

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ 일 때, $f(x) - 2 = x(x^2 - 1) + a(x - x^2) + b(x^2 - 1)$ 가 항상 성립하도록 하는 상수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$f(x) - 2 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ 이므로

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x(x^2 - 1) + a(x - x^2) + b(x^2 - 1)$$

$$= x^3 + (-a + b)x^2 + (a - 1)x - b \cdots \text{㉠}$$

㉠이 x 에 대한 항등식이므로 양변의 차수가 같은 항의 계수가 같아야 한다.

$$\text{즉, } -a + b = -3, a - 1 = 3, b = 1$$

$$\text{이므로 } a = 4, b = 1$$

$$\therefore a + b = 5$$

2. 등식 $x^2 - 2x + 3 = a + b(x - 1) + c(x - 1)^2$ 이 x 에 관한 항등식일 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$x^2 - 2x + 3 = a + b(x - 1) + c(x - 1)^2$$

$$x = 1 \text{을 대입하면 } 2 = a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$x = 0 \text{을 대입하면 } 3 = a - b + c \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$x = 2 \text{를 대입하면 } 3 = a + b + c \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

①을 ②, ③에 대입하여 정리하면

$$b - c = -1, b + c = 1$$

$$\text{두 식을 연립하면 } b = 0, c = 1$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 4 + 0 + 1 = 5$$

3. 등식 $2x^2 - 3x - 2 = a(x-1)(x-2) + bx(x-2) + cx(x-1)$ 이 x 에 관한
항등식이 되도록 할 때, $2ab$ 의 값은?

① -6

② -4

③ -2

④ 2

⑤ 4

해설

양변에 $x = 0$ 을 대입하면, $-2 = 2a \quad \therefore a = -1$

양변에 $x = 1$ 을 대입하면, $-3 = -b \quad \therefore b = 3$

$\therefore 2ab = -6$

4. 다음 등식이 x 에 대한 항등식일 때, $a - b + c$ 의 값은?

$$x^2 - 2x + 4 = a(x - 1)(x - 2) + bx(x - 2) + cx(x - 1)$$

① 8

② 7

③ 3

④ 0

⑤ -3

해설

주어진 등식이 x 에 대한 항등식이므로 x 에 어떤 값을 대입하여도 성립한다.

$x = 0$ 을 대입하면

$$4 = 2a \quad \therefore a = 2$$

$x = 1$ 을 대입하면

$$3 = -b \quad \therefore b = -3$$

$x = 2$ 을 대입하면

$$4 = 2c \quad \therefore c = 2$$

$$\therefore a - b + c = 2 - (-3) + 2 = 7$$

5. 다항식 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 6$ 을 $x - 2$, $x - 1$ 로 나누었을 때의 나머지를 각각 a, b 라 할 때, $a + b$ 의 값은?

① -8

② -2

③ -16

④ 4

⑤ 2

해설

$$f(x) = (x - 2)Q(x) + a$$

$$f(x) = (x - 1)Q'(x) + b$$

$$f(2) = 4 = a, \quad f(1) = -2 = b$$

$$\therefore a + b = 2$$

6. $x^3 + ax^2 + bx - 4$ 는 $x - 2$ 로 나누어 떨어지고 $x + 1$ 로 나누면 나머지가 6이다. $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 4$ 라 하면

$$f(2) = 4a + 2b + 4 = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$f(-1) = a - b - 5 = 6 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 에서 $a = 3$, $b = -8$

$$\therefore a - b = 11$$

7. x 에 관한 삼차식 $x^3 + mx^2 + nx + 1$ 을 $x+1$ 로 나누면 나머지가 5이고, $x-2$ 로 나누면 나머지가 3이다. 이 때, 상수 $m-n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

나머지 정리를 이용한다.

주어진 식에 $x = -1$, $x = 2$ 를 각각 대입하면,

$$(-1)^3 + m(-1)^2 + n(-1) + 1 = 5 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$(2)^3 + m(2)^2 + n \cdot 2 + 1 = 3 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하면,

$$m = \frac{2}{3}, n = -\frac{13}{3}$$

$$\therefore m - n = 5$$

8. $x^3 - 2x^2 + a$ 가 $x+3$ 로 나누어 떨어지도록 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 45$

해설

$$f(-3) = (-3)^3 - 2(-3)^2 + a = a - 45 = 0$$

$$\therefore a = 45$$

9. x^3 의 항의 계수가 1인 삼차 다항식 $P(x)$ 가 $P(1) = P(2) = P(3) = 0$ 을 만족할 때, $P(4)$ 의 값은?

