1. $\dfrac{2x+1}{x^3-1}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{bx+c}{x^2+x+1}$가 $x\neq 1$인 모두 실수 x에 대해 항상 성립 하도록 $a,\ b,\ c$를 구할 때, $a+b+c$의 값은?

① 2　　② −2　　③ 1　　④ −1　　⑤ 0

해설

우변의 분모를 통분하면

$$\frac{a(x^2+x+1)+(bx+c)(x-1)}{x^3-1}$$

$$=\frac{(a+b)x^2+(a-b+c)x+(a-c)}{x^3-1}$$

$$\therefore\ \frac{2x+1}{x^3-1}=\frac{(a+b)x^2+(a-b+c)x+(a-c)}{x^3-1}$$

분자의 계수를 비교하면

$a+b=0,\ a-b+c=2,\ a-c=1$

세 식을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=-1,\ c=0$

$\therefore a+b+c=0$

2. $f(x)=x^3-3x^2+3x+1$일 때, $f(x)-2=x(x^2-1)+a(x-x^2)+b(x^2-1)$가 항상 성립하도록 하는 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x)-2=x^3-3x^2+3x-1$이므로

$x^3-3x^2+3x-1=x(x^2-1)+a(x-x^2)+b(x^2-1)$

$=x^3+(-a+b)x^2+(a-1)x-b\cdots$㉠

㉠이 x에 대한 항등식이므로 양변의 차수가 같은 항의 계수가 같아야 한다.

즉, $-a+b=-3,\ a-1=3,\ b=1$

이므로 $a=4,\ b=1$

$\therefore\ a+b=5$

3. 다항식 $6x^3-7x^2+17x-3$을 $3x-2$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라 할 때, $Q(1)+R$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$6x^3-7x^2+17x-3=(3x-2)Q(x)+R$

양변에 $x=1$을 대입하면, $13=Q(1)+R$

$\therefore\ Q(1)+R=13$

해설

$6x^3-7x^2+17x-3$를 $3x-2$로 직접 나누거나 조립제법을 이용하여 몫과 나머지를 구할 수 있다.

4. $f(x)=x^2-ax+1$이 $x-1$로 나누어 떨어질 때 상수 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=2$

해설

$f(1)=1^2-a\cdot 1+1=0$

$\therefore\ a=2$

5. $f(x) = x^3 - ax^2 + bx - 2$가 $(x-1)(x+2)$로 나누어 떨어지도록 상수 $a+b$의 값을 정하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$f(x) = x^3 - ax^2 + bx - 2$ 라 놓으면,

$f(1) = 1 - a + b - 2 = 0$

$\therefore \ -a + b = 1 \cdots$ ㉠

$f(-2) = -8 - 4a - 2b - 2 = 0$

$\therefore \ 2a + b = -5 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a = -2,\ b = -1$

6. $f(x)=2x^3-3x^2+x-k$ 가 $x-2$를 인수로 가질 때, k를 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 6

해설

$f(x)$ 가 $x-2$를 인수로 갖는다는 것은 $f(x)$가 $x-2$로 나누어 떨어진다는 뜻이다.

즉, $f(2)=0$을 만족시키는 k를 구하면,

$f(2)=2\times 2^3-3\times 2^2+2-k=0$

$\therefore\ k=6$

7. 다항식 $f(x) = 3x^3 + ax^2 + bx + 12$가 $x-2$로 나누어 떨어지고 또, $x-3$으로도 나누어 떨어지도록 상수 $a+b$의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

$f(x)$ 가 $x-2$ 로 나누어 떨어지려면

$f(2) = 24 + 4a + 2b + 12 = 0$

$\therefore\ 4a + 2b + 36 = 0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

또, $f(x)$ 가 $x-3$ 으로 나누어 떨어지려면

$f(3) = 81 + 9a + 3b + 12 = 0$

$\therefore\ 9a + 3b + 93 = 0 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -13,\ b = 8$

8. 등식 $3x^2+2x+1=a(x-1)^2+b(x-1)+c$ 이 x 에 관한 항등식일 때, 상수 b 의 값은?

① 3　② -4　③ 2　④ 8　⑤ 6

해설

$3x^2+2x+1=a(x-1)^2+b(x-1)+c$

$=(x-1)\left\{a(x-1)+b\right\}+c$

$$\begin{array}{c|cccl}
1 & 3 & 2 & 1 & \\
 & & 3 & 5 & \\
\hline
1 & 3 & 5 & \boxed{6} & \leftarrow \text{c} \\
 & & 3 & & \\
\hline
 & 3 & \boxed{8} & \leftarrow \text{c} & \\
 & \uparrow & & & \\
 & \text{a} & & &
\end{array}$$

해설

$x=1$ 을 대입하면 $c=6$

$3x^2+2x+1=a(x-1)^2+b(x-1)+6$

$\rightarrow 3x^2+2x-5=a(x-1)^2+b(x-1)$

$\rightarrow (x-1)(3x+5)=a(x-1)^2+b(x-1)$

$\rightarrow$ 양변을 $x-1$ 로 나누면

$3x+5=a(x-1)+b=ax-a+b$

$\therefore\ a=3,\ b=8$

※ 준식의 우변을 모두 전개해서 계수비교하여 구할 수도 있다.

