1. $f(x)=x^3-3x^2+3x+1$일 때, $f(x)-2=x(x^2-1)+a(x-x^2)+b(x^2-1)$가 항상 성립하도록 하는 상수 $a,\ b$에 대하여 $a+b$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$f(x)-2=x^3-3x^2+3x-1$이므로
$x^3-3x^2+3x-1=x(x^2-1)+a(x-x^2)+b(x^2-1)$
$=x^3+(-a+b)x^2+(a-1)x-b\cdots$ ㉠
㉠이 x에 대한 항등식이므로 양변의 차수가 같은 항의 계수가 같아야 한다.
즉, $-a+b=-3,\ a-1=3,\ b=1$
이므로 $a=4,\ b=1$
$\therefore\ a+b=5$

2. 등식 $x^2-2x+3=a+b(x-1)+c(x-1)^2$ 이 x에 관한 항등식일 때, $a^2+b^2+c^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x^2-2x+3=a+b(x-1)+c(x-1)^2$

$x=1$을 대입하면 $2=a$ ······①

$x=0$을 대입하면 $3=a-b+c$ ······②

$x=2$를 대입하면 $3=a+b+c$ ······③

①을 ②, ③에 대입하여 정리하면

$b-c=-1,\ b+c=1$

두 식을 연립하면 $b=0,\ c=1$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2=4+0+1=5$

3. 등식 $2x^2-3x-2=a(x-1)(x-2)+bx(x-2)+cx(x-1)$ 이 x에 관한 항등식이 되도록 할 때, $2ab$ 의 값은?

① -6　② -4　③ -2　④ 2　⑤ 4

해설

양변에 $x=0$을 대입하면, $-2=2a$ $\quad \therefore\ a=-1$
양변에 $x=1$을 대입하면, $-3=-b$ $\quad \therefore\ b=3$
$\therefore\ 2ab=-6$

4. 다음 등식이 x 에 대한 항등식일 때, $a-b+c$ 의 값은?

$$x^2-2x+4=a(x-1)(x-2)+bx(x-2)+cx(x-1)$$

① 8 ② 7 ③ 3 ④ 0 ⑤ -3

해설

주어진 등식이 x 에 대한 항등식이므로 x 에 어떤 값을 대입하여도 성립한다.

$x=0$ 을 대입하면

$4=2a \quad \therefore a=2$

$x=1$ 을 대입하면

$3=-b \quad \therefore b=-3$

$x=2$ 을 대입하면

$4=2c \quad \therefore c=2$

$\therefore a-b+c=2-(-3)+2=7$

5. 다항식 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 6$을 $x - 2$, $x - 1$로 나누었을 때의 나머지를 각각 a, b라 할 때, $a + b$의 값은?

① -8　② -2　③ -16　④ 4　⑤ 2

해설

$f(x) = (x-2)Q(x) + a$

$f(x) = (x-1)Q'(x) + b$

$f(2) = 4 = a,\ f(1) = -2 = b$

$\therefore a + b = 2$

6. x^3+ax^2+bx-4는 $x-2$로 나누어 떨어지고 $x+1$로 나누면 나머지가 6이다. $a-b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 4$라 하면
$f(2) = 4a + 2b + 4 = 0 \cdots\cdots$ ㉠
$f(-1) = a - b - 5 = 6 \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $a = 3$, $b = -8$
$\therefore\ a - b = 11$

7. x에 관한 삼차식 x^3+mx^2+nx+1을 $x+1$로 나누면 나머지가 5이고, $x-2$로 나누면 나머지가 3이다. 이 때, 상수 $m-n$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

나머지 정리를 이용한다.
주어진 식에 $x=-1$, $x=2$를 각각 대입하면,
$(-1)^3+m(-1)^2+n(-1)+1=5\cdots$ ㉠
$(2)^3+m(2)^2+n\cdot 2+1=3\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하면,
$m=\frac{2}{3}$, $n=-\frac{13}{3}$
$\therefore\ m-n=5$

8. x^3-2x^2+a 가 $x+3$ 로 나누어 떨어지도록 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 45$

해설

$f(-3) = (-3)^3 - 2(-3)^2 + a = a - 45 = 0$

$\therefore\ a = 45$

9. x^3 의 항의 계수가 1 인 삼차 다항식 $P(x)$ 가 $P(1) = P(2) = P(3) = 0$ 을 만족할 때, $P(4)$ 의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

인수정리에 의해
$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$
$P(4) = 3 \times 2 \times 1 = 6$

10. x 에 대한 다항식 $4x^3-3x^2+ax+b$ 가 $(x+1)(x-3)$ 을 인수로 갖도록 $a+b$ 의 값을 정하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -37

해설

$P(x)=4x^3-3x^2+ax+b$ 라 하고 $P(x)$ 가 $(x+1)(x-3)$ 을 인수로 가지려면

$P(-1)=P(3)=0$

$P(-1)=-4-3-a+b=0 \quad \therefore \ a-b=-7$

$P(3)=108-27+3a+b=0 \quad \therefore \ 3a+b=-81$

$\therefore \ a=-22, \ b=-15$

11. 등식 $x^3 + x - 1 = (x-a)(x-b)(x-c)$가 항등식일 때, $a^3 + b^3 + c^3$의 값을 구하면?