① 4

② 6

③ 8

④ 10

⑤ 12

해설

인수정리에 의해

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

$$P(4) = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

10. x 에 대한 다항식 $4x^3 - 3x^2 + ax + b$ 가 $(x+1)(x-3)$ 을 인수로 갖도록 $a + b$ 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -37

해설

$P(x) = 4x^3 - 3x^2 + ax + b$ 라 하고 $P(x)$ 가 $(x+1)(x-3)$ 을 인수로 가지려면

$$P(-1) = P(3) = 0$$

$$P(-1) = -4 - 3 - a + b = 0 \quad \therefore a - b = -7$$

$$P(3) = 108 - 27 + 3a + b = 0 \quad \therefore 3a + b = -81$$

$$\therefore a = -22, b = -15$$

11. 등식 $x^3 + x - 1 = (x - a)(x - b)(x - c)$ 가 항등식일 때, $a^3 + b^3 + c^3$ 의 값을 구하면?

① 2

② 5

③ 3

④ 7

⑤ -7

해설

$$x^3 + x - 1$$

$$= (x - a)(x - b)(x - c)$$

$$= x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc$$

$$\therefore a + b + c = 0, \quad ab + bc + ca = 1, \quad abc = 1$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

$$\therefore a^3 + b^3 + c^3 = 3$$

12. $\frac{2x + ay - b}{x - y - 1}$ 가 $x - y - 1 \neq 0$ 인 어떤 x, y 의 값에 대하여도 항상 일정한 값을 가질 때, $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$$\frac{2x + ay - b}{x - y - 1} = k \text{라 놓으면}$$

$$2x + ay - b = k(x - y - 1)$$

x, y 에 대하여 정리하면,

$$(2 - k)x + (a + k)y - b + k = 0$$

위의 식이 x, y 에 대한 항등식이어야 하므로

$$2 - k = 0, a + k = 0, -b + k = 0$$

$$\therefore k = 2, a = -2, b = 2$$

$$\therefore a - b = -4$$

13. 세 실수 a, b, c 에 대하여 $(a, b, c) = ab + bc$ 로 정의한다. 이때, 등식 $(x, a, y) - (2x, b, y) = (x, 2, y)$ 이 임의의 실수 x, y 에 대하여 성립하도록 a, b 의 값을 정하면?

① $a = 1, b = 2$

② $a = 2, b = 2$

③ $a = 2, b = 0$

④ $a = 0, b = 2$

⑤ $a = 0, b = 0$

해설

기호의 정의에 따라서 주어진 식을 다시 쓰면

$$(ax + ay) - (2bx + by) = 2x + 2y$$

이 식을 x, y 에 대하여 정리하면

$$(a - 2b - 2)x + (a - b - 2)y = 0$$

이 등식이 임의의 x, y 에 대하여 성립하므로

$$a - 2b - 2 = 0, a - b - 2 = 0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a = 2, b = 0$

14. x 의 다항식 $x^3 + ax + b$ 를 $x^2 - 3x + 2$ 로 나눌 때, 나머지가 $2x + 1$ 이 되도록 상수 a, b 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x^3 + ax + b$ 를 $x^2 - 3x + 2$ 로 나눌 때,
몫을 $x + q$ 라 하면 (일반적으로 $px + q$ 로 해야겠지만 x^3 의 계수가 1이므로 $x + q$)

$$x^3 + ax + b = (x^2 - 3x + 2)(x + q) + 2x + 1$$

$$\therefore x^3 + ax + b = (x - 2)(x - 1)(x + q) + 2x + 1$$

이 등식은 x 에 관한 항등식이므로

$$x = 1 \text{을 대입하면 } 1 + a + b = 2 + 1 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$x = 2 \text{를 대입하면 } 8 + 2a + b = 4 + 1 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } a = -5, b = 7$$

$$\therefore a + b = 2$$

15. 다항식 $x^3 - 4x^2 + ax + b$ 가 $x^2 + 2$ 로 나누어 떨어질 때, $3a + b$ 의 값은?

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + ax + b$$

$= (x^2 + 2)(x - \alpha)$ 라 놓을 수 있다.

$$x^3 - \alpha x^2 + 2x - 2\alpha = x^3 - 4x^2 + ax + b$$

$$\therefore \alpha = 4, \quad a = 2, \quad b = -8$$

$$\therefore 3a + b = -2$$

16. x 에 대한 삼차식 $x^3 + ax^2 + bx + 3$ 이 $x^2 + 1$ 로 나누어떨어질 때, 상수 a, b 의 값을 정하면?

