1. $1, 2, 3, 4$ 를 일렬로 배열할 때, i 번째 오는 숫자를 a_i $(1 \leq i \leq 4)$라고 하면 $(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3)(a_4 - 4) \neq 0$ 인 경우의 수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 9 가지

해설

가능한 답을 순서쌍 (a_1, a_2, a_3, a_4) 으로 나타내어 보면 다음과 같다.

$(2, 1, 4, 3)$, $(2, 3, 4, 1)$, $(2, 4, 1, 3)$,
$(3, 1, 4, 2)$, $(3, 4, 1, 2)$, $(3, 4, 2, 1)$,
$(4, 1, 2, 3)$, $(4, 3, 1, 2)$, $(4, 3, 2, 1)$

$\therefore$ 9 가지

2. 10 원짜리 동전 5 개, 100 원짜리 동전 4 개, 1000 원짜리 지폐 1 장이 있을 때, 이들을 전부 또는 일부 사용하여 지불할 수 있는 금액은 몇 가지인지 구하여라.

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 59 가지

해설

10 원짜리 동전을 $0, 1, 2, 3, 4, 5$ 개 사용할 수 있고 이들 각각에 100 원짜리 동전을 $0, 1, 2, 3, 4$ 개 사용할 수 있고 여기에 1000 원짜리 지폐 $0, 1$ 개를 각각 사용할 수 있다.
그런데 10 원짜리 동전 0 개, 100 원짜리 동전 0 개, 1000 원자리 지폐 0 개를 동시에 사용하는 것은 의미가 없으므로 구하는 경우의 수는
$6 \times 5 \times 2 - 1 = 59$ (가지)

3. ‘*korea*’의 모든 문자를 써서 만든 순열 중 적어도 한 쪽 끝이 자음인 것의 개수를 구하여라.

▶ **답 :** ______ 개

▷ **정답 :** 84 개

해설

전체 경우의 수에서 양 쪽 끝이 모두 모음인 경우를 제외한다.

$5! - {}_3P_2 \times 3! = 84$

4. 등식 $\dfrac{4}{11} = \dfrac{1}{a+\dfrac{1}{b+\dfrac{1}{c}}}$을 만족시키는 세 자연수 a, b, c에 대하여 $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$\dfrac{4}{11} = \dfrac{1}{a+\dfrac{1}{b+\dfrac{1}{c}}}$에서

$a+\dfrac{1}{b+\dfrac{1}{c}} = \dfrac{11}{4} = 2+\dfrac{3}{4}$이므로

$a=2$이고 $\dfrac{1}{b+\dfrac{1}{c}} = \dfrac{3}{4}$

이 때, $b+\dfrac{1}{c} = \dfrac{4}{3} = 1+\dfrac{1}{3}$이므로 $b=1,\ c=3$

$\therefore a^2+b^2+c^2 = 2^2+1^2+3^2 = 14$

5. $t=0$에서 $t=1$까지 인구는 $i\%$증가하였고, $t=1$에서 $t=2$까지 인구는 $j\%$증가하였다면, $t=0$에서 $t=2$까지 인구 증가율은?

① $(i+j)\%$

② $ij\%$

③ $(i+ij)\%$

④ $\left(i+j+\dfrac{ij}{100}\right)\%$

⑤ $\left(i+j+\dfrac{i+j}{100}\right)\%$

해설

$t=0$에서의 인구는 P

$t=2$까지 인구 증가율을 $k\%$라 하자.

$$P\left(1+\frac{k}{100}\right)$$

$$=P\left(1+\frac{i}{100}\right)\left(1+\frac{j}{100}\right),$$

$$1+\frac{k}{100}=1+\frac{i+j}{100}+\frac{ij}{10000}$$

$$\therefore k=i+j+\frac{ij}{100}$$

6. $2x-y+z=0,\ x-2y+3z=0$일 때, $\dfrac{x^2-xy+y^2}{x^2+y^2+z^2}$의 값을 구하면 $\dfrac{n}{m}$이다. 이때, $m+n$의 값을 구하여라.(단, m, n은 서로소)