① 2　② 5　③ 3　④ 7　⑤ -7

해설

$x^3 + x - 1$
$= (x-a)(x-b)(x-c)$
$= x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$
$\therefore a+b+c = 0,\ ab+bc+ca = 1,\ abc = 1$
$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$
$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
$\therefore a^3 + b^3 + c^3 = 3$

12. $\dfrac{2x+ay-b}{x-y-1}$가 $x-y-1 \neq 0$인 어떤 x, y의 값에 대하여도 항상 일정한 값을 가질 때, $a-b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

$\dfrac{2x+ay-b}{x-y-1}=k$라 놓으면

$2x+ay-b=k(x-y-1)$

x, y에 대하여 정리하면,

$(2-k)x+(a+k)y-b+k=0$

위의 식이 x, y에 대한 항등식이어야 하므로

$2-k=0,\ a+k=0,\ -b+k=0$

$\therefore\ k=2,\ a=-2,\ b=2$

$\therefore\ a-b=-4$

13. 세 실수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $(a,\ b,\ c) = ab + bc$로 정의한다. 이때, 등식 $(x,\ a,\ y) - (2x,\ b,\ y) = (x,\ 2,\ y)$이 임의의 실수 $x,\ y$에 대하여 성립하도록 $a,\ b$의 값을 정하면?

① $a = 1,\ b = 2$ ② $a = 2,\ b = 2$ ③ $a = 2,\ b = 0$

④ $a = 0,\ b = 2$ ⑤ $a = 0,\ b = 0$

해설

기호의 정의에 따라서 주어진 식을 다시 쓰면

$(ax + ay) - (2bx + by) = 2x + 2y$

이 식을 $x,\ y$에 대하여 정리하면

$(a - 2b - 2)x + (a - b - 2)y = 0$

이 등식이 임의의 $x,\ y$에 대하여 성립하므로

$a - 2b - 2 = 0,\ a - b - 2 = 0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a = 2,\ b = 0$

14. x의 다항식 x^3+ax+b를 x^2-3x+2로 나눌 때, 나머지가 $2x+1$이 되도록 상수 a, b의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

x^3+ax+b를 x^2-3x+2로 나눌 때,
몫을 $x+q$라 하면 (일반적으로 $px+q$로 해야겠지만 x^3의 계수가 1이므로 $x+q$)
$x^3+ax+b=(x^2-3x+2)(x+q)+2x+1$
$\therefore\ x^3+ax+b=(x-2)(x-1)(x+q)+2x+1$
이 등식은 x에 관한 항등식이므로
$x=1$을 대입하면 $1+a+b=2+1\cdots$ ㉠
$x=2$를 대입하면 $8+2a+b=4+1\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $a=-5$, $b=7$
$\therefore\ a+b=2$

15. 다항식 $x^3 - 4x^2 + ax + b$가 $x^2 + 2$로 나누어 떨어질 때, $3a + b$의 값은?

① -1　　② -2　　③ -3　　④ -4　　⑤ -5

해설

$f(x) = x^3 - 4x^2 + ax + b$

$\quad = (x^2 + 2)(x - \alpha)$ 라 놓을 수 있다.

$x^3 - \alpha x^2 + 2x - 2\alpha = x^3 - 4x^2 + ax + b$

$\therefore\ \alpha = 4,\quad a = 2,\quad b = -8$

$\therefore\ 3a + b = -2$

16. x에 대한 삼차식 x^3+ax^2+bx+3이 x^2+1로 나누어떨어질 때, 상수 $a,\ b$의 값을 정하면?

① $a=-1,\ b=3$

② $a=1,\ b=3$

③ $a=3,\ b=-1$

④ $a=-3,\ b=-1$

⑤ $a=3,\ b=1$

해설

$$\begin{aligned} x^3+ax^2+bx+3 &= (x^2+1)(x+c) \\ &= x^3+cx^2+x+c \end{aligned}$$

$\therefore\ a=c,\ b=1,\ c=3$

$\therefore\ a=3,\ b=1$

17. 임의의 실수 x 대하여 $(1+2x-x^2)^{10}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_{20}x^{20}$ 이 항상 성립할 때, $2a_0+a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{20}$ 의 값은?

① 1023 ② 1024 ③ 1025 ④ 2046 ⑤ 2050

해설

$x=0$ 대입, $a_0=1$

$x=1$ 대입, $2^{10}=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{20}$

$2a_0+a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{20}=1+1024=1025$

18. x에 대한 다항식 x^3+kx^2+kx-1을 $x-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 $Q_1(x)$, R_1, $x+2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 $Q_2(x)$, R_2라 할 때, $R_1=R_2$를 만족하는 실수 k의 값을 구하면?

