

1. 좌표평면 위에 세 점 $A(-2, 1)$, $B(4, 7)$, $C(6, 3)$ 을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 가 있다. 직선 $y = mx + 2m + 1$ 에 의하여 $\triangle ABC$ 의 넓이가 이등분될 때, m 의 값은?

① $\frac{2}{7}$

② $\frac{2}{5}$

③ $\frac{4}{7}$

④ $\frac{3}{4}$

⑤ $\frac{6}{7}$

해설

직선 $y = m(x + 2) + 1$ 은 m 의 값에 관계없이
항상 점 $(-2, 1)$ 을 지나므로 점 A 를 지난다.

따라서 주어진 직선이 $\triangle ABC$ 의 넓이를 이등분하려면
직선이 $\overline{BC}$ 의 중점 $M(5, 5)$ 를 지나야 한다.

$$\therefore 5 = m(5 + 2) + 1$$

$$\therefore m = \frac{4}{7}$$

2. 두 직선 $2x - y + k = 0$, $x + 2y - 1 = 0$ 이 이루는 각의 이등분선이 점 $P(3, 1)$ 을 지날 때, 상수 k 의 값의 합을 구하면?

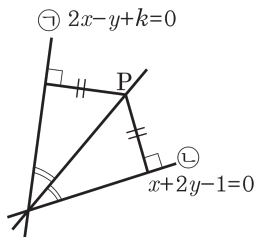
① -2

② 4

③ -6

④ 8

⑤ -10



해설

$$2x - y + k = 0 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$x + 2y - 1 = 0 \cdots \textcircled{㉡}$$

(점 P와 ㉠사이의 거리) = (점 P와 ㉡사이의 거리) 이므로

$$\frac{|6 - 1 + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|3 + 2 - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} \Rightarrow |5 + k| = 4$$

$$\Rightarrow 5 + k = \pm 4 \Rightarrow k = -9 \text{ 또는 } k = -1$$

$\therefore k$ 의 합 : -10

3. 점 $(2, 1)$, $(4, -1)$ 을 지나고, y 축에 접하는 두 개의 원 중 큰 원의 반지름의 길이는?

① 10

② 8

③ 6

④ 5

⑤ 4

해설

중심의 좌표를 (a, b) 라 하면

y 축에 접하므로 반지름의 길이 r 는 $r = |a|$ 이다.

$$\therefore (x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 \dots\dots \textcircled{㉠}$$

㉠이 점 $(2, 1)$ 을 지나므로

$$(2-a)^2 + (1-b)^2 = a^2$$

$$\therefore b^2 - 4a - 2b + 5 = 0 \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠이 점 $(4, -1)$ 을 지나므로

$$(4-a)^2 + (-1-b)^2 = a^2$$

$$b^2 - 8a + 2b + 17 = 0 \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉡} \times 2 - \textcircled{㉢} \text{에서 } b^2 - 6b - 7 = 0, (b+1)(b-7) = 0$$

$$\therefore b = -1, 7$$

이때, $\textcircled{㉡}$ 에서 $b = -1$ 이면 $a = 2$, $b = 7$ 이면 $a = 10$

$$\therefore r = 2 \text{ 또는 } 10$$

따라서 큰 원의 반지름의 길이는 10 이다.

4. 두 직선 $x + y = 1$, $ax + 2y + a + 2 = 0$ 이 제 1사분면에서 만나도록 하는 정수 a 값의 개수를 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$x + y = 1 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$ax + 2y + a + 2 = 0 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉡} - \textcircled{㉠} \times 2 : (a - 2)x + a + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{a + 4}{2 - a}$$

$$\Rightarrow y = 1 - x = \frac{2a + 2}{a - 2}$$

$$\therefore \text{교점} : \left(\frac{a + 4}{2 - a}, \frac{2a + 2}{a - 2} \right)$$

교점이 제 1 사분면에 있으므로

$$\frac{a + 4}{2 - a} > 0, \frac{2a + 2}{a - 2} > 0$$

두 식의 양변에 $(a - 2)^2$ 을 곱하면

$$(a - 2)(a + 4) < 0, 2(a + 1)(a - 2) > 0$$

$$\Rightarrow -4 < a < 2, a < -1 \text{ or } a > 2$$

$$\therefore -4 < a < -1$$

$\therefore$ 정수인 a 의 개수는 $-3, -2$ 즉 2개

5. 좌표평면 위에 서로 다른 세 점 $A(-2k-1, 5)$ $B(k, -k-10)$, $C(2k+5, k-1)$ 가 일직선 위에 있을 때, k 의 값의 곱을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

세 점 A, B, C 가 일직선 위에 있으므로
직선 AB 와 직선 BC 의 기울기는 같다.

$$\frac{-k-10-5}{k-(-2k-1)} = \frac{(k-1)-(-k-10)}{2k+5-k}$$

이 식을 정리하면 $k^2 + 7k + 12 = 0$

$\therefore k$ 의 값의 곱은 12이다.

6. 세 직선 $x + 2y = 5$, $2x - 3y = 4$, $ax + y = 0$ 이 삼각형을 이루지 못할 때, 상수 a 의 값들의 곱은?