9. 등식 $x^3+x-1=(x-a)(x-b)(x-c)$가 항등식일 때, $a^3+b^3+c^3$의 값을 구하면?

① 2　② 5　③ 3　④ 7　⑤ -7

해설

x^3+x-1
$=(x-a)(x-b)(x-c)$
$=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$
$\therefore a+b+c=0,\ ab+bc+ca=1,\ abc=1$
$a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
$\therefore a^3+b^3+c^3=3$

10. 등식 $2x^2-3x-1=a(x-1)(x-2)+bx(x-1)+cx(x-2)$이 x에 관한 항등식이 되도록 할 때, $a+b+c$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

수치대입법을 이용한다.

$x=0$ 대입, $a=-\dfrac{1}{2}$

$x=2$ 대입, $b=\dfrac{1}{2}$

$x=1$ 대입, $c=2$

$\therefore\ a+b+c=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+2=2$

11. 등식 $(2k+1)y-(k+3)x+10=0$ 이 k의 값에 관계없이 항상 성립하도록 하는 상수 x, y 에 대하여 $x+y$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

(준식)$=(y-3x+10)+(2y-x)k=0$

$\therefore 2y=x, y-3x=-10$

$\therefore x=4, y=2$

$\therefore x+y=6$

12. k의 값에 관계없이 $(2k^2-3k)x-(k+2)y-(k^2-4)z=28$이 항상 성립하도록 x, y, z의 값을 정할 때, $3x+y+z$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

주어진 식을 k에 대해 정리하면

$(2x-z)k^2-(3x+y)k-(2y-4z+28)=0$

$\therefore\ 2x-z=0, 3x+y=0, 2y-4z+28=0$

$z=2x,\ y=-3x$ 을 $2y-4z+28=0$에 대입하면

$x=2,\ y=-6,\ z=4$

$\therefore\ 3x+y+z=4$

13. x에 대한 삼차식 x^3+ax^2+bx+3이 x^2+1로 나누어떨어질 때, 상수 a, b의 값을 정하면?

① $a=-1,\ b=3$
② $a=1,\ b=3$
③ $a=3,\ b=-1$
④ $a=-3,\ b=-1$
⑤ $a=3,\ b=1$

해설

$$\begin{aligned} x^3+ax^2+bx+3 &= (x^2+1)(x+c) \\ &= x^3+cx^2+x+c \end{aligned}$$

$\therefore\ a=c,\ b=1,\ c=3$

$\therefore\ a=3,\ b=1$

14. 모든 실수 x에 대하여 $2x^3-3x^2-x+1=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$ 이라 할 때, $a+b+c+d$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$2x^3-3x^2-x+1=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$

$x=2$를 대입하면,

$\{2\times(2)^3\}-(3\times 2^2)-2+1=a+b+c+d$

$\therefore a+b+c+d=3$

15. $(x^3 - x^2 - 2x + 1)^5 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots + a_{15}(x-1)^{15}$
일 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{14}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

양변에 $x = 0$을 대입하면
$1 = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots - a_{15} \cdots$ ㉠
양변에 $x = 2$를 대입하면
$1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{15} \quad \cdots$ ㉡
㉠ + ㉡을 하면
$2 = 2(a_0 + a_2 + \cdots + a_{14})$이다.
$\therefore \ a_0 + a_2 + \cdots a_{14} = 1$

16. 다항식 $(x^3+x^2-2x-1)^5$ 을 전개한 식이 $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{14}x^{14}+a_{15}x^{15}$ 일 때, $a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{14}-a_{15}$ 의 값을 구하면?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 5

해설

$(x^3+x^2-2x-1)^5$

$=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{14}x^{14}+a_{15}x^{15}$

양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$(-1+1+2-1)^5=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{14}-a_{15}=1$

17. x에 관한 삼차식 x^3+mx^2+nx+1을 $x+1$로 나누면 나머지가 5이고, $x-2$로 나누면 나머지가 3이다. 이 때, 상수 $m-n$의 값은?

① 4 ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{14}{3}$ ④ 5 ⑤ $\frac{16}{3}$

해설

나머지 정리를 이용한다.
주어진 식에 $x=-1, x=2$를 각각 대입하면
$x=-1$일 때,
$(-1)^3+m(-1)^2+n(-1)+1=5\cdots$①
$x=2$일 때, $(2)^3+m(2)^2+n\cdot 2+1=3\cdots$②
①, ②를 연립하면
$m=\frac{2}{3},\ n=-\frac{13}{3}$
$\therefore\ m-n=5$

18. 다항식 $f(x)$ 를 x^2-3x+2 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $R(0)$ 의 값은?