① -4　② -2　③ 0　④ 2　⑤ 4

해설

$$\begin{aligned} x^3+kx^2+kx-1 &= (x-2)Q_1(x)+R_1 \\ &= (x+2)Q_2(x)+R_2 \end{aligned}$$

$x=2$ 대입, $R_1=8+4k+2k-1=6k+7$

$x=-2$ 대입, $R_2=-8+4k-2k-1=2k-9$

$R_1=R_2$이므로 $6k+7=2k-9$

$\therefore\ k=-4$

19. 다항식 $f(x)$에 대하여, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3$, $f\left(\frac{1}{3}\right) = 1$일 때, $f(x)$를 $(2x-1)(3x-1)$로 나눈 나머지를 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: $12x-3$

해설

구하는 나머지를 $ax+b$라 하면

$f(x) = (2x-1)(3x-1)Q(x) + ax + b$

$x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{3}$을 각각 양변에 대입하면

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}a + b = 3$, $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}a + b = 1$

두 식을 연립하여 풀면 $\frac{1}{6}a = 2 \Rightarrow a = 12, b = -3$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $12x-3$

20. 다항식 $f(x)$를 $x-1$, $x-2$로 나눈 나머지가 각각 1, 2일 때, $f(x)$를 x^2-3x+2로 나눈 나머지를 구하면?

① $x-1$ ② $x+1$ ③ $-x+1$

④ x ⑤ $-x$

해설

$f(x)=(x-1)Q_1(x)+1 \quad \Rightarrow \quad f(1)=1$

$f(x)=(x-2)Q_2(x)+2 \quad \Rightarrow \quad f(2)=2$

$f(x)=(x-1)(x-2)Q_3(x)+ax+b$라 하면,

$f(1)=a+b=1$, $f(2)=2a+b=2$이다.

$\therefore$ $a=1$, $b=0$이므로 나머지는 x

21. 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나눌 때의 나머지가 3이고, $x-2$로 나누어서 떨어진다. 이 다항식을 $(x+1)(x-2)$로 나눌 때의 나머지를 구하면?

① $2x+1$ ② $-x+2$ ③ $x-1$
④ 2 ⑤ 3

해설

$R(x)=ax+b$라 두면
$R(-1)=-a+b=3,\ R(2)=2a+b=0$
$a=-1,\ b=2$이므로 $R(x)=-x+2$

22. x의 다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나누면 -3이 남고, $x+3$으로 나누면 27이 남는다. 이 $f(x)$를 $(x-2)(x+3)$으로 나눌 때, 그 나머지는?

① $6x-9$　　② $-6x+9$　　③ $2x+3$

④ $-2x-3$　　⑤ $2x-3$

해설

$f(x)$를 $(x-2)(x+3)$으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$라 하면

$f(x)=(x-2)(x+3)Q(x)+ax+b$

문제의 조건으로부터

$f(2)=-3,\ f(-3)=27$이므로

$2a+b=-3,\ \ -3a+b=27$

$\therefore\ a=-6,\ b=9$

따라서 구하는 나머지는 $-6x+9$이다.

23. $f(x)$를 $x-1,\ x-2$로 나눈 나머지가 각각 $3,\ 5$일 때, $f(x)$를 x^2-3x+2로 나눈 나머지를 구하면?

① $2x+1$　　② $2x+3$　　③ $2x-1$

④ $2x$　　⑤ $2x-3$

해설

x^2-3x+2로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$라 하면 $f(x)=(x^2-3x+2)Q(x)+ax+b$

그런데 $f(1)=3,\ f(2)=5$이므로

$a+b=3,\ 2a+b=5$

$\therefore\ a=2,\ b=1$

따라서, 구하는 나머지는 $2x+1$

24. 다항식 $f(x)$, $g(x)$에서 $f(x)$를 x^2-1로 나눈 나머지가 2이고 $g(x)$를 x^2-3x+2로 나눈 나머지가 $2x+1$이다. $2f(x)+3g(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는?

① 13 ② -13 ③ 16 ④ -16 ⑤ 26

해설

$f(x)=(x^2-1)Q_1(x)+2$,
$\therefore\ f(1)=2$
$g(x)=(x^2-3x+2)Q_2(x)+2x+1$,
$\therefore\ g(1)=3$
$2f(x)+3g(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는
$2f(1)+3g(1)=2\cdot 2+3\cdot 3=13$

25. 다항식 $2x^3 + 3x^2 + ax + b$가 $x + 2$로 나누어 떨어질 때, $2a - b$의 값은?

① 28　② 12　③ 6　④ -4　⑤ -12

해설

준식을 $f(x)$라 하면 $f(-2) = 0$이므로
$-16 + 12 - 2a + b = 0$에서 $2a - b = -4$

26. x에 대한 다항식 x^3+ax^2-x+b를 $x-1$로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

$$\begin{array}{r|rrrr} k & 1 & a & -1 & b \\ & & c & d & a \\ \hline & 1 & 4 & 3 & \boxed{5} \end{array}$$

① $a=3$　② $b=2$　③ $c=1$

④ $d=4$　⑤ $k=-1$

해설

다항식 x^3+ax^2-x+b를 $x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & a & -1 & b \\ & & 1 & a+1 & a \\ \hline & 1 & a+1 & a & \boxed{b+a} \end{array}$$

$k=1,\ a=3,\ b=2,\ c=1,\ d=4$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

27. 임의의 실수 x에 대하여 $2x^3-5x+2=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$ 가 성립할 때, $a^2-b^2+c^2-d^2$ 의 값을 구하면?

