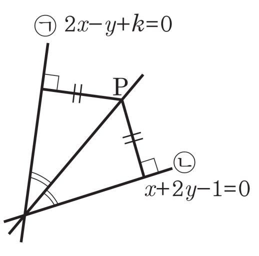
1. 좌표평면 위에 세 점 $\mathrm{A}(-2,\ 1)$, $\mathrm{B}(4,\ 7)$, $\mathrm{C}(6,\ 3)$을 꼭짓점으로 하는 $\triangle\mathrm{ABC}$가 있다. 직선 $y = mx + 2m + 1$에 의하여 $\triangle\mathrm{ABC}$의 넓이가 이등분될 때, m의 값은?

① $\frac{2}{7}$　　② $\frac{2}{5}$　　③ $\frac{4}{7}$　　④ $\frac{3}{4}$　　⑤ $\frac{6}{7}$

해설

직선 $y = m(x+2)+1$은 m의 값에 관계없이
항상 점 $(-2, 1)$을 지나므로 점 A를 지난다.
따라서 주어진 직선이 $\triangle\mathrm{ABC}$의 넓이를 이등분하려면
직선이 $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점 $\mathrm{M}(5, 5)$를 지나야 한다.
$\therefore\ 5 = m(5+2)+1$
$\therefore\ m = \frac{4}{7}$

2. 두 직선 $2x-y+k=0$, $x+2y-1=0$ 이 이루는 각의 이등분선이 점 $\mathrm{P}(3,\ 1)$을 지날 때, 상수 k의 값의 합을 구하면?



① -2　　② 4　　③ -6

④ 8　　⑤ -10

해설

$2x-y+k=0 \quad \cdots$ ㉠

$x+2y-1=0 \quad \cdots$ ㉡

(점 P와 ㉠사이의 거리)= (점 P와 ㉡사이의 거리) 이므로

$\dfrac{|6-1+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \dfrac{|3+2-1|}{\sqrt{1^2+2^2}} \Rightarrow |5+k| = 4$

$\Rightarrow 5+k=\pm 4 \Rightarrow k=-9$ 또는 $k=-1$

$\therefore k$ 의 합 : -10

3. 점 $(2,\ 1)$, $(4,\ -1)$ 을 지나고, y 축에 접하는 두 개의 원 중 큰 원의 반지름의 길이는?

① 10 ② 8 ③ 6 ④ 5 ⑤ 4

해설

중심의 좌표를 $(a,\ b)$ 라 하면
y 축에 접하므로 반지름의 길이 r 는
$r = |a|$ 이다.
$\therefore\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 \cdots\cdots$ ㉠
㉠이 점 $(2,\ 1)$ 을 지나므로
$(2-a)^2 + (1-b)^2 = a^2$
$\therefore b^2 - 4a - 2b + 5 = 0 \cdots\cdots$ ㉡
㉠이 점 $(4,\ -1)$ 을 지나므로
$(4-a)^2 + (-1-b)^2 = a^2$
$b^2 - 8a + 2b + 17 = 0 \cdots\cdots$ ㉢
㉡ $\times 2 -$ ㉢에서 $b^2 - 6b - 7 = 0$, $(b+1)(b-7) = 0$
$\therefore\ b = -1,\ 7$
이때, ㉡에서 $b = -1$ 이면 $a = 2,\ b = 7$ 이면 $a = 10$
$\therefore\ r = 2$ 또는 10
따라서 큰 원의 반지름의 길이는 10 이다.

4. 두 직선 $x+y=1,\ ax+2y+a+2=0$ 이 제 1사분면에서 만나도록 하는 정수 a 값의 개수를 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x+y=1 \cdots$ ㉠

$ax+2y+a+2=0 \cdots$ ㉡

㉡ − ㉠ × 2 : $(a-2)x+a+4=0$

$\Rightarrow \quad x=\dfrac{a+4}{2-a}$

$\Rightarrow y=1-x=\dfrac{2a+2}{a-2}$

$\therefore$ 교점 : $\left(\dfrac{a+4}{2-a},\ \dfrac{2a+2}{a-2}\right)$

교점이 제 1 사분면에 있으므로

$\dfrac{a+4}{2-a}>0,\ \dfrac{2a+2}{a-2}>0$

두 식의 양변에$(a-2)^2$ 을 곱하면

$(a-2)(a+4)<0,\ 2(a+1)(a-2)>0$

$\Rightarrow -4<a<2,\ a<-1 \ or \ a>2$

$\therefore \ -4<a<-1$

$\therefore$ 정수인 a 의 개수는 $-3, -2$ 즉 2개

5. 좌표평면 위에 서로 다른 세 점 $A(-2k-1, 5)$ $B(k, -k-10)$, $C(2k+5, k-1)$가 일직선 위에 있을 때, k의 값의 곱을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

세 점 A, B, C가 일직선 위에 있으므로
직선 AB와 직선 BC의 기울기는 같다.

$$\frac{-k-10-5}{k-(-2k-1)} = \frac{(k-1)-(-k-10)}{2k+5-k}$$

이 식을 정리하면 $k^2+7k+12=0$

$\therefore$ k의 값의 곱은 12이다.