① $2f(1)-f(2)$ ② $2\{f(1)+f(2)\}$

③ $2(1)+f(2)$ ④ $4\{f(1)+f(2)\}$

⑤ $4\{f(1)-f(2)\}$

해설

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x^2-3x+2)Q(x)+ax+b \\
&= (x-1)(x-2)Q(x)+ax+b
\end{aligned}
$$

$R(x)=ax+b,\ R(0)=b$

$f(1)=a+b,\ f(2)=2a+b$

$2f(1)-f(2)=b$

19. 다항식 $f(x)$를 $x-2$, $x+2$로 나누었을 때, 나머지가 각각 5, 3이라 한다. 이 때, 다항식 $f(x)$를 x^2-4로 나눈 나머지를 구하면 $ax+b$이다. $4a+b$의 값을 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

$f(2)=5,\ f(-2)=3$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-4)Q(x)+ax+b \\ &= (x-2)(x+2)Q(x)+ax+b \end{aligned}$$

$f(2)=2a+b=5,\ f(-2)=-2a+b=3$

$a=\dfrac{1}{2},\ b=4$

20. x에 대한 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는 6이고, $(x-2)^2$으로 나눈 나머지는 $6x+1$이다. 이때, $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나눈 나머지는?

① $6x+7$ ② $-6x+5$ ③ $7x+7$

④ $7x-1$ ⑤ $8x+13$

해설

$f(1)=6,\ f(x)=(x-2)^2q(x)+6x+1$

$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$에서

$f(1)=a+b=6,\ f(2)=2a+b=13$

$\therefore\ \ a=7,\ b=-1$

따라서 $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나눈 나머지는 $7x-1$이다.

21. x^5+x+1을 $x+1$로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 할 때, $Q(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x^5+x+1=(x+1)Q(x)+R$

$x=-1$을 양변에 대입하면 $R=-1$

$\therefore\ x^5+x+1=(x+1)Q(x)-1 \cdots$ ㉠

$Q(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는 $Q(1)$

㉠에 $x=1$을 대입하면 $3=2Q(1)-1$

$\therefore\ Q(1)=2$

22. x에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+c를 $x-1$로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. $i=1$일 때, $a+b+c$의 값을 옳게 구한 것은?

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & a & b & c \\ & & d & e & f \\ \hline & 1 & g & h & \boxed{i} \end{array}$$

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

다항식 x^3+ax^2+bx+c를 $x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & a & b & c \\ & & 1 & a+1 & a+b+1 \\ \hline & 1 & a+1 & a+b+1 & \boxed{a+b+c+1} \end{array}$$

이때 $a+b+c+1=1$이므로

$a+b+c=0$

따라서 ③이다.

23. 등식 $\dfrac{2x^2+13x}{(x+2)(x-1)^2}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{C}{x+2}$가 x에 대한 항등식이 되도록 상수 $A,\ B,\ C$의 값을 정할 때, $A+B+C$의 값은?

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

해설

양변에 $(x+2)(x-1)^2$을 곱하면
$2x^2+13x=A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2$에서
$x=1,\ -2,\ 0$을 차례로 대입하여 $A,\ B,\ C$를 구하면
$B=5,\ C=-2,\ A=4$
$\therefore\ A+B+C=7$

24. $y=kx^2+(1-2k)x+k-1$의 그래프는 k에 관계없이 항상 한 정점 A를 지난다. B의 좌표를 $\mathrm{B}(b, 1)$라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이가 $\sqrt{2}$가 되도록 하는 b의 값들의 합을 구하면?

① 1　　② 2　　③ -2　　④ -3　　⑤ -1

해설

(i) 준식을 k에 관하여 정리하면

$(x^2-2x+1)k+(x-y-1)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 성립할 조건은

$x^2-2x+1=0,\ x-y-1=0$

$\therefore\ x=1,\ y=0$

$\therefore\ A(1,0)$

(ii) $\mathrm{A}(1,0), \mathrm{B}(b,1)$에서

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(b-1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$

$b^2-2b=0,\quad b(b-2)=0\quad \therefore\ b=0,\ 2$

$\therefore\ b$의 값들의 합은 2

25. $x+y+z=0,\ 2x-y-7z=3$을 동시에 만족시키는 x, y, z에 대하여 $ax^2+by^2+cz^2=1$이 성립할 때, $a+b+c$의 값을 구하면?

① 11 ② 8 ③ 7 ④ 6 ⑤ 4

해설

(i) $x+y+z=0,\ 2x-y-7z=3$에서
$x,\ y$를 z에 대하여 나타내면
$x=2z+1,\ y=-3z-1$

(ii) $x=2z+1,\ y=-3z-1$을 $ax^2+by^2+cz^2=1$ 에 대입하여 정리하면
$(4a+9b+c)z^2+2(2a+3b)z+(a+b-1)=0$
$\therefore\ 4a+9b+c=0,\ 2a+3b=0,\ a+b-1=0$
$\therefore\ a=3,\ b=-2,\ c=6$
$\therefore\ a+b+c=7$

26. 모든 실수 x에 대하여 등식 $x^{2007}+1=a_0+a_1(x+4)+a_2(x+4)^2+\cdots+a_{2007}(x+4)^{2007}$이 성립할 때, $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2007}$의 값은?