① $a = -1, b = 3$

② $a = 1, b = 3$

③ $a = 3, b = -1$

④ $a = -3, b = -1$

⑤ $a = 3, b = 1$

해설

$$\begin{aligned}x^3 + ax^2 + bx + 3 &= (x^2 + 1)(x + c) \\ &= x^3 + cx^2 + x + c\end{aligned}$$

$$\therefore a = c, b = 1, c = 3$$

$$\therefore a = 3, b = 1$$

17. 임의의 실수 x 대하여 $(1+2x-x^2)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{20}x^{20}$ 이 항상 성립할 때, $2a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}$ 의 값은?

① 1023

② 1024

③ 1025

④ 2046

⑤ 2050

해설

$x = 0$ 대입, $a_0 = 1$

$x = 1$ 대입, $2^{10} = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}$

$2a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{20} = 1 + 1024 = 1025$

18. x 에 대한 다항식 $x^3 + kx^2 + kx - 1$ 을 $x - 2$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 $Q_1(x)$, R_1 , $x + 2$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 $Q_2(x)$, R_2 라 할 때, $R_1 = R_2$ 를 만족하는 실수 k 의 값을 구하면?

① -4

② -2

③ 0

④ 2

⑤ 4

해설

$$\begin{aligned}x^3 + kx^2 + kx - 1 &= (x - 2)Q_1(x) + R_1 \\ &= (x + 2)Q_2(x) + R_2\end{aligned}$$

$$x = 2 \text{ 대입, } R_1 = 8 + 4k + 2k - 1 = 6k + 7$$

$$x = -2 \text{ 대입, } R_2 = -8 + 4k - 2k - 1 = 2k - 9$$

$$R_1 = R_2 \text{ 이므로 } 6k + 7 = 2k - 9$$

$$\therefore k = -4$$

19. 다항식 $f(x)$ 에 대하여, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3$, $f\left(\frac{1}{3}\right) = 1$ 일 때, $f(x)$ 를 $(2x-1)(3x-1)$ 로 나눈 나머지를 구하시오.

▶ 답 :

▶ 정답 : $12x - 3$

해설

구하는 나머지를 $ax + b$ 라 하면

$$f(x) = (2x-1)(3x-1)Q(x) + ax + b$$

$x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{3}$ 을 각각 양변에 대입하면

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}a + b = 3, \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}a + b = 1$$

두 식을 연립하여 풀면 $\frac{1}{6}a = 2 \Rightarrow a = 12, b = -3$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $12x - 3$

20. 다항식 $f(x)$ 를 $x-1$, $x-2$ 로 나눈 나머지가 각각 1, 2일 때, $f(x)$ 를 x^2-3x+2 로 나눈 나머지를 구하면?

① $x-1$

② $x+1$

③ $-x+1$

④ x

⑤ $-x$

해설

$$f(x) = (x-1)Q_1(x) + 1 \Rightarrow f(1) = 1$$

$$f(x) = (x-2)Q_2(x) + 2 \Rightarrow f(2) = 2$$

$$f(x) = (x-1)(x-2)Q_3(x) + ax + b \text{라 하면,}$$

$$f(1) = a + b = 1, \quad f(2) = 2a + b = 2 \text{이다.}$$

$$\therefore a = 1, \quad b = 0 \text{이므로 나머지는 } x$$

21. 다항식 $f(x)$ 를 $x+1$ 로 나눌 때의 나머지가 3이고, $x-2$ 로 나누어서 떨어진다. 이 다항식을 $(x+1)(x-2)$ 로 나눌 때의 나머지를 구하면?

① $2x+1$

② $-x+2$

③ $x-1$

④ 2

⑤ 3

해설

$R(x) = ax + b$ 라 두면

$$R(-1) = -a + b = 3, \quad R(2) = 2a + b = 0$$

$$a = -1, \quad b = 2 \text{ 이므로 } R(x) = -x + 2$$

22. x 의 다항식 $f(x)$ 를 $x-2$ 로 나누면 -3 이 남고, $x+3$ 으로 나누면 27 이 남는다. 이 $f(x)$ 를 $(x-2)(x+3)$ 으로 나눌 때, 그 나머지는?