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 8

해설

$2x-y+z=0 \cdots ㉠$

$x-2y+3z=0 \cdots ㉡$

$㉠ \times 2 - ㉡ : 3x = z$

$\therefore x = \dfrac{z}{3},\ y = \dfrac{5z}{3}$

여기서 $x=k$ 라 하면 $y=5k,\ z=3k$

따라서 $\dfrac{x^2-xy+y^2}{x^2+y^2+z^2} = \dfrac{k^2-5k^2+25k^2}{k^2+25k^2+9k^2} = \dfrac{3}{5}$ $\therefore m=5,\ n=3$

$\therefore m+n=8$

7. $2x^2 - 5xy - 3y^2 = 0$ 이고, $xy > 0$ 일 때, $\dfrac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$ 의 값은?

① $\dfrac{2}{5}$ ② $\dfrac{4}{5}$ ③ $\dfrac{6}{5}$ ④ $\dfrac{7}{5}$ ⑤ $\dfrac{9}{5}$

해설

$2x^2 - 5xy - 3y^2 = 0$

$$\begin{array}{ccc} x & \diagdown\!\!\diagup & -3y \\ 2x & \diagup\!\!\diagdown & y \end{array}$$

$\Rightarrow (x-3y)(2x+y) = 0$

$x = 3y$ 또는 $2x = -y$

$xy > 0$ 이므로 $x,\ y$의 부호는 같다

$\therefore x = 3y$

$\Rightarrow \dfrac{(x-y)^2}{x^2+y^2} = \dfrac{(3y-y)^2}{(3y)^2+y^2} = \dfrac{2}{5}$

8. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$ 일 때, $\dfrac{1}{f(1)} + \dfrac{1}{f(2)} + \cdots + \dfrac{1}{f(99)}$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 9

해설

$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$ 이므로

$\dfrac{1}{f(x)} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{준 식}) &= (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \\ &\quad (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{100}-\sqrt{99}) \\ &= \sqrt{100}-1 = 10-1 = 9 \end{aligned}$$

9. 무리함수 $y = \sqrt{x-a}+1$에 대하여 $f^{-1}(2) = 3$일 때, 상수 a의 값을 구하면?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

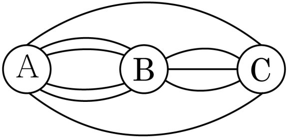
해설

$f(3) = 2$

$\therefore 2 = \sqrt{3-a}+1$

$\therefore a = 2$

10. 그림과 같이 A 에서 B 로 가는 길은 4 가지, B 에서 C 로 가는 길은 3 가지, A 에서 C 로 가는 길은 2 가지이다. A 에서 C 를 왕복하는 데 B 를 한 번만 거치는 방법의 수는?



① 24　　② 48　　③ 56　　④ 72　　⑤ 96

해설

(1) $A \to C \to B \to A$

$: \ 2 \times 3 \times 4 = 24$

(1) $A \to B \to C \to A$

$: \ 4 \times 3 \times 2 = 24$

$\therefore 24 + 24 = 48$

11. 18000 의 양의 약수 중에서 짝수의 개수는?

① 32 ② 36 ③ 40 ④ 44 ⑤ 48

해설

$18000 = 2^4 \times 3^2 \times 5^3$

따라서 양의 약수 중에서 짝수인 것의 개수는

$4 \times (2+1) \times (3+1) = 48$ (개)

12. 어떤 등산모임에서는 다음과 같이 강원도, 충청도, 전라도 세 지역의 6개의 산을 6주에 걸쳐 주말마다 하나씩 등산할 계획을 세우고 있다.

지역	산
강원도	설악산, 오대산
충청도	계룡산, 소백산
전라도	내장산, 지리산

같은 지역의 산끼리 연속적으로 등산하지 않도록 계획을 세우는 방법은 모두 몇 가지인가?