① $-\frac{1}{3}$

② $-\frac{3}{23}$

③ $-\frac{1}{23}$

④ $\frac{2}{23}$

⑤ $\frac{1}{3}$

해설

주어진 세 직선이 일치하는 경우는 없으므로 삼각형을 이루지 못하는 것은 두 직선이 서로 평행해서 교점이 두 개만 생기거나 세 직선이 모두 한 점에서 만나는 경우이다.

(i) 두 직선이 평행한 경우 세 직선의 기울기는

각각 $-\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $-a$ 이므로

$a = \frac{1}{2}$ 또는 $a = -\frac{2}{3}$ 이면 두 직선이 평행하다.

(ii) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우

$x + 2y = 5$ 와 $2x - 3y = 4$ 의 교점은 $\left(\frac{23}{7}, \frac{6}{7}\right)$

이 점이 $ax + y = 0$ 위에 있으려면 $a = -\frac{6}{23}$

(i), (ii)에서 $a = \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{6}{23}$

따라서 세 수의 곱은 $\frac{2}{23}$

7. 다음 그림에서 a 와 b 사이의 관계식을 나타내면?

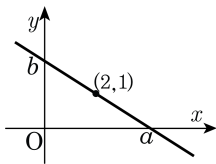
① $a + \frac{a}{2} = 1$

③ $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1$

⑤ $\frac{1}{2a} + \frac{1}{b} = 1$

② $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = 1$

④ $\frac{2}{a} + b = 1$



해설

x 절편이 a , y 절편이 b 인 직선의 방정식은

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ 이다.}$$

따라서 $(2, 1)$ 을 지나므로

$$\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = 1 \text{ 이다.}$$

8. $x^2 + y^2 + x - y + k = 0$ 의 그래프가 원을 나타내도록 하는 상수 k 의 값의 범위는?

- ① $k \leq \frac{1}{2}$ ② $k < \frac{1}{2}$ ③ $k > \frac{1}{2}$ ④ $k \geq \frac{1}{2}$ ⑤ $k < \frac{1}{3}$

해설

주어진 방정식을 정리하면,

$$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - k$$

$$\therefore \text{원이 되려면, } \frac{1}{2} - k > 0 \rightarrow k < \frac{1}{2}$$

9. 세 직선 $x + 2y - 3 = 0$, $3x + y - 4 - a = 0$, $2x - 3y - 2a = 0$ 이 한 점에서 만나도록 상수 a 의 값은?

① $a = -\frac{3}{5}$

② $a = -\frac{1}{3}$

③ $a = -\frac{5}{3}$

④ $a = \frac{5}{3}$

⑤ $a = 5$

해설

두 직선의 교점이 다른 한 직선 위에 있으면 된다.

$$x + 2y - 3 = 0 \quad \cdots \textcircled{A}$$

$$3x + y - 4 - a = 0 \quad \cdots \textcircled{B}$$

$$2x - 3y - 2a = 0 \quad \cdots \textcircled{C} \text{라하고,}$$

$$\textcircled{B} \times 3 + \textcircled{C} \Leftrightarrow \therefore 11x - 12 - 5a = 0$$

$$\therefore x = \frac{5a + 12}{11}$$

$$\textcircled{B} \times 2 - \textcircled{C} \times 3 \Leftrightarrow \therefore 11y - 8 + 4a = 0$$

$$\therefore y = \frac{-4a + 8}{11}$$

$$\therefore \textcircled{B}, \textcircled{C} \text{의 교점의 좌표는 } \left(\frac{5a + 12}{11}, \frac{-4a + 8}{11} \right)$$

이 점이 $\textcircled{A}$ 위에 있어야 하므로

$$\frac{5a + 12}{11} + 2 \frac{-4a + 8}{11} - 3 = 0$$

$$\text{즉, } \frac{5a + 12 - 8a + 16}{11} - 3 = 0$$

$$-3a + 28 = 33, \quad 3a = -5 \quad \therefore a = -\frac{5}{3}$$

10. 다음 그림의 좌표평면 위에서 두 직사각형의 넓이를 모두 이등분하는 직선의 기울기는?

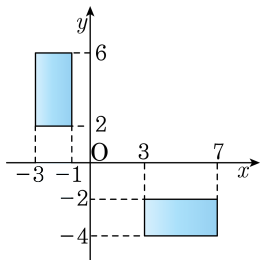
① $-\frac{3}{2}$

② -1

③ $-\frac{3}{4}$

④ $-\frac{7}{8}$

⑤ $-\frac{1}{2}$



해설

직사각형의 넓이는 두 대각선의 교점을 지나는 직선에 의하여 이등분된다.

따라서, 두 대각선의 교점의 좌표는 각각 $A(-2, 4)$, $B(5, -3)$ 이므로

$$\text{직선 AB의 기울기는 } \frac{-3-4}{5-(-2)} = -1$$

11. 중심이 $(1, 3)$ 이고, x 축에 접하는 원의 반지름의 길이는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

x 축에 접하는 원의 반지름은 y 좌표의 절댓값과 같으므로,
$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$$

12. 두 직선 $x + y = 3$, $mx - y + 2m - 5 = 0$ 이 제 1사분면에서 만날 때, m 의 값의 범위는?