① 56 ② 28 ③ −28 ④ −46 ⑤ −56

해설

a, b, c, d 는 $2x^2-5x+2$ 를 $(x+1)$ 로 계속 나눠 줄때 나오는 나머지이다.
조립제법을 이용해 보면

−1	2	0	−5	2	
		−2	2	3	
−1	2	−2	−3	5	← d
		−2	4		
−1	2	−4	1	← c	
		−2			
−1	2	−6	← b		
	↑				
	a				

$\therefore a^2-b^2+c^2-d^2=2^2-(-6)^2+1^2-5^2=-56$

28. 2가 아닌 모든 실수 x에 대하여 $\dfrac{ax^2+4x+b}{x-2}$의 값이 항상 일정하도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a-b$의 값은?

① 5　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 9

해설

$\dfrac{ax^2+4x+b}{x-2}=k$라 하면

$ax^2+4x+b=k(x-2)$

$ax^2+(4-k)x+b+2k=0$

x에 대한 항등식이므로

$a=0$

$4-k=0$에서 $k=4$

$b+2k=0$에서 $b=-8$

$\therefore\ a-b=8$

해설

주어진 식이 모든 x에 대해 일정한 값을 가지려면
분자인 ax^2+4x+b가 분모인 '$x-2$' 만을 인수로 가져야 한다.
즉, 분자가 $k(x-2)$가 되어야 한다.

$\dfrac{ax^2+4x+b}{x-2}=\dfrac{4(x-2)}{x-2}=4$

$\therefore a=0,\ b=-8$에서 $a-b=8$

29. 다음 등식이 x에 대한 항등식일 때, 상수a, b, c, d에 대하여 $a+b+c+d$의 값을 구하면? (단, $a < c$)

$$(x-a)^2(bx-x^2-1)=(x-c)^2(dx-x^2-1)$$

① -4　② 4　③ 5　④ -5　⑤ 0

해설

$a < c$에서 $a \neq c$이므로 주어진 등식에서

$x^2-bx+1=(x-c)^2 \quad \therefore\ b=2c,\ 1=c^2$

$x^2-dx+1=(x-a)^2 \quad \therefore\ d=2a,\ 1=a^2$

$\therefore\ a=-1,\ b=2,\ c=1,\ d=-2$

$\therefore\ a+b+c+d=0$

30. 1985년부터 1995년까지 5년 간격으로 조사한 우리나라의 농가인구 비율 P는 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

연도	85	90	95
인구비율(%)	20.9	15.5	10.8
인구(1000명)	8521	6661	4851

$P = 0.35t^2 - 5.75t + 20.9$

이 때, $t = 0$은 1985년을 나타낸다. 이 식을 $t = 0$이 1990년을 나타내도록 변형하면?

① $P = 0.35t^2 - 5.75t + 20.9$

② $P = 0.35(t+1)^2 - 5.75(t+1) + 20.9$

③ $P = 0.35(t-1)^2 - 5.75(t-1) + 20.9$

④ $P = 0.35(t+2)^2 - 5.75(t+2) + 20.9$

⑤ $P = 0.35(t-2)^2 - 5.75(t-2) + 20.9$

해설

$P_1(t) = 0.35t^2 - 5.75t + 20.9$일 때,
$t = 0 \rightarrow 1985$년, $t = 1 \rightarrow 1990$년, $t = 2 \rightarrow 1995$년
$P_2(t) = 0.35(t+1)^2 - 5.75(t+1) + 20.9$이면,
$P_2(0) = P_1(1)$이므로 $P_2(t)$에서
$t = 0 \rightarrow 1990$년임을 알 수 있다.

31. $y = kx^2 + (1-2k)x + k - 1$ 의 그래프는 k 에 관계없이 항상 한 정점 A 를 지난다. B 의 좌표를 $\mathrm{B}(b, 1)$ 라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 길이가 $\sqrt{2}$ 가 되도록 하는 b 의 값들의 합을 구하면?

① 1　　② 2　　③ -2　　④ -3　　⑤ -1

해설

(ⅰ) 준식을 k 에 관하여 정리하면
$(x^2 - 2x + 1)k + (x - y - 1) = 0$
이 식이 k 의 값에 관계없이 성립할 조건은
$x^2 - 2x + 1 = 0,\ x - y - 1 = 0$
$\therefore\ x = 1,\ y = 0$
$\therefore\ A(1, 0)$

(ⅱ) $\mathrm{A}(1, 0), \mathrm{B}(b, 1)$ 에서
$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{2}$ 이므로
$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(b-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$
$b^2 - 2b = 0, \quad b(b-2) = 0 \quad \therefore\ b = 0,\ 2$
$\therefore\ b$ 의 값들의 합은 2

32. $x+y+2z=1,\ 2x-y+z=5$를 만족하는 모든 실수 x, y, z에 대하여 $ax^2+by^2+cz^2=6$이 성립할 때, $3a+2b+c$의 값은 얼마인가?