① 36 ② 48 ③ 60 ④ 120 ⑤ 240

해설

세 지역 강원도, 충청도, 전라도를 각각 A, B, C 라 하면 1주차에 A 지역 산을 등산하고, 2주차에 B 지역 산을 등산하는 경우는 다음 수형도와 같이 5가지가 있고, 같은 지역의 산끼리 위치를 바꾸는 방법은 $2 \times 2 \times 2 = 8$ (가지)

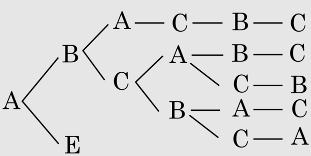
한편, 1주차에 A 지역, 2주차에 C 지역의 산을 등산하는 경우도 같으므로 1주차에 A 지역의 산을 등산하는 방법의 수는

$5 \times 8 \times 2 = 80$ (가지)

또한, 1주차에 B, C 지역의 산을 등산하는 경우의 수도 같다.

따라서 구하는 방법의 수는

$80 \times 3 = 240$ (가지)



13. 5원 짜리 동전 4개, 10원 짜리 동전 2개, 100원 짜리 동전 1개를 사용하여 거스름돈 없이 지불할 수 있는 지불금액의 수는 몇 가지인가?

① 10 ② 13 ③ 17 ④ 22 ⑤ 26

해설

5원 짜리 동전 4개이면 10원 짜리 동전 2개와 같으므로 금액이 중복된다.
10원 짜리 동전 2개를 5원 짜리 동전 4개로 바꾸면 5원 짜리 동전 8개, 100원 짜리 동전 1개가 되고 지불 방법의 수는
$(8+1)\times(1+1)=18$(가지)
돈이 0원이면 지불하는 것이 아니므로
$18-1=17$(가지)

14. 1, 2, 3, 4, 5 를 써서 만들 수 있는 세 자리 정수 중에서 각 자리의 숫자가 모두 다른 것은 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 60 개

해설

$_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$(개)

15. 남학생 4명, 여학생 6명 중에서 반장 1명, 부반장 1명을 뽑을 때, 반장, 부반장 중에서 적어도 한 명은 여자인 경우의 수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 78 가지

해설

전체의 경우에서 모두 남자인 경우의 수를 빼준다.

${}_{10}P_2 - {}_4P_2 = 90 - 12 = 78$

16. 분수함수 $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ 의 그래프가 직선 $y=mx+1$ 과 만나지 않도록 하는 실수 m 의 값의 범위를 구하면?

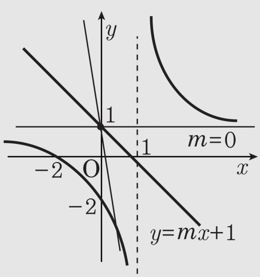
① $0<m\le 12$ ② $-12\le m<0$ ③ $-12<m\le 0$

④ $0\le m<12$ ⑤ $-12\le m\le 12$

해설

$y=\dfrac{x+2}{x-1}=\dfrac{x-1+3}{x-1}=\dfrac{3}{x-1}+1$ 이므로 함수 $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ 의 그래프는 $y=\dfrac{3}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

(i) 그림에서 $m=0$ 일 때
두 그래프는 만나지 않는다.



(ii) $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ 와 $y=mx+1$ 에서

$\dfrac{x+2}{x-1}=mx+1$

즉, $mx^2-mx-3=0$

이때, 판별식을 D 라 하면

$D=m^2+12m<0,\ m(m+12)<0$

$\therefore\ -12<m<0$

(i), (ii)에서 구하는 실수 m 의 값의 범위는

$-12<m\le 0$

17. 0, 0, 1, 2, 3, 4를 써 놓은 6장의 카드 중에서 3장을 뽑아 나열하여 세 자리 정수를 만들 때, 짝수의 개수를 구하여라.