① $(-3)^{2007}+1$ ② 0 ③ $3^{2007}+1$

④ 1 ⑤ $3^{2007}+3$

해설

양변에 $x=-3$을 대입하면

$(-3)^{2007}+1=a_0+a_1+\cdots+a_{2007}$

27. 등식 $(1+2x-x^2)^{10} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{20}x^{20}$ 이 x에 대한 항등식일 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{18} + a_{20}$ 의 값은?

① -2^{10} ② -2^9 ③ 0 ④ 2^9 ⑤ 2^{10}

해설

$(1+2x-x^2)^{10} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{20}x^{20} \cdots$ ㉠

㉠은 x에 대한 항등식이므로 x에 어떤 실수 값을 대입해도 항상 성립한다.

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2^{10} = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{19} + a_{20} \cdots$ ㉡

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$(-2)^{10} = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{19} + a_{20} \cdots$ ㉢

㉡ + ㉢을 하면

$2^{10} + (-2)^{10} = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{20})$

$2 \times 2^{10} = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{20})$

$\therefore\ a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{18} + a_{20} = 2^{10}$

28. $x^{113}+1$을 x^3+x로 나누었을 때, 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라고 하자. 이때, $R(2006)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2007

해설

$$\begin{aligned} x^{113}+1 &= (x^3+x)Q(x)+R(x) \\ &= x(x^2+1)Q(x)+ax^2+bx+c \end{aligned}$$

항등식이므로 $x=0, x^2=-1$을 각각 대입하면,

$1=c,\ x+1=-a+bx+c$

$\therefore a=0,\ b=1$

$\therefore R(x)=x+1$

따라서 $R(2006)=2007$

29. x에 대한 다항식 $f(x)$를 $(x-a)(x+b)$, $(x+b)(x-c)$, $(x-c)(x-a)$로 나눈 나머지가 각각 $x+2$, $-x+4$, 0일 때, 상수 a, b, c의 곱을 구하면?

① 8　　② -8　　③ 12　　④ -12　　⑤ 16

해설

$$f(x) = (x-a)(x+b)P(x) + x + 2 \cdots ①$$
$$= (x+b)(x-c)Q(x) - x + 4 \cdots ②$$
$$= (x-c)(x-a)R(x) \cdots ③$$

나머지 정리에 의해

i) ① 에서 $f(a) = a+2$, ③ 에서

$f(a) = 0$

$\Rightarrow a = -2$

ii) ① 에서 $f(-b) = -b+2$, ② 에서

$f(-b) = b+4$

$\Rightarrow b = -1$

iii) ② 에서 $f(c) = -c+4$, ③ 에서

$f(c) = 0$

$\Rightarrow c = 4$

$\therefore abc = 8$

30. $x-1$로 나누면 나머지가 3, $x-2$로 나누면 나머지가 7, $x-3$으로 나누면 나머지가 13이 되는 가장 낮은 차수의 다항식을 $f(x)$라 할 때, $f(-3)$의 값은?

① 7　　② 10　　③ 11　　④ 12　　⑤ 13

해설

$f(x)=k(x-1)(x-2)(x-3)+ax^2+bx+c$

$f(1)=a+b+c=3 \quad \cdots\cdots ①$

$f(2)=4a+2b+c=7 \quad \cdots\cdots ②$

$f(3)=9a+3b+c=13 \quad \cdots\cdots ③$

①, ②, ③을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=1,\ c=1$

$f(x)$가 가장 낮은 차수가 되려면 $k=0$

$\therefore f(x)=x^2+x+1,$

$f(-3)=(-3)^2+(-3)+1=7$

31. 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누면 몫이 $A(x)$, 나머지가 a이고, $x+2$로 나누면 몫이 $B(x)$, 나머지가 b라고 한다. 이때, $A(x)$를 $x+2$로 나눈 나머지를 a, b로 나타내면?

① $a-b$ ② $\frac{a-b}{2}$ ③ $\frac{a-b}{3}$ ④ $\frac{a-b}{4}$ ⑤ $\frac{a-b}{5}$

해설

$f(x)=(x-1)A(x)+a \cdots$ ①

$f(x)=(x+2)B(x)+b \cdots$ ②

①, ②에 각각 $x=1, x=-2$를 대입하면

$f(1)=a, f(-2)=b$

$A(x)$를 $x+2$로 나눈 나머지는 나머지정리에 의해 $A(-2)$이다.

①에 $x=-2$를 대입하면

$f(-2)=-3A(-2)+a=b$

$\therefore A(-2)=\frac{a-b}{3}$

32. 다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지는 5이고, 몫 $Q(x)$를 다시 $x+3$으로 나누면 나머지가 3이다. 이때, $f(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지는?