① 12 ② 8 ③ 4 ④ 0 ⑤ −2

해설

$x+y+2z=1 \cdots ①$

$2x-y+z=5 \cdots ②$

① + ②: $x+z=2 \Rightarrow z=2-x$

② ×2−① : $x-y=3 \Rightarrow y=x-3$

$\therefore ax^2+by^2+cz^2=6$

$\Rightarrow ax^2+b(x-3)^2+c(2-x)^2$

$=(a+b+c)x^2-(4c+6b)x+9b+4c=6$

모든 실수 x, y, z에 대해 성립하려면

$a+b+c=0,\ 4c+6b=0,\ 9b+4c=6$

위의 식을 연립하여 풀면, $a=1,\ b=2,\ c=-3$

$\therefore\ 3a+2b+c=4$

33. 등식 $(1+x+x^2)^3 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_8x^8$ 이 x에 대한 항등식일 때, $a_1 + a_3 + a_5 + a_7$ 의 값은?

① 28 ② 26 ③ 15 ④ 14 ⑤ 13

해설

양변에 $x = 1$을 대입하면
$3^3 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_8$ – ㉠
양변에 $x = -1$을 대입하면
$1^3 = a_0 - a_1 + a_2 + \cdots + a_8$ – ㉡
㉠ – ㉡ : $26 = 2\,(a_1 + a_3 + a_5 + a_7)$
$\therefore a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = 13$

34. 등식 $(1+2x-x^2)^{10} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{20}x^{20}$ 이 x에 대한 항등식일 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{18} + a_{20}$ 의 값은?

① -2^{10} ② -2^9 ③ 0 ④ 2^9 ⑤ 2^{10}

해설

$(1+2x-x^2)^{10} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{20}x^{20} \cdots$ ㉠

㉠은 x에 대한 항등식이므로 x에 어떤 실수 값을 대입해도 항상 성립한다.

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2^{10} = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{19} + a_{20} \cdots$ ㉡

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$(-2)^{10} = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{19} + a_{20} \cdots$ ㉢

㉡ + ㉢을 하면

$2^{10} + (-2)^{10} = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{20})$

$2 \times 2^{10} = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{20})$

$\therefore\ a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{18} + a_{20} = 2^{10}$

35. x에 관한 3차 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 2, $x+1$로 나눈 나머지가 4라고 한다. $f(x)$에서 x^2의 계수를 a, 상수항을 b라 하면 $a+b$의 값은?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

$f(x)=px^3+ax^2+qx+b$라 하면
$f(1)=2,\ f(-1)=4$에서
$p+a+q+b=2\cdots$㉠
$-p+a-q+b=4\cdots$㉡
㉠ + ㉡를 하면
$2(a+b)=6,\ a+b=3$

36. x에 대한 다항식 $f(x)$를 x^2-4x+3으로 나누었을 때의 나머지는 $2x-7$이고, $x^2-3x-10$으로 나누었을 때의 나머지는 11이다. 이 다항식 $f(x)$를 x^2-6x+5로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① $2x+1$　② $4x+3$　③ $x-1$

④ $4x-9$　⑤ $2x-3$

해설

$f(x)$를 x^2-6x+5로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-6x+5)Q(x)+ax+b \\ &= (x-1)(x-5)Q(x)+ax+b \cdots ㉠ \end{aligned}$$

$f(x)$를 x^2-4x+3으로 나눈 몫을 $Q_1(x)$,
$x^2-3x-10$으로 나눈 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-4x+3)Q_1(x)+2x-7 \\ &= (x-1)(x-3)Q_1(x)+2x-7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-3x-10)Q_2(x)+11 \\ &= (x-5)(x+2)Q_2(x)+11 \end{aligned}$$

이므로 $f(1)=-5,\ f(5)=11$이다.
㉠에서
$f(1)=a+b=-5$
$f(5)=5a+b=11$이므로 연립하여 풀면
$a=4,\ b=-9$
따라서 구하는 나머지는 $4x-9$이다.

37. 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누면 몫이 $A(x)$, 나머지가 a이고, $x+2$로 나누면 몫이 $B(x)$, 나머지가 b라고 한다. 이때, $A(x)$를 $x+2$로 나눈 나머지를 a, b로 나타내면?

① $a-b$ ② $\frac{a-b}{2}$ ③ $\frac{a-b}{3}$ ④ $\frac{a-b}{4}$ ⑤ $\frac{a-b}{5}$

해설

$f(x)=(x-1)A(x)+a\cdots$①
$f(x)=(x+2)B(x)+b\cdots$②
①, ②에 각각 $x=1$, $x=-2$를 대입하면
$f(1)=a$, $f(-2)=b$
$A(x)$를 $x+2$로 나눈 나머지는 나머지정리에 의해 $A(-2)$이다.
①에 $x=-2$를 대입하면
$f(-2)=-3A(-2)+a=b$
$\therefore A(-2)=\frac{a-b}{3}$