▶ **답 :** ______ 개

▷ **정답 :** 34 개

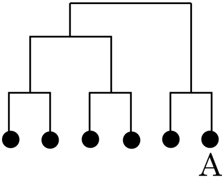
해설

1의 자리에 0, 2, 4가 오면 짝수이므로

$\times\times 0$ 의 꼴 $\to 4\times 4$, $\times\times 2$ 의 꼴 $\to 3\times 3$, $\times\times 4$ 의 꼴 $\to 3\times 3$

따라서 짝수의 개수는 $4\times 4+3\times 3+3\times 3=34$ (개)

18. 지난 대회 우승 팀 A 가 먼저 배정을 받은 다음 그림과 같은 토너먼트 방식의 대진표에서 제비뽑기를 하여 5 개의 팀을 결정하기로 할 때, 가능한 모든 경우의 수는?



① 15 ② 18 ③ 20 ④ 24 ⑤ 30

해설

A 팀과 게임을 할 팀을 뽑는 방법의 수는

${}_5C_1 = 5$ (가지)

그 각각의 경우에 대하여 나머지 4 팀을

(2 팀, 2 팀) 으로 편성하는 방법의 수는

$${}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = 3 \text{ (가지)}$$

따라서 구하는 경우의 수는 $5 \times 3 = 15$ (가지)

19. 10명의 주주 중에서 사장 1명, 부사장 2명을 뽑는 방법의 수는?

① 240 ② 280 ③ 360 ④ 480 ⑤ 720

해설

10명 중에서 사장 1명을 뽑는 가지수는 ${}_{10}C_1$,
나머지 9명 중에서 부사장 2명을 뽑는 가지수는 ${}_{9}C_2$
따라서 ${}_{10}C_1 \times {}_9 C_2 = 360$

20. 11 명의 학생을 3 명, 3 명, 5 명의 3 개의 조로 나누어 과학실, 화장실, 식당을 청소하도록 하는 방법의 수는?

① 4620 ② 6930 ③ 13860

④ 27720 ⑤ 55440

해설

$$_{11}C_3 \times _8C_3 \times _5C_5 \times \frac{1}{2!} \times 3! = 27720$$

21. 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 이 적혀 있는 7 개의 카드 중에서 서로 다른 5 개의 카드를 뽑아 나열한다. 이 때, 위의 그림의 예와 같이 첫 번째 카드와 마지막 다섯 번째 카드에 적힌 숫자의 합이 8 이 면서 마지막 다섯 번째 카드에 적힌 숫자가 3 이상이 되도록 나열하는 방법의 수는?

① 120　② 180　③ 240　④ 300　⑤ 360

해설

첫 번째 카드와 마지막 다섯 번째 카드에 적힌 숫자의 합이 8 이면서 마지막 다섯 번째 카드에 적힌 숫자가 3 이상인 경우는

$1-7, 2-6, 3-5, 5-3$ 의 4가지이다.

이 4가지 경우에 대하여 각각 중앙에 남은 세 자리에 5개의 수 중에서

3개를 택하여 나열하는 방법의수는

${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$ (가지)

따라서 구하는 방법의 수는 $4 \times 60 = 240$ (가지)

22. $april$의 5개의 문자를 일렬로 나열할 때, p, r, l은 이 순서로 나열하는 방법의 수는?

① 20 ② 24 ③ 30 ④ 60 ⑤ 120

해설

5 개의 문자를 나열한 후 p, r, l을 나열하는 방법의 수로 나눈다.

$\therefore \dfrac{5!}{3!} = 20$

23. 초등학생 2 명, 중학생 2 명, 고등학생 2 명을 일렬로 세울 때, 초등학생 2 명은 이웃하고, 중학생 2 명은 이웃하지 않도록 세우는 방법의 수는?