① $-2 < m < 2$

② $-2 < m < 3$

③ $-1 < m < 2$

④ $1 < m < 4$

⑤ $0 < m < 3$

해설

$mx - y + 2m - 5 = 0 \cdots \textcircled{1}$ 에서

$m(x + 2) - (y + 5) = 0$ 이므로

위의 직선은 m 의 값에 관계없이

점 $(-2, -5)$ 를 지나고, 기울기 m 인 직선이다.

따라서 두 직선이 제 1사분면에서

만나기 위해서는 직선 $\textcircled{1}$ 이 $(3, 0)$ 과 $(0, 3)$ 을
잇는 선분의 사이를 지나면 된다.

직선 $\textcircled{1}$ 이 $(3, 0)$ 을 지날 때 $m = 1$ 이고

$(0, 3)$ 을 지날 때 $m = 4$ 이므로

따라서 $1 < m < 4$

13. 세 점 A (2, 3), B(-1, 5), C(4, a)이 일직선 위에 있을 때, a의 값은?

① -1

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{2}{5}$

④ $-\frac{3}{4}$

⑤ $\frac{5}{3}$

해설

세 점이 일직선 위에 있기 위해서는

직선 AB의 기울기와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$$\frac{3-5}{2+1} = \frac{a-5}{4+1} \text{ 에서}$$

$$\therefore a = \frac{5}{3}$$

14. 세 직선 $2x - y - 4 = 0$, $x - 2y - 2 = 0$, $y = ax + 2$ 가 오직 한 점에서 만날 때, 상수 a 의 값은?

① 2

② 1

③ 0

④ -1

⑤ -2

해설

세 직선이 한 점에서 만나려면 두 직선의 교점을 나머지 한 직선이 지나야 한다.

$$2x - y - 4 = 0 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$x - 2y - 2 = 0 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$y = ax + 2 \cdots \textcircled{㉢} \text{이라 할 때,}$$

㉠, ㉡의 교점이 ㉢위에 있으면, 한 점에서 만나므로

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{를 연립하여 풀면 } x = 2, y = 0$$

두 직선의 교점 $(2, 0)$ 이 직선 $y = ax + 2$ 를 지나면 한 점에서 만나므로

$$0 = 2a + 2, 2a = -2$$

$$\therefore a = -1$$

15. 다음 중 직선의 방정식을 바르게 구한 것을 모두 고르면?

㉠ 점 $(0, 5)$ 를 지나고, x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 60° 인 직선 $\rightarrow y = x + 5$

㉡ 두 점 $A(1, -1)$, $B(-1, 3)$ 을 지나는 직선 $\rightarrow y = -2x + 1$

㉢ x 절편이 2, y 절편이 -2 인 직선 $\rightarrow y = 2x - 2$

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ (기울기) $= \tan 60^\circ = \sqrt{3}$ 이고 y 절편이 5이므로 $y = \sqrt{3}x + 5$

㉡ $y + 1 = \frac{3 - (-1)}{-1 - 1}(x - 1)$, $\therefore y = -2x + 1$

㉢ $\frac{x}{2} + \frac{y}{-2} = 1$, $\therefore y = x - 2$

따라서 직선의 방정식을 바르게 구한 것은 ㉡뿐이다.

16. 방정식 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + c = 0$ 의 그래프가 원이 되도록 상수 c 의 값의 범위를 정하면?

① $c < 1$

② $c < 2$

③ $c < 3$

④ $c < 4$

⑤ $c < 5$

해설

주어진 방정식을 변형하면

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) = 5 - c$$

$$\therefore (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5 - c \quad \leftarrow \quad 5 - c = r^2$$

이 방정식의 그래프가 원이 되려면

$$5 - c > 0 \quad \leftarrow \quad r^2 > 0$$

$$\therefore c < 5$$

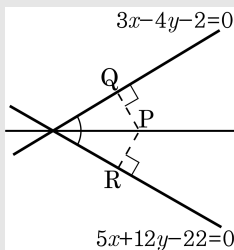
17. 두 직선 $3x - 4y - 2 = 0$, $5x + 12y - 22 = 0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax + by + c = 0$ 일 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의 점 $P(X, Y)$ 에 대하여 P에서 두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 이라 하면



$\overline{PQ} = \overline{PR}$ 이므로

$$\frac{|3X - 4Y - 2|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|5X + 12Y - 22|}{\sqrt{25 + 144}}$$

$$13(3X - 4Y - 2) = \pm 5(5X + 12Y - 22)$$

즉, $13(3X - 4Y - 2) = 5(5X + 12Y - 22)$ 또는

$13(3X - 4Y - 2) = -5(5X + 12Y - 22)$ 정리하면

$x - 8y + 6 = 0$ 또는 $8x + y - 17 = 0$ 에서

기울기가 양이므로

$$\therefore x - 8y + 6 = 0$$

$$\therefore a + b + c = -1$$