38. x에 대한 다항식 $P(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지가 5이고, 그 몫을 다시 $x+3$으로 나눈 나머지가 3일 때, $xP(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

x에 대한 다항식 $P(x)$를 $x-2$로 나눈 몫을 $Q(x)$,
$Q(x)$를 $x+3$으로 나눈 몫을 $Q_1(x)$라 하면
$P(x)=(x-2)Q(x)+5, Q(x)=(x+3)Q_1(x)+3$이므로
$P(x)=(x-2)\{(x+3)Q_1(x)+3\}+5$
$\quad =(x-2)(x+3)Q_1(x)+3x-1$
$\therefore\ P(-3)=-9-1=-10$
따라서 $xP(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지는
$-3P(-3)=-3\times(-10)=30$

해설

나머지정리에 의해 $Q(-3)=3$
$P(x)=(x-2)Q(x)+5$에서 양변에 x를 곱하면
$xP(x)=x(x-2)Q(x)+5x\cdots$①
나머지정리에 의해 $xP(x)$를 $x+3$로 나눈 나머지는 $-3P(-3)$이다.
①의 양변에 $x=-3$을 대입하면
$-3P(-3)=-3\cdot(-5)Q(-3)-15$
$Q(-3)=3$을 대입하면 $-3P(-3)=30$

39. x 의 다항식 $f(x) = x^5 - ax - 1$ 이 계수가 정수인 일차인수를 갖도록 정수 a 의 값을 구하면?

① $a = 0$ 또는 2 ② $a = 1$ 또는 2 ③ $a = -1$ 또는 2
④ $a = 0$ 또는 1 ⑤ $a = 0$ 또는 -2

해설

상수항이 -1 이므로 만일 일차인수가 있다면 그것은 $x - 1$ 또는 $x + 1$ 뿐이다.
(ⅰ) $f(1) = 1 - a - 1 = 0$ 에서 $a = 0$
(ⅱ) $f(-1) = -1 + a - 1 = 0$ 에서 $a = 2$

40. $f(x)=3x^3-x+2$ 일 때, $f(x+1)=Ax^3+Bx^2+Cx+D$ 이다. 이때, $A+B+C+D$ 의 값을 구하면 ?

① 4　② 14　③ 24　④ 34　⑤ 44

해설

$f(x+1)=Ax^3+Bx^2+Cx+D$ 에 $x=1$ 을 대입하면
$f(2)=A+B+C+D$ 이므로
$f(2)$ 를 구하기 위해서는
$f(x)=3x^3-x+2$ 에 $x=2$ 를 대입하면
$f(2)=3\times 2^3-2+2=24$

해설

$x+1=t$ 라 하면,
$f(t)=A(t-1)^3+B(t-1)^2+C(t-1)+D$

$$\begin{array}{r|rrrr}
1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\
 & & 3 & 3 & 2 \\
\hline
1 & 3 & 3 & 2 & \boxed{4} \\
 & & 3 & 6 & \\
\hline
1 & 3 & 6 & \boxed{8} & \\
 & & 3 & & \\
\hline
 & 3 & \boxed{9} & &
\end{array}$$

$\therefore\ A=3,\ B=9,\ C=8,\ D=4$
$\therefore\ A+B+C+D=24$

41. n이 자연수일 때, 다항식 $x^{2n}(x^2+ax+b)$를 $(x-3)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $9^n(x-3)$이 될 때, $a+b$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x^{2n}(x^2+ax+b)=(x-3)^2Q(x)+9^n(x-3)$

$x^{2n}(x-3)(x-\alpha)=(x-3)\,(x-3)Q(x)+9^n\}$ 라 놓으면,

$x^{2n}(x-\alpha)=(x-3)Q(x)+9^n$ 이고

양변에 $x=3$을 대입하면, $9^n(3-\alpha)=9^n$

$\therefore\ 3-\alpha=1,\quad \alpha=2$

그러므로 $a=-5,\ b=6$이 된다.

따라서 $a+b=1$

42. n이 자연수일 때 $x^{2n}(x^2+ax+b)$를 $(x+2)^2$으로 나눈 나머지가 $4^n(x+2)$가 되도록 $a,\ b$의 값을 정할 때, $a-2b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

$x^{2n}(x^2+ax+b)=(x+2)^2Q(x)+4^n(x+2)\cdots$①

$x=-2$를 대입하면,

$4^n(4-2a+b)=0\ \therefore\ b=2a-4\cdots$②

②를 ①에 대입하면

$x^{2n}(x^2+ax+2a-4)$

$=(x+2)^2Q(x)+4^n(x+2)$

한편, $x^2+ax+2a-4=x^2-4+a(x+2)$

$=(x+2)(x-2)+a(x+2)$

$=(x+2)(x-2+a)$

$\therefore\ x^{2n}(x+2)(x-2+a)$

$=(x+2)^2Q(x)+4^n(x+2)$

$\therefore\ x^{2n}(x-2+a)=(x+2)Q(x)+4^n$

$x=-2$를 대입하면

$4^n(-4+a)=4^n\quad \therefore -4+a=1\quad \therefore\ a=5$

②에서 $b=6\quad \therefore\ a-2b=-7$

43. x에 대한 다항식 $(1+x-x^2)^{10}$을 전개하면 $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{20}x^{20}$이 될 때, $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{20}$의 값은? (단, a_i는 상수이고 $i=0,\ 1,\ 2,\cdots,20$)