① 72 ② 84 ③ 96 ④ 120 ⑤ 144

해설

초등학생 2 명과 중학생 2 명을 각각 함께 묶어서 4 명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$4! \times 2! \times 2 = 96$ (가지)

초등학생 2 명만 함께 묶어서 5 명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$5! \times 2 = 240$ (가지)

따라서 구하는 방법의 수는 $240 - 96 = 144$(가지)

24. 자연수 n 에 대하여 ${}_{n+3}C_3 + \frac{{}_{n+3}C_2}{3} = \frac{32}{3}(n+3)$ 이 성립할 때, n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $n = 6$

해설

$${}_{n+3}C_3 = \frac{{}_{n+3}P_3}{3!} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6},$$

$${}_{n+3}C_2 = \frac{{}_{n+3}P_2}{2!} = \frac{(n+2)(n+3)}{2},$$

${}_{n+3}C_3 + \frac{{}_{n+3}C_2}{3} = \frac{32}{3}(n+3)$ 에서

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} + \frac{(n+2)(n+3)}{6} = \frac{32}{3}(n+3)$$

양변에 $\frac{6}{n+3}$ 을 곱하여 정리하면

$n^2 + 4n - 60 = 0$, $(n-6)(n+10) = 0$

$\therefore n = 6$

25. 남자 3 명, 여자 4 명을 한 줄로 세울 때, 양 끝과 한가운데 여자가 서는 방법의 수는?

① 72 ② 144 ③ 288 ④ 576 ⑤ 684

해설

여자를 a 라 하면,

$a\boxed{}\boxed{}a\boxed{}\boxed{}a$ 와 같은 방법이어야 하므로 a 의 위치에 세울 여자를 선택하는 방법은 ${}_4P_3$ 이고, $\boxed{}$의 위치에 세울 사람 (여자 1명, 남자 3명)을 선택 하는 방법은 $4!$ 이다.

따라서, 구하는 방법의 수는

${}_4P_3 \times 4! = 24 \times 24 = 576$ 이다.

26. 6 개의 문자 $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$를 일렬로 배열할 때, 모음 $a,\ e$가 이웃하지 않는 경우는 몇 가지가 되는지 구하여라.

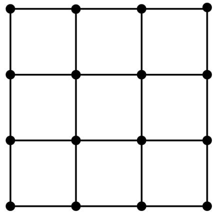
▶ 답 : ________ 가지

▷ 정답 : 480 가지

해설

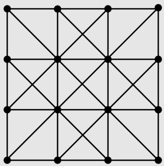
$a,\ e$ 를 제외한 나머지 $b,\ c,\ d,\ f$ 네 문자를 일렬로 먼저 배열하는 방법의 수는 $4!$ 가지가 있다.
이 때, 그 네 문자 사이의 양 끝의 5 개의 자리에 $a,\ e$를 늘어 놓으면, $a,\ e$는 이웃할 수 없다.
즉, $\square\, b\, \square\, c\, \square\, d\, \square\, f\, \square$의 다섯 개의 $\square$중에 두 개를 골라 $a,\ e$ 를 배열한다.
따라서, 구하는 가짓수는 $4! \times {}_5P_2 = 24 \times 20 = 480$ (가지)

27. 그림과 같이 9 개의 정사각형의 꼭짓점 위에 16 개의 점이 있다. 이 중에서 세 점을 이어 만들 수 있는 삼각형의 개수는?



① 236 ② 338 ③ 400 ④ 442 ⑤ 516

해설



세 점을 뽑을 수 있는 모든 방법의 수는

${}_{16}C_3 \times = 560$ (가지)

4 점이 일직선 위에 있는 경우가 10 가지,

3 점이 일직선 위에 있는 경우가 4 가지

있으므로, 일직선 위의 세 점을 선택하는 경우의 수는

${}_4C_3 \times 10 + {}_3C_3 \times 4 = 44$

따라서, 구하는 삼각형의 수는 $560 - 44 = 516$ (개)

28. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{4, 5, 6, 7\}$에서 X에서 Y로의 일대일함수의 갯수는?