① $6x - 9$

② $-6x + 9$

③ $2x + 3$

④ $-2x - 3$

⑤ $2x - 3$

해설

$f(x)$ 를 $(x-2)(x+3)$ 으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ 라 하면

$$f(x) = (x-2)(x+3)Q(x) + ax + b$$

문제의 조건으로부터

$$f(2) = -3, f(-3) = 27 \text{이므로}$$

$$2a + b = -3, -3a + b = 27$$

$$\therefore a = -6, b = 9$$

따라서 구하는 나머지는 $-6x + 9$ 이다.

23. $f(x)$ 를 $x-1$, $x-2$ 로 나눈 나머지가 각각 3, 5일 때, $f(x)$ 를 x^2-3x+2 로 나눈 나머지를 구하면?

① $2x+1$

② $2x+3$

③ $2x-1$

④ $2x$

⑤ $2x-3$

해설

x^2-3x+2 로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ 라 하면 $f(x) = (x^2-3x+2)Q(x) + ax+b$

그런데 $f(1) = 3$, $f(2) = 5$ 이므로

$$a+b=3, 2a+b=5$$

$$\therefore a=2, b=1$$

따라서, 구하는 나머지는 $2x+1$

24. 다항식 $f(x)$, $g(x)$ 에서 $f(x)$ 를 $x^2 - 1$ 로 나눈 나머지가 2이고 $g(x)$ 를 $x^2 - 3x + 2$ 로 나눈 나머지가 $2x + 1$ 이다. $2f(x) + 3g(x)$ 를 $x - 1$ 로 나눈 나머지는?

- ① 13 ② -13 ③ 16 ④ -16 ⑤ 26

해설

$$f(x) = (x^2 - 1)Q_1(x) + 2,$$

$$\therefore f(1) = 2$$

$$g(x) = (x^2 - 3x + 2)Q_2(x) + 2x + 1,$$

$$\therefore g(1) = 3$$

$2f(x) + 3g(x)$ 를 $x - 1$ 로 나눈 나머지는

$$2f(1) + 3g(1) = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 13$$

25. 다항식 $2x^3 + 3x^2 + ax + b$ 가 $x + 2$ 로 나누어 떨어질 때, $2a - b$ 의 값은?

① 28

② 12

③ 6

④ -4

⑤ -12

해설

준식을 $f(x)$ 라 하면 $f(-2) = 0$ 이므로
 $-16 + 12 - 2a + b = 0$ 에서 $2a - b = -4$

26. x 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 - x + b$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. 다음 중 옳지 않은 것은?

k	1	a	-1	b
		c	d	a
1	4	3	5	

① $a = 3$

② $b = 2$

③ $c = 1$

④ $d = 4$

⑤ $k = -1$

해설

다항식 $x^3 + ax^2 - x + b$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

1	1	a	-1	b
		1	$a+1$	a
1	$a+1$	a	$b+a$	

$k = 1, a = 3, b = 2, c = 1, d = 4$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

27. 임의의 실수 x 에 대하여 $2x^3 - 5x + 2 = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d$ 가 성립할 때, $a^2 - b^2 + c^2 - d^2$ 의 값을 구하면?

① 56

② 28

③ -28

④ -46

⑤ -56

해설

a, b, c, d 는 $2x^2 - 5x + 2$ 를 $(x+1)$ 로 계속 나눠 줄때 나오는 나머지이다.

조립제법을 이용해 보면

-1	2	0	-5	2	
		-2	2	3	
-1	2	-2	-3	5	← d
		-2	4		
-1	2	-4	1		← c
		-2			
-1	2	-6			← b
	↑				
	a				

$$\therefore a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 2^2 - (-6)^2 + 1^2 - 5^2 = -56$$

28. 2가 아닌 모든 실수 x 에 대하여 $\frac{ax^2 + 4x + b}{x - 2}$ 의 값이 항상 일정하도록 상수 a, b 의 값을 정할 때, $a - b$ 의 값은?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$$\frac{ax^2 + 4x + b}{x - 2} = k \text{라 하면}$$

$$ax^2 + 4x + b = k(x - 2)$$

$$ax^2 + (4 - k)x + b + 2k = 0$$

x 에 대한 항등식이므로

$$a = 0$$

$$4 - k = 0 \text{에서 } k = 4$$

$$b + 2k = 0 \text{에서 } b = -8$$

$$\therefore a - b = 8$$

해설

주어진 식이 모든 x 에 대해 일정한 값을 가지려면

분자인 $ax^2 + 4x + b$ 가 분모인 ' $x - 2$ ' 만을 인수로 가져야 한다.

