x\pm2\sqrt{(-2)^2+1}$

$\therefore\ y=-2x\pm2\sqrt{5}$

따라서 구하는 직선의 y절편은 $\pm2\sqrt{5}$

5. 점 $(3,\ -1)$에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 접선의 방정식 중 기울기가 음수인 것의 y절편을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

점 $(3,\ -1)$을 지나고 접선의 기울기를 m이라고 하면
접선은 $y+1=m(x-3)\cdots①$
따라서 원의 중심$(0,0)$에서 직선
$mx-y-3m-1=0$ 과의 거리가
원의 반지름 $\sqrt{5}$와 같다.
$\frac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$, $|-3m-1|=\sqrt{5}\sqrt{m^2+1}$
양변을 제곱하면
$9m^2+6m+1=5m^2+5,\ 4m^2+6m-4=0$
따라서, 기울기 $m=\frac{1}{2},-2$
여기서 기울기가 음수인 -2를 ①에 대입하면
$y=-2x+5$
따라서 y절편은 5이다.