6. 세 직선 $x+2y=5$, $2x-3y=4$, $ax+y=0$이 삼각형을 이루지 못할 때, 상수 a의 값들의 곱은?

① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{3}{23}$ ③ $-\frac{1}{23}$ ④ $\frac{2}{23}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

해설

주어진 세 직선이 일치하는 경우는 없으므로
삼각형을 이루지 못하는 것은 두 직선이
서로 평행해서 교점이 두 개만 생기거나
세 직선이 모두 한 점에서 만나는 경우이다.

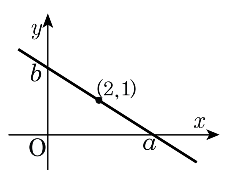
(i) 두 직선이 평행한 경우 세 직선의 기울기는
각각 $-\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $-a$이므로
$a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=-\frac{2}{3}$이면 두 직선이 평행하다.

(ii) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우
$x+2y=5$ 와 $2x-3y=4$의 교점은 $\left(\frac{23}{7}, \frac{6}{7}\right)$
이 점이 $ax+y=0$ 위에 있으려면 $a=-\frac{6}{23}$

(i), (ii)에서 $a=\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{3}$, $-\frac{6}{23}$

따라서 세 수의 곱은 $\frac{2}{23}$

7. 다음 그림에서 a와 b 사이의 관계식을 나타내면?



① $a+\frac{a}{2}=1$　　② $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$
③ $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$　　④ $\frac{2}{a}+b=1$
⑤ $\frac{1}{2a}+\frac{1}{b}=1$

해설

x 절편이 a, y 절편이 b 인 직선의 방정식은
$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 이다.
따라서 $(2,\ 1)$ 을 지나므로
$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$ 이다.

8. $x^2+y^2+x-y+k=0$ 의 그래프가 원을 나타내도록 하는 상수 k 의 값의 범위는?

① $k \le \frac{1}{2}$ ② $k < \frac{1}{2}$ ③ $k > \frac{1}{2}$ ④ $k \ge \frac{1}{2}$ ⑤ $k < \frac{1}{3}$

해설

주어진 방정식을 정리하면,

$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}-k$

$\therefore$ 원이 되려면, $\frac{1}{2}-k>0 \ \rightarrow \ k<\frac{1}{2}$

9. 세 직선 $x+2y-3=0,\ 3x+y-4-a=0,\ \ 2x-3y-2a=0$ 이 한 점에서 만나도록 상수 a 의 값은?

① $a=-\frac{3}{5}$　　② $a=-\frac{1}{3}$　　③ $a=-\frac{5}{3}$

④ $a=\frac{5}{3}$　　⑤ $a=5$

해설

두 직선의 교점이 다른 한 직선 위에 있으면 된다.

$x+2y-3=0 \quad \cdots$ ㉠

$3x+y-4-a=0 \cdots$ ㉡

$2x-3y-2a=0 \quad \cdots$ ㉢라하고,

㉡ $\times 3 +$ ㉢ $\Leftrightarrow \therefore\ 11x-12-5a=0$

$\therefore\ x=\dfrac{5a+12}{11}$

㉡ $\times 2 -$ ㉢ $\times 3 \Leftrightarrow \therefore\ 11y-8+4a=0$

$\therefore\ y=\dfrac{-4a+8}{11}$

$\therefore$ ㉡, ㉢의 교점의 좌표는 $\left(\dfrac{5a+12}{11},\ \dfrac{-4a+8}{11}\right)$

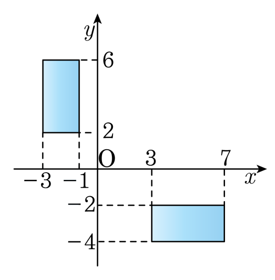
이 점이 ㉠위에 있어야 하므로

$\dfrac{5a+12}{11}+2\dfrac{-4a+8}{11}-3=0$

즉, $\dfrac{5a+12-8a+16}{11}-3=0$

$-3a+28=33,\ 3a=-5 \quad \therefore\ a=-\dfrac{5}{3}$

10. 다음 그림의 좌표평면 위에서 두 직사각형의 넓이를 모두 이등분하는 직선의 기울기는?