① 2^{10}　　② $2^{10}-1$　　③ 2

④ 1　　⑤ 0

해설

$(1+x-x^2)^{10}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{20}x^{20}$이므로
$x=1$을 대입하면
$1=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{19}+a_{20}\cdots$㉠
또, 이 식에 $x=-1$을 대입하면
$1=a_0-a_1+a_2-\cdots-a_{19}+a_{20}\cdots$㉡
㉠ + ㉡을 하면 $2=2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{20})$
$\therefore\ a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{20}=1$

44. 삼차항의 계수가 1인 삼차다항식 $f(x)$에 대하여 $f(-1) = f(1) = f(2) = 3$일 때 $f(-2)$의 값은?

① -5　② -6　③ -7　④ -8　⑤ -9

해설

$f(x) = (x+1)(x-1)(x-2)+3$
$\therefore\ f(-2) = -9$

해설

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$라 하면
i) $f(-1) = 3$에서 $a - b + c - 1 = 3$
ii) $f(1) = 3$에서 $a + b + c + 1 = 3$
iii) $f(2) = 3$에서 $4a + 2b + c + 8 = 3$
위의 세식을 연립하여 풀면,
$a = -2, b = -1, c = 5$
$\therefore\ f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 5$
$\therefore f(-2) = -8 - 8 + 2 + 5 = -9$

45. x^{100} 을 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때, 나머지는?

① $100x+101$ ② $100x-99$ ③ $-100x-99$

④ $-99x-98$ ⑤ $99x+100$

해설

구하는 나머지를 $ax+b$ 라 하면

$x^{100}=(x+1)^2Q(x)+ax+b$

x^{100} 을 $x+1$ 로 나누면 나머지는 1 이므로

$x^{100}=(x+1)^2Q(x)+a(x+1)+1$ $(\Rightarrow a+1=b)$

$x^{100}-1=(x+1)\{(x+1)Q(x)+a\}$

$(x^2)^{50}-1=(x+1)\{(x+1)Q(x)+a\}$

$(x^2-1)\{(x^2)^{49}+(x^2)^{48}+\cdots+x^2+1)\}$

$=(x+1)\{(x+1)Q(x)+a\}$

$(x+1)(x-1)\{(x^2)^{49}+(x^2)^{48}+\cdots+x^2+1)\}$

$=(x+1)\{(x+1)Q(x)+a\}$

$(x-1)\{(x^2)^{49}+(x^2)^{48}+\cdots+x^2+1)\}=(x+1)Q(x)+a$

양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$(-1-1)(1^{49}+1^{48}+\cdots+1+1)=a$

$a=-100$, $a+1=b$ 에서 $b=-99$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $-100x-99$

46. x^8을 $x-2$로 나눌 때의 몫과 나머지가 각각 $q_1(x)$, $\sqrt{r_1}$이고, $q_1(x)$를 $x-2$로 나눌 때의 몫과 나머지가 각각 $q_2(x)$, $\sqrt{r_2}$일 때, $\frac{r_2}{r_1}$의 값은?

① $\frac{1}{8}$　　② $\frac{1}{4}$　　③ 16　　④ 21　　⑤ 64

해설

$x^8 = (x-2)q_1(x) + \sqrt{r_1} \quad \cdots\cdots ①$

$q_1(x) = (x-2)q_2(x) + \sqrt{r_2} \cdots\cdots ②$

①에서 $x = 2$를 양변에 대입하면

$\sqrt{r_1} = 2^8,\ r_1 = 2^{16}$

또, $q_1(x) = \frac{x^8 - \sqrt{r_1}}{x-2} = \frac{x^8 - 2^8}{x-2}$

$= (x^7 + 2x^6 + \cdots + 2^7)$

②에서 $x = 2$를 양변에 대입하면

$q_1(2) = \sqrt{r_2},\ r_2 = \{q_1(2)\}^2$

그런데 $q_1(2) = 8 \cdot 2^7 = 2^{10}$

$\therefore\ r_2 = 2^{20}$

따라서, $\frac{r_2}{r_1} = \frac{2^{20}}{2^{16}} = 2^4 = 16$

47. x에 대한 다항식 $f(x)$를 $2x-1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 -2이다. 다항식 $xf(x)$를 $x-\frac{1}{2}$로 나눈 몫과 나머지를 차례로 적은 것은?