① 12개　② 24개　③ 28개　④ 32개　⑤ 36개

해설

집합 Y의 원소 $4, 5, 6, 7$에서 서로 다른 세 개를 뽑아

$1 \rightarrow \square,\ 2 \rightarrow \square,\ 3 \rightarrow \square$

의 □ 안에 늘어놓는 경우의 수와 같으므로 구하는 함수의 개수는

${}_4P_3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$(개)

29. 서로 다른 과일 6 개에 대하여 과일을 1 개, 2 개, 3 개로 나누어 세 학생에게 나누어 주는 경우의 수를 구하여라.

▶ 답 : ______가지

▷ 정답 : 360가지

해설

나눈 후 배열하는 방법까지 고려한다.

$\Rightarrow {}_6C_1 \times {}_5C_2 \times {}_3C_3 \times 3! = 360$

30. a, b, c, d, e의 5개의 문자를 일렬로 나열할 때, c가 d보다 앞에 오게 되는 방법의 수는?

① 24 ② 30 ③ 60 ④ 72 ⑤ 120

해설

c와 d를 같은 문자로 생각하여 5개의 문자를 나열하는 방법과 같다.

$$\therefore \frac{5!}{2!} = 60$$

31. 여섯 개의 수 3, 4, 5, 6, 7, 8 에서 서로 다른 두 수 p, q 를 택하여 이차방정식 $px^2+qx=0$ 을 만들 때, 만들 수 있는 집합 $A=\{x|px^2+qx=0\}$ 의 개수는?

① 22 ② 23 ③ 24 ④ 25 ⑤ 26

해설

6 개의 수 중에서 2 개를 택하여 p, q 에 나열하는 경우의 수를 생각한다.

${}_6P_2=6\times5=30$ 개.

이 중에서 $p=3, q=6$ 인 경우와 $p=4, q=8$ 인 경우의 해는 같아진다.

따라서 이와 같은 경우를 찾으면,

$p=6, q=3$과 $p=8, q=4$

$p=3, q=4$과 $p=6, q=8$

$p=4, q=3$과 $p=8, q=6$

이므로 구하고자 하는 경우의 수는

$30-4=26$(개) 이다.

32. 3 개의 증권회사, 3 개의 통신회사, 4 개의 건설회사가 있다. 증권, 통신, 건설 각 업종별로 적어도 하나의 회사를 선택하여 총 4 개의 회사에 입사원서를 내는 경우의 수는?

① 120 ② 126 ③ 132 ④ 138 ⑤ 144

해설

(i) 증권, 통신, 건설회사에서 각각 2개, 1개, 1개 의 회사를 선택하는 경우의 수는
$_3C_2 \times _3C_1 \times _4C_1 = 36$(가지)

(ii) 증권, 통신, 건설회사에서 각각 1개, 2개, 1개 의 회사를 선택하는 경우의 수는
$_3C_1 \times _3C_2 \times _4C_1 = 36$(가지)

(iii) 증권, 통신, 건설회사에서 각각 1개, 1개, 2개 의 회사를 선택하는 경우의 수는
$_3C_1 \times _3C_1 \times _4C_2 = 54$(가지)

따라서, 구하는 경우의 수는 $36 + 36 + 54 = 126$(가지)

33. 5 개의 숫자 $0, 1, 2, 3, 4$ 중에서 서로 다른 세 개의 숫자를 써서 세 자리 정수를 만들 때,9 의 배수의 개수는?

① 6 ② 12 ③ 15 ④ 18 ⑤ 24

해설

각 자리수의 합이 9 의 배수일 때 그 수는 9 의 배수가 된다. $0, 1, 2, 3, 4$ 에서 각 자리수의 합이 9 의 배수가 되는 조합은 $(2, 3, 4)$ 뿐이다. $2, 3, 4$ 를 써서 만들 수 있는 3 자리 정수는 $3! = 6$

34. 15 명의 학생을 4 명, 5 명, 6 명의 3 조로 나누는 모든 방법의 수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 630630 가지

해설

$_{15}C_4 \times _{11}C_5 \times _6C_6 = 630630$