① $-\frac{3}{2}$　② -1　③ $-\frac{3}{4}$
④ $-\frac{7}{8}$　⑤ $-\frac{1}{2}$

해설

직사각형의 넓이는 두 대각선의 교점을 지나는 직선에 의하여 이등분된다.
따라서, 두 대각선의 교점의 좌표는 각각 A$(-2,\ 4)$, B$(5,\ -3)$이므로
직선 AB 의 기울기는 $\frac{-3-4}{5-(-2)} = -1$

11. 중심이 $(1, 3)$ 이고, x 축에 접하는 원의 반지름의 길이는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

x 축에 접하는 원의 반지름은 y 좌표의 절댓값과 같으므로,
$(x-1)^2+(y-3)^2=9$

12. 두 직선 $x+y=3$, $mx-y+2m-5=0$이 제 1사분면에서 만날 때, m의 값의 범위는?

① $-2<m<2$　② $-2<m<3$　③ $-1<m<2$

④ $1<m<4$　⑤ $0<m<3$

해설

$mx-y+2m-5=0\cdots$①에서
$m(x+2)-(y+5)=0$이므로
위의 직선은 m의 값에 관계없이
점 $(-2,-5)$를 지나고, 기울기 m인 직선이다.
따라서 두 직선이 제 1사분면에서
만나기 위해서는 직선 ①이 $(3,0)$과 $(0,3)$을
잇는 선분의 사이를 지나면 된다.
직선 ①이 $(3,0)$을 지날 때 $m=1$이고
$(0,3)$을 지날 때 $m=4$이므로
따라서 $1<m<4$

13. 세 점 A $(2,\ 3)$, B$(-1,\ 5)$, C$(4,\ a)$이 일직선 위에 있을 때, a의 값은?

① -1 ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{2}{5}$ ④ $-\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

해설

세 점이 일직선 위에 있기 위해서는
직선 AB의 기울기와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로
$\frac{3-5}{2+1}=\frac{a-5}{4+1}$에서
$\therefore a=\frac{5}{3}$

14. 세 직선 $2x-y-4=0$, $x-2y-2=0$, $y=ax+2$ 가 오직 한 점에서 만날 때, 상수 a 의 값은?

① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

해설

세 직선이 한 점에서 만나려면 두 직선의 교점을 나머지 한 직선이 지나야 한다.

$2x-y-4=0 \cdots$ ㉠

$x-2y-2=0 \cdots$ ㉡

$y=ax+2 \quad \cdots$ ㉢이라 할 때,

㉠, ㉡의 교점이 ㉢위에 있으면, 한 점에서 만나므로

㉠, ㉡를 연립하여 풀면 $x=2$, $y=0$

두 직선의 교점 $(2,\ 0)$ 이 직선 $y=ax+2$ 를 지나면 한 점에서 만나므로

$0=2a+2$, $2a=-2$

$\therefore \quad a=-1$

15. 다음 중 직선의 방정식을 바르게 구한 것을 <u>모두</u> 고르면?

㉠ 점 $(0,5)$를 지나고, x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $60°$인 직선 $\rightarrow y = x + 5$
㉡ 두 점 $A(1,-1)$, $B(-1,3)$을 지나는 직선 $\rightarrow y = -2x + 1$
㉢ x 절편이 2 , y절편이 -2인 직선 $\rightarrow y = 2x - 2$

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉡
④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설
㉠ (기울기)$= \tan 60° = \sqrt{3}$ 이고 y절편이 5이므로 $y = \sqrt{3}x + 5$
㉡ $y + 1 = \dfrac{3-(-1)}{-1-1}(x-1)$, $\therefore\ y = -2x + 1$
㉢ $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-2} = 1$, $\therefore\ y = x - 2$
따라서 직선의 방정식을 바르게 구한 것은 ㉡뿐이다.

16. 방정식 $x^2+y^2-4x+2y+c=0$ 의 그래프가 원이 되도록 상수 c 의 값의 범위를 정하면?

① $c<1$　② $c<2$　③ $c<3$　④ $c<4$　⑤ $c<5$

해설

주어진 방정식을 변형하면

$(x^2-4x+4)+(y^2+2y+1)=5-c$

$\therefore (x-2)^2+(y+1)^2=5-c \quad \leftarrow \quad 5-c=r^2$

이 방정식의 그래프가 원이 되려면

$5-c>0 \quad \leftarrow \quad r^2>0$

$\therefore c<5$

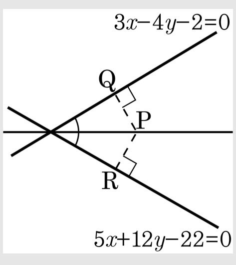
17. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의
점 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ 에 대하여 P에서
두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하면



$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$ 이므로

$$\frac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$$

$13(3X-4Y-2)=\pm5(5X+12Y-22)$

즉, $13(3X-4Y-2)=5(5X+12Y-22)$ 또는

$13(3X-4Y-2)=-5(5X+12Y-22)$ 정리하면

$x-8y+6=0$ 또는 $8x+y-17=0$ 에서

기울기가 양이므로

$\therefore\ x-8y+6=0$

$\therefore a+b+c=-1$