① $2xQ(x)-2,\ -1$　② $2xQ(x)-1,\ -1$
③ $\frac{1}{2}xQ(x)-2,\ 1$　④ $\frac{1}{2}xQ(x)-1,\ 1$
⑤ $\frac{1}{2}xQ(x)+1,\ 2$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x-1)Q(x)-2 \\ &= \left(x-\frac{1}{2}\right)2Q(x)-2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xf(x) &= \left(x-\frac{1}{2}\right)2xQ(x)-2x \\ &= \left(x-\frac{1}{2}\right)2xQ(x)-2\left(x-\frac{1}{2}\right)-1 \\ &= \left(x-\frac{1}{2}\right)\{2xQ(x)-2\}-1 \end{aligned}$$

48. x에 관한 다항식 $f(x)$를 x^2+1로 나누면 나머지가 $x+1$이고, $x-1$로 나누면 나머지가 4이다. 이 다항식 $f(x)$를 $(x^2+1)(x-1)$로 나눌 때의 나머지의 상수항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x)$를 $(x^2+1)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c(단, $a,\ b,\ c$는 상수) 라고 하면,

$f(x)=(x^2+1)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$

그런데 $f(x)$를 x^2+1로 나누면 나머지가 $x+1$이므로

$f(x)=(x^2+1)(x-1)Q(x)+a(x^2+1)+(x+1)$

또 $f(x)$를 $x-1$로 나누면 나머지가 4이므로

$f(1)=2a+2=4$에서 $a=1$

따라서 $ax^2+bx+c=a(x^2+1)+x+1=x^2+x+2$

$\therefore$ 구하는 나머지의 상수항은 2

49. 다음은 다항식 $x^{2n}+1+(x+1)^{2n}$이 x^2+x+1로 나누어떨어지지 않게 하는 자연수 n을 구하는 과정이다. (   )에 알맞은 수를 차례대로 나열한 것은?

> ω가 다항식 $x^2+x+1=0$을 만족하는 근이라고 하면 $\omega^2+\omega+1=0$
> $\therefore\ \omega^3,\ \omega \neq 1$
> (i) $n=3k(k=0,1,2,\cdots)$ 이면
> $\quad \omega^{2n}+1+(\omega+1)^{2n}=($ ㉠ $)\neq 0$
> (ii) $n=3k+1(k=0,1,2,\cdots)$ 이면
> $\quad \omega^{2n}+1+(\omega+1)^{2n}=($ ㉡ $)$
> (iii) $n=3k+2(k=0,1,2,\cdots)$ 이면
> $\quad \omega^{2n}+1+(\omega+1)^{2n}=0$
> 따라서 (i), (ii), (iii) 에서 구하는 n은 (㉢) 이다.

① $1, 0, 3k$　② $2, 1, 3k+1$　③ $3, 0, 3k+2$　④ $3, 0, 3k$　⑤ $2, 1, 3k$

해설

(i) $n=3k$이면
$\omega^{2n}+1+(\omega+1)^{2n}$
$=\omega^{6k}+1+(\omega+1)^{6k}$
$=\omega^{6k}+1+(-\omega^2)^{6k}$
$=(\omega^3)^{2k}+1+(\omega^3)^{4k}$
$=1+1+1(\because\ \omega^3=1)=(\ 3\ )\neq 0$
(ii) $n=3k+1$이면
$\omega^{2n}+1+(\omega+1)^{2n}$
$=\omega^{6k+2}+1+(\omega+1)^{6k+2}$
$=\omega^{6k}\cdot\omega^2+1+(-\omega^2)^{6k+2}$
$=\omega^2+1+(-\omega^2)^{6k}(-\omega^2)^2$
$=\omega^2+1+\omega=(\ 0\ )$
(iii) $n=3k+2$이면
$\omega^{2n}+1+(\omega+1)^{2n}=0$
따라서 (i), (ii), (iii)에서 구하는 n은 $(3k)$이다.

50. $(x-2)^4 = a(x-3)^4 + b(x-3)^3 + c(x-3)^2 + d(x-3) + e$ 가 x 에 대한 항등식일 때, $2c - bd$ 의 값은?

① -8 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 8

해설

x 에 대한 항등식 이므로 x 에 대한 적당한 수를 넣어 식을 만든다.

i) $x = 3 \Rightarrow e = 1$

ii) $x = 2 \Rightarrow a - b + c - d + 1 = 0$

iii) $x = 4 \Rightarrow a + b + c + d + 1 = 16$

iv) $x = 4 \Rightarrow 16a - 8b + 4c - 2d + 1 = 1$

v) $x = 5 \Rightarrow 16a + 8b + 4c - 2d + 1 = 1$

위 5개의 식을 연립하여 a, b, c, d 의 값을 구한다.

$a = 1,\ b = 4,\ c = 6,\ d = 4,\ e = 1$

$\therefore 2c - bd = -4$

해설

$x - 2 = t$ 라 하면 $x - 3 = t - 1$

(준식) : $t^4 = a(t-1)^4 + b(t-1)^3 + c(t-1)^2 + d(t-1) + e$

다음처럼 조립제법으로 $t - 1$ 로 계속 나눌 때, 나오는 나머지가 순서대로 e, d, c, b 이고 마지막 몫이 a 이다.

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \boxed{1} = e \\
 & & 1 & 2 & 3 & \\
\hline
1 & 1 & 2 & 3 & \boxed{4} = d & \\
 & & 1 & 3 & & \\
\hline
1 & 1 & 3 & \boxed{6} = c & & \\
 & & 1 & & & \\
\hline
 & a = 1 & \boxed{4} = b & & &
\end{array}
$$

$\therefore 2c - bd = -4$