즉, 분자가 $k(x - 2)$ 가 되어야 한다.

$$\frac{ax^2 + 4x + b}{x - 2} = \frac{4(x - 2)}{x - 2} = 4$$

$$\therefore a = 0, b = -8 \text{에서 } a - b = 8$$

29. 다음 등식이 x 에 대한 항등식일 때, 상수 a, b, c, d 에 대하여 $a+b+c+d$ 의 값을 구하면? (단, $a < c$)

$$(x-a)^2(bx-x^2-1) = (x-c)^2(dx-x^2-1)$$

① -4

② 4

③ 5

④ -5

⑤ 0

해설

$a < c$ 에서 $a \neq c$ 이므로 주어진 등식에서

$$x^2 - bx + 1 = (x - c)^2 \quad \therefore b = 2c, 1 = c^2$$

$$x^2 - dx + 1 = (x - a)^2 \quad \therefore d = 2a, 1 = a^2$$

$$\therefore a = -1, b = 2, c = 1, d = -2$$

$$\therefore a + b + c + d = 0$$

30. 1985년부터 1995년까지 5년 간격으로 조사한 우리나라의 농가인구 비율 P 는 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

연도	85	90	95
인구비율(%)	20.9	15.5	10.8
인구(1000명)	8521	6661	4851

$$P = 0.35t^2 - 5.75t + 20.9$$

이 때, $t = 0$ 은 1985년을 나타낸다. 이 식을 $t = 0$ 이 1990년을 나타내도록 변형하면?

- ① $P = 0.35t^2 - 5.75t + 20.9$
- ② $P = 0.35(t + 1)^2 - 5.75(t + 1) + 20.9$
- ③ $P = 0.35(t - 1)^2 - 5.75(t - 1) + 20.9$
- ④ $P = 0.35(t + 2)^2 - 5.75(t + 2) + 20.9$
- ⑤ $P = 0.35(t - 2)^2 - 5.75(t - 2) + 20.9$

해설

$P_1(t) = 0.35t^2 - 5.75t + 20.9$ 일 때,

$t = 0 \rightarrow 1985$ 년, $t = 1 \rightarrow 1990$ 년, $t = 2 \rightarrow 1995$ 년

$P_2(t) = 0.35(t + 1)^2 - 5.75(t + 1) + 20.9$ 이면,

$P_2(0) = P_1(1)$ 이므로 $P_2(t)$ 에서

$t = 0 \rightarrow 1990$ 년임을 알 수 있다.

31. $y = kx^2 + (1 - 2k)x + k - 1$ 의 그래프는 k 에 관계없이 항상 한 정점 A를 지난다. B의 좌표를 B(b, 1)라 할 때, $\overline{AB}$ 의 길이가 $\sqrt{2}$ 가 되도록 하는 b 의 값들의 합을 구하면?

① 1

② 2

③ -2

④ -3

⑤ -1

해설

(i) 준식을 k 에 관하여 정리하면

$$(x^2 - 2x + 1)k + (x - y - 1) = 0$$

이 식이 k 의 값에 관계없이 성립할 조건은

$$x^2 - 2x + 1 = 0, \quad x - y - 1 = 0$$

$$\therefore x = 1, y = 0$$

$$\therefore A(1, 0)$$

(ii) A(1, 0), B(b, 1)에서

$$\overline{AB} = \sqrt{2} \text{이므로}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(b-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$$

$$b^2 - 2b = 0, \quad b(b-2) = 0 \quad \therefore b = 0, 2$$

$\therefore b$ 의 값들의 합은 2

32. $x + y + 2z = 1$, $2x - y + z = 5$ 를 만족하는 모든 실수 x, y, z 에 대하여 $ax^2 + by^2 + cz^2 = 6$ 이 성립할 때, $3a + 2b + c$ 의 값은 얼마인가?