① 10　② -10　③ 9　④ -9　⑤ 8

해설

나머지정리에 의해 $f(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지는 $f(-3)$이다.
$f(x)=(x-2)Q(x)+5$에서
$x=-3$을 대입하면 $f(-3)=(-3-2)Q(-3)+5$
$Q(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지가 3이므로 $Q(-3)=3$
$\therefore\ f(-3)=-10$

33. 다항식 $f(x)$에 대하여 $f(x)+2$, $xf(x)+2$가 모두 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어질 때, $f(1)$의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\begin{cases} f(x)=(x-\alpha)Q(x)-2 & \cdots ㉠ \\ xf(x)=(x-\alpha)Q'(x)-2 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠ $\times x=$ ㉡에서

$$\begin{aligned} xf(x) &= (x-\alpha)Q(x)-2x \\ &= (x-\alpha)Q(x)-2(x-\alpha)-2\alpha \\ &= (x-\alpha)\{Q(x)-2\}-2\alpha \end{aligned}$$

$\therefore\ -2\alpha=-2$

$\therefore\ \alpha=1$

$\therefore\ f(x)=(x-1)Q(x)-2$

$\therefore\ f(1)=-2$

해설

$f(x)+2$, $xf(x)+2$가 모두 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어지므로

$f(\alpha)+2=0\ \therefore\ f(\alpha)=-2\cdots$①

$\alpha f(\alpha)+2=0\cdots$②

①, ②에서 $\alpha=1$

$\therefore\ f(1)=f(\alpha)=-2(\because$ ①$)$

34. 함수 $f(x)=x^2+px+q$와 $g(x)$는 유리수를 계수로 갖는 다항식이고, $f(\sqrt{2}+1)=0,\ g(\sqrt{2}+1)=2+\sqrt{2}$이다. 이 때, $g(x)$를 $f(x)$로 나눈 나머지는?

① $x+1$　② $x-1$　③ $-x+1$

④ $-x-1$　⑤ $2x+1$

해설

$g(x)$를 $f(x)$로 나눈 몫을 $Q(x)$

나머지를 $ax+b$라 하면

$g(x)=f(x)Q(x)+ax+b$

$$g(\sqrt{2}+1)=f(\sqrt{2}+1)Q(\sqrt{2}+1)+a(\sqrt{2}+1)+b$$

$$=a(\sqrt{2}+1)+b\ (\because\ f(\sqrt{2}+1)=0)$$

$\therefore\ a+b+a\sqrt{2}=2+\sqrt{2}$

$\therefore\ a=1,\ b=1$

따라서 구하는 나머지는 $x+1$

35. 다항식 $f(x)$를 $\left(x-\frac{2}{3}\right)$로 나눌때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라고 할 때, 다음 중 $f(x)$를 $3x-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지는?

① $Q(x),\ R$ ② $3Q(x),\ R$ ③ $Q(x),\ 3R$

④ $\frac{1}{3}Q(x),\ R$ ⑤ $Q(x),\ \frac{1}{3}R$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x-\frac{2}{3}\right)Q(x)+R \\ &= 3\left(x-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}Q(x)+R \\ &= (3x-2)\frac{1}{3}Q(x)+R \end{aligned}$$

이므로 구하는 몫과 나머지는

몫 : $\frac{1}{3}Q(x)$ 나머지 : R

36. 이차식 $f(x)$를 각각 $x-3, x+1$로 나눈 나머지는 같고, $f(1)=0$일 때, $\dfrac{f(4)}{f(-4)}=\dfrac{n}{m}$ $(m,\ n$은 서로소$)$이다. 이 때, $m+n$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 34

해설

$f(1)=0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x-1$을 인수로 갖는다.

$\therefore\ f(x)=(x-1)(ax+b)$

$f(3)=f(-1)$ 이므로 $2(3a+b)=-2(-a+b)$

$\therefore\ a=-b$

$$\frac{f(4)}{f(-4)}=\frac{3(4a+b)}{-5(-4a+b)}=\frac{-9b}{-25b}=\frac{9}{25}$$

$\therefore\ m=25,\ n=9$

37. $f(x) = 3x^3 - x + 2$ 일 때, $f(x+1) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$이다. 이때, $A + B + C + D$의 값을 구하면 ?

① 4 ② 14 ③ 24 ④ 34 ⑤ 44

해설

$f(x+1) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ 에 $x = 1$ 을 대입하면

$f(2) = A + B + C + D$ 이므로

$f(2)$를 구하기 위해서는

$f(x) = 3x^3 - x + 2$ 에 $x = 2$ 를 대입하면

$f(2) = 3 \times 2^3 - 2 + 2 = 24$

해설

$x + 1 = t$ 라 하면,

$f(t) = A(t-1)^3 + B(t-1)^2 + C(t-1) + D$

$$\begin{array}{r|rrrr}
1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\
 & & 3 & 3 & 2 \\
\hline
1 & 3 & 3 & 2 & \boxed{4} \\
 & & 3 & 6 & \\
\hline
1 & 3 & 6 & \boxed{8} & \\
 & & 3 & & \\
\hline
 & 3 & \boxed{9} & & \\
\end{array}$$

$\therefore\ A = 3,\ B = 9,\ C = 8,\ D = 4$

$\therefore\ A + B + C + D = 24$

38. 다음 식의 분모를 0으로 만들지 않는 모든 실수 x에 대하여

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)\times\cdots\times(x-2007)}$$
$$=\frac{a_1}{x-1}+\frac{a_2}{x-2}+\cdots+\frac{a_{2007}}{x-2007}$$

이 성립할 때, $a_1+a_2+\cdots+a_{2007}$의 값을 구하면?

