

1. 원 $x^2 + y^2 = 20$ 위의 점 $(4, -2)$ 에서의 접선의 방정식이 $y = ax + b$ 일 때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

원 $x^2 + y^2 = 20$ 위의 점 $(4, -2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$4x - 2y = 20 \quad \therefore y = 2x - 10$$

$$\text{따라서, } a = 2, b = -10 \quad \therefore a + b = 2 - 10 = -8$$

2. 직선 $3x + 4y + a = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$ 에 접할 때, 양수 a 의 값을 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: $a = 11$

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2^2$$

직선이 원에 접하므로 원의 중심

$(1, -1)$ 에서 직선까지의 거리가

원의 반지름의 길이 2 와 같다.

$$\text{따라서, } \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$

$$|a - 1| = 10$$

$$a - 1 = \pm 10$$

$$a > 0 \text{ 이므로 } a = 11$$

3. $x^2 + y^2 = 5$ 에 접하고, 기울기가 -2 이며, 제 1, 2, 4사분면을 지나는 접선의 방정식을 구하면?

① $y = -2x - \sqrt{5}$

② $y = -2x + 5\sqrt{5}$

③ $y = -2x - 3\sqrt{5}$

④ $y = -2x + 3\sqrt{5}$

⑤ $y = -2x - 5\sqrt{5}$

해설

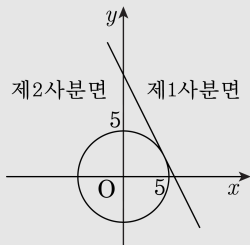
기울기가 -2 인 직선의 방정식을 $y = -2x + c$ 라 하고, 직선과 원점간의 거리가 원의 반지름인

5와 같으므로 $\frac{|-c|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 5$

$\therefore c = \pm 5\sqrt{5}$

다음 그림과 같이 제 1, 2, 4사분면을 지나야 하므로 $\therefore c = 5\sqrt{5}$

$\therefore y = -2x + 5\sqrt{5}$



4. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 접하고 직선 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 에 수직인 직선의 y 절편은?

① $\pm \sqrt{2}$

② $\pm \sqrt{3}$

③ $\pm \sqrt{5}$

④ $\pm 2\sqrt{3}$

⑤ $\pm 2\sqrt{5}$

해설

직선 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 에 수직인 직선의 기울기는 -2

원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 접하는 기울기가 -2 인

직선의 방정식은 $y = -2x \pm 2\sqrt{(-2)^2 + 1}$

$$\therefore y = -2x \pm 2\sqrt{5}$$

따라서 구하는 직선의 y 절편은 $\pm 2\sqrt{5}$

5. 점 $(3, -1)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 접선의 방정식 중 기울기가 음수인 것의 y 절편을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $(3, -1)$ 을 지나고 접선의 기울기를 m 이라고 하면

접선은 $y + 1 = m(x - 3) \cdots \textcircled{1}$

따라서 원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선

$mx - y - 3m - 1 = 0$ 과의 거리가

원의 반지름 $\sqrt{5}$ 와 같다.

$$\frac{|-3m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5}, |-3m - 1| = \sqrt{5} \sqrt{m^2 + 1}$$

양변을 제곱하면

$$9m^2 + 6m + 1 = 5m^2 + 5, 4m^2 + 6m - 4 = 0$$

따라서, 기울기 $m = \frac{1}{2}, -2$

여기서 기울기가 음수인 -2 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$y = -2x + 5$$

따라서 y 절편은 5이다.