① 1 ② -1 ③ 1997

④ 0 ⑤ -1997

해설

우변을 통분하면

$$\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_{2007})x^{2006}+\cdots}{(x-1)(x-2)\times\cdots\times(x-2007)}$$
$$=\frac{1}{(x-1)(x-2)\times\cdots\times(x-2007)}$$

주어진 등식은 항등식이므로 분자의 계수를 비교하면

$a_1+a_2+\cdots+a_{2007}=0$

39. 모든 x에 대하여 $f(x+1)-f(x-1)=6x^2+6$, $f(0)=1$을 만족시키는 다항식 $f(x)$가 있다. 다음은 자연수 n에 대하여 $(x+\alpha)^n = x^n + n\alpha x^{n-1} + \cdots + \alpha^n$을 이용하여, $f(x)$를 구하는 과정이다.

> $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$(단, $a_n \neq 0$)라고 놓으면
> $f(x+1)-f(x-1)$
> $= a_n\{(x+1)^n-(x-1)^n\} + a_{n-1}\{(x+1)^{n-1}-(x-1)^{n-1}\} + \cdots + a_1\{(x+1)-(x-1)\}$
> $= \boxed{}\,x^{n-1} + \cdots = 6x^2+6$
> 에서 $n=3$, $a_n=1$
> $\therefore\ f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + 1$
> $f(x+1)-f(x-1) = 6x^2 + 4a_2x + 2 + 2a_1$
> 이므로 $a_2=0$, $a_1=2$ 즉, $f(x) = x^3+2x+1$

위의 풀이 과정에서 $\boxed{}$에 알맞은 것은?

① a_n ② $2a_n$ ③ na_n ④ $2na_n$ ⑤ $3na_n$

해설

$f(x+1)-f(x-1)$
$= a_n\{(x+1)^n-(x-1)^n\} + a_{n-1}\{(x+1)^{n-1}-(x-1)^{n-1}\}\cdots$
$= a_n\{(x^n+nx^{n-1}+\cdots)-(x^n-nx^{n-1}+\cdots)\} + a_{n-1}\{(x^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\cdots)-(x^{n-1}-(n-1)x^{n-2}+\cdots)\} + \cdots$
$= a_n(2nx^{n-1}+\cdots) + a_{n-1}\{2(n-1)x^{n-2}+\cdots\} + \cdots$
$= 2na_nx^{n-1} + \{(n-2)$차 이하의 다항식$\}$
$\therefore\ 2na_nx^{n-1} = 6x^2$ 에서
$n-1=2$, $2na_n=6$
$\therefore\ n=3$, $a_n=1$

40. 임의의 실수 x, y에 대해서

$$y^{12}+1 = x_0 + x_1(y-1) + x_2(y-1)^2 + x_3(y-1)^3 + \cdots + x_{12}(y-1)^{12}$$

이 성립할 때, $x_1 + x_3 + x_5 + x_7 + x_9 + x_{11}$ 의 값은?

① 2^{11} ② 2^{12} ③ 2^{13} ④ 3^{11} ⑤ 3^{12}

해설

$y=2$ 대입 : $2^{12}+1 = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{12}$

$y=0$ 대입 : $1 = x_0 - x_1 + x_2 - \cdots + x_{12}$

각변끼리 빼주면

$2^{12} = 2(x_1 + x_3 + x_5 + \cdots + x_{11})$이므로

$x_1 + x_3 + x_5 + \cdots + x_{11} = 2^{12-1} = 2^{11}$

41. 두 다항식 $f(x), g(x)$에 대하여 $2f(x)-g(x)$를 x^2+1로 나눈 나머지 $R(x)$는 $g(x)$를 x^2+1로 나눈 나머지와 같다. $f(x)$를 x^2+1로 나눈 나머지가 $2x+4$일 때, $R(10)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

$2f(x)-g(x)=(x^2+1)A(x)+R(x)$

$g(x)=(x^2+1)B(x)+R(x)$라 둘 수 있다.

따라서 $2f(x)=g(x)+(x^2+1)A(x)+R(x)$

$=(x^2+1)B(x)+R(x)+(x^2+1)A(x)+R(x)$

$=(x^2+1)\left\{A(x)+B(x)\right\}+2R(x)$

즉, $f(x)=(x^2+1)\frac{1}{2}\left\{A(x)+B(x)\right\}+R(x)$

$\therefore\ R(x)=2x+4$이고 $R(10)=24$

42. x에 대한 다항식 $(1+x-x^2)^{10}$을 전개하면 $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{20}x^{20}$이 될 때, $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{20}$의 값은? (단, a_i는 상수이고 $i=0,\ 1,\ 2,\cdots,20$)

① 2^{10} ② $2^{10}-1$ ③ 2

④ 1 ⑤ 0

해설

$(1+x-x^2)^{10}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{20}x^{20}$이므로

$x=1$을 대입하면

$1=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{19}+a_{20}\cdots$ ㉠

또, 이 식에 $x=-1$을 대입하면

$1=a_0-a_1+a_2-\cdots-a_{19}+a_{20}\cdots$ ㉡

㉠ + ㉡을 하면 $2=2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{20})$

$\therefore\ a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{20}=1$

43. x^{100} 을 $x+2$ 로 나눈 몫을 $a_{0+}a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{99}x^{99}$ 라 할 때, $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{99}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{5}(1-2^{100})$ ② $\frac{1}{6}(1-2^{100})$ ③ $\frac{1}{4}(1-2^{100})$

④ $\frac{1}{3}(1-2^{100})$ ⑤ 1

해설

(i) $f(x)=x^{100}=(x+2)Q(x)+R$ 라 하면

$f(-2)=2^{100}=R$

$\therefore\ R=2^{100}$

$f(1)=3Q(1)+R$

$\therefore\ Q(1)=\frac{1}{3}(1-R)=\frac{1}{3}(1-2^{100})$

(ii) $Q(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{99}x^{99}$

$\therefore\ Q(1)=a_0+a_1+\cdots+a_{99}$

$\therefore\ a_0+a_1+\cdots+a_{99}=Q(1)=\frac{1}{3}(1-2^{100})$

44. x에 대한 항등식 $x^{1997}+x+1$을 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 할 때, $Q(x)$의 모든 계수와 상수항의 합을 구하면?

① 997 ② 998 ③ 1997 ④ $\frac{1997}{2}$ ⑤ $\frac{1997}{3}$

해설

$x^{1997}+x+1=(x^2-1)Q(x)+ax+b$라 하면

$x=1$일 때, $3=a+b$

$x=-1$일 때, $-1=-a+b$

$\therefore\ a=2,\ b=1$

$\therefore\ x^{1997}+x+1=(x^2-1)Q(x)+2x+1$

$x^{1997}-x=(x^2-1)Q(x)$

$x(x-1)(x^{1995}+x^{1994}+\cdots+x+1)$

$=(x-1)(x+1)Q(x)$

$\therefore\ x(x^{1995}+x^{1994}+\cdots+x+1)=(x+1)Q(x)$

$Q(1)$이 $Q(x)$의 모든 계수의 합이므로 $x=1$을 대입하면

$2Q(1)=1996 \quad \therefore\ Q(1)=\frac{1996}{2}=998$

45. 다항식 x^3-2x^2+mx-4를 $x-1$로 나눈 몫이 $Q(x)$이고 몫 $Q(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지가 -5이다. 이때, m의 값을 구하면?

① 6 ② 4 ③ 0 ④ -1 ⑤ -6

해설

$x^3-2x^2+mx-4=(x-1)Q(x)+R$이라 하자.

$x=1$을 대입하면 $R=m-5$

$x^3-2x^2+mx-4=(x-1)Q(x)+m-5\cdots$①

$Q(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지가 -5이므로

$Q(-1)=-5$

①식에 $x=-1$을 대입하면

$-1-2-m-4=-2Q(-1)+m-5$

$-2m=12$

$\therefore\ m=-6$

해설

조립제법을 사용하면

$$
\begin{array}{r|rrr|r}
1 & 1 & -2 & m & -4 \\
 & & 1 & -1 & m-1 \\
\hline
-1 & 1 & -1 & m-1 & m-5 \\
 & & -1 & 2 & \\
\hline
 & 1 & -2 & m+1 &
\end{array}
$$

$m+1=-5\ \therefore\ m=-6$

46. x에 대한 다항식 $f(x)$를 $2x-1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 -2이다. 다항식 $xf(x)$를 $x-\frac{1}{2}$로 나눈 몫과 나머지를 차례로 적은 것은?

① $2xQ(x)-2,\ -1$
② $2xQ(x)-1,\ -1$
③ $\frac{1}{2}xQ(x)-2,\ 1$
④ $\frac{1}{2}xQ(x)-1,\ 1$
⑤ $\frac{1}{2}xQ(x)+1,\ 2$

해설

$$f(x)=(2x-1)Q(x)-2$$
$$=\left(x-\frac{1}{2}\right)2Q(x)-2$$
$$xf(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)2xQ(x)-2x$$
$$=\left(x-\frac{1}{2}\right)2xQ(x)-2\left(x-\frac{1}{2}\right)-1$$
$$=\left(x-\frac{1}{2}\right)\{2xQ(x)-2\}-1$$

47. 다항식 $f(x)$는 $(x+2)^2$으로 나누어떨어지고 $x+4$로 나누면 3이 남는다. $f(x)$를 $(x+2)^2(x+4)$로 나눌 때, 나머지를 구하면?

① $\frac{3}{4}(x+2)^2$ ② $\frac{3}{2}(x+2)^2$ ③ $3(x+2)^2$

④ $(x+2)(x+4)$ ⑤ $3x^2+4x+3$

해설

$f(x)=(x+2)^2(x+4)Q(x)+ax^2+bx+c$라 놓으면 $f(x)$는 $(x+2)^2$으로 나누어떨어지므로

$ax^2+bx+c=a(x+2)^2$

$\therefore\ f(x)=(x+2)^2(x+4)Q(x)+a(x+2)^2$

또 $f(x)$를 $(x+4)$로 나눌 때 나머지가 3이므로 $f(-4)=3$

$\therefore\ 4a=3,\ a=\frac{3}{4}$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $\frac{3}{4}(x+2)^2$

48. 다항식 $f(x)$는 다항식 $g(x)$로 나누어떨어진다. $f(x)$를 $g(x)$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하고, $Q(x)$를 $g(x)$로 나눈 몫과 나머지를 각각 $h(x), r(x)$라고 할 때, $f(x)$를 $\{g(x)\}^2$으로 나눈 몫과 나머지는?

① 몫 $Q(x)$, 나머지 $r(x)$

② 몫 $h(x)$, 나머지 $g(x)r(x)$

③ 몫 $Q(x)h(x)$, 나머지 $h(x)r(x)$

④ 몫 $h(x)$, 나머지 $r(x)$

⑤ 몫 $g(x)h(x)$, 나머지 $g(x)r(x)$

해설

$f(x) = g(x)Q(x) \cdots ㉠$
$Q(x) = g(x)h(x) + r(x) \cdots ㉡$
㉡을 ㉠에 대입하면
$f(x) = \{g(x)\}^2 h(x) + g(x)r(x)$

$r(x)$가 $g(x)$보다 낮은 차수이므로 $g(x)r(x)$는 $\{g(x)\}^2$보다 낮은 차수이다.
따라서, 나머지는 $g(x)r(x)$이고 몫은 $h(x)$이다.

49. x^3 의 계수가 1 인 삼차다항식 $f(x)$ 에 대하여 $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 3$ 이 성립한다. 이 때, $f(x)$ 를 $x - 4$ 로 나눈 나머지는?

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

$f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3$ 에서 $f(x) = x$
즉, $f(x) - x$ 는 $x - 1, x - 2, x - 3$ 을 인수로 한다.
$f(x) - x = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$
$\therefore f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3) + x,\ f(4) = 10$

해설

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 라 하면
(i) $f(1) = 1 \Rightarrow a + b + c + 1 = 1$
(ii) $f(2) = 2 \Rightarrow 4a + 2b + c + 8 = 2$
(iii) $f(3) = 3 \Rightarrow 9a + 3b + c + 2n = 3$
위의 세식을 연립하여 풀면,
$a = -6, b = 12, c = -6$
$\Rightarrow f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 6$
$\therefore f(4) = 4^3 - 6 \times 4^2 + 12 \times 4 - 6 = 10$

50. $(x-2)^4 = a(x-3)^4 + b(x-3)^3 + c(x-3)^2 + d(x-3) + e$ 가 x 에 대한 항등식일 때, $2c - bd$ 의 값은?

① -8 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 8

해설

x 에 대한 항등식 이므로 x 에 대한 적당한 수를 넣어 식을 만든다.

i) $x = 3 \Rightarrow e = 1$

ii) $x = 2 \Rightarrow a - b + c - d + 1 = 0$

iii) $x = 4 \Rightarrow a + b + c + d + 1 = 16$

iv) $x = 4 \Rightarrow 16a - 8b + 4c - 2d + 1 = 1$

v) $x = 5 \Rightarrow 16a + 8b + 4c - 2d + 1 = 1$

위 5개의 식을 연립하여 a, b, c, d 의 값을 구한다.

$a = 1,\ b = 4,\ c = 6,\ d = 4,\ e = 1$

$\therefore 2c - bd = -4$

해설

$x - 2 = t$ 라 하면 $x - 3 = t - 1$

(준식) : $t^4 = a(t-1)^4 + b(t-1)^3 + c(t-1)^2 + d(t-1) + e$

다음처럼 조립제법으로 $t-1$ 로 계속 나눌 때, 나오는 나머지가 순서대로 e, d, c, b 이고 마지막 몫이 a 이다.

$$\begin{array}{r|rrrrl}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \boxed{1} = e \\
 & & 1 & 2 & 3 & \\
\hline
1 & 1 & 2 & 3 & \boxed{4} = d & \\
 & & 1 & 3 & & \\
\hline
1 & 1 & 3 & \boxed{6} = c & & \\
 & & 1 & & & \\
\hline
a = & 1 & \boxed{4} = b & & &
\end{array}$$

$\therefore 2c - bd = -4$