① 12

② 8

③ 4

④ 0

⑤ -2

해설

$$x + y + 2z = 1 \cdots \textcircled{1}$$

$$2x - y + z = 5 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2}: x + z = 2 \Rightarrow z = 2 - x$$

$$\textcircled{2} \times 2 - \textcircled{1}: x - y = 3 \Rightarrow y = x - 3$$

$$\therefore ax^2 + by^2 + cz^2 = 6$$

$$\Rightarrow ax^2 + b(x - 3)^2 + c(2 - x)^2$$

$$= (a + b + c)x^2 - (4c + 6b)x + 9b + 4c = 6$$

모든 실수 x, y, z 에 대해 성립하려면

$$a + b + c = 0, \quad 4c + 6b = 0, \quad 9b + 4c = 6$$

위의 식을 연립하여 풀면, $a = 1, b = 2, c = -3$

$$\therefore 3a + 2b + c = 4$$

33. 등식 $(1+x+x^2)^3 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_8x^8$ 이 x 에 대한 항등식일 때, $a_1 + a_3 + a_5 + a_7$ 의 값은?

① 28

② 26

③ 15

④ 14

⑤ 13

해설

양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$$3^3 = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_8 - \textcircled{\Gamma}$$

양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$1^3 = a_0 - a_1 + a_2 + \dots + a_8 - \textcircled{\text{L}}$$

$$\textcircled{\Gamma} - \textcircled{\text{L}} : 26 = 2(a_1 + a_3 + a_5 + a_7)$$

$$\therefore a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = 13$$

34. 등식 $(1 + 2x - x^2)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{20}x^{20}$ 이 x 에 대한 항등식일 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{18} + a_{20}$ 의 값은?

① -2^{10}

② -2^9

③ 0

④ 2^9

⑤ 2^{10}

해설

$$(1 + 2x - x^2)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{20}x^{20} \cdots \textcircled{㉠}$$

㉠은 x 에 대한 항등식이므로 x 에 어떤 실수 값을 대입해도 항상 성립한다.

㉠의 양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$$2^{10} = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{19} + a_{20} \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠의 양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$(-2)^{10} = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{19} + a_{20} \cdots \textcircled{㉢}$$

㉡ + ㉢을 하면

$$2^{10} + (-2)^{10} = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{20})$$

$$2 \times 2^{10} = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{20})$$

$$\therefore a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{18} + a_{20} = 2^{10}$$

35. x 에 관한 3차 다항식 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지가 2, $x+1$ 로 나눈 나머지가 4라고 한다. $f(x)$ 에서 x^2 의 계수를 a , 상수항을 b 라 하면 $a+b$ 의 값은?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$f(x) = px^3 + ax^2 + qx + b$ 라 하면

$f(1) = 2, f(-1) = 4$ 에서

$$p + a + q + b = 2 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$-p + a - q + b = 4 \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡}$ 를 하면

$$2(a+b) = 6, a+b = 3$$

36. x 에 대한 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 - 4x + 3$ 으로 나누었을 때의 나머지는 $2x - 7$ 이고, $x^2 - 3x - 10$ 으로 나누었을 때의 나머지는 11이다. 이 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 - 6x + 5$ 로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① $2x + 1$

② $4x + 3$

③ $x - 1$

④ $4x - 9$

⑤ $2x - 3$

해설

$f(x)$ 를 $x^2 - 6x + 5$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax + b$ 라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 6x + 5)Q(x) + ax + b \\ &= (x - 1)(x - 5)Q(x) + ax + b \cdots \textcircled{7} \end{aligned}$$

$f(x)$ 를 $x^2 - 4x + 3$ 으로 나눈 몫을 $Q_1(x)$, $x^2 - 3x - 10$ 으로 나눈 몫을 $Q_2(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 4x + 3)Q_1(x) + 2x - 7 \\ &= (x - 1)(x - 3)Q_1(x) + 2x - 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 3x - 10)Q_2(x) + 11 \\ &= (x - 5)(x + 2)Q_2(x) + 11 \end{aligned}$$

이므로 $f(1) = -5$, $f(5) = 11$ 이다.

⑦에서

$$f(1) = a + b = -5$$

$f(5) = 5a + b = 11$ 이므로 연립하여 풀면

$$a = 4, b = -9$$

따라서 구하는 나머지는 $4x - 9$ 이다.

37. 다항식 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나누면 몫이 $A(x)$, 나머지가 a 이고, $x+2$ 로 나누면 몫이 $B(x)$, 나머지가 b 라고 한다. 이때, $A(x)$ 를 $x+2$ 로 나눈 나머지를 a, b 로 나타내면?

- ① $a-b$ ② $\frac{a-b}{2}$ ③ $\frac{a-b}{3}$ ④ $\frac{a-b}{4}$ ⑤ $\frac{a-b}{5}$

해설

$$f(x) = (x-1)A(x) + a \cdots \textcircled{1}$$

$$f(x) = (x+2)B(x) + b \cdots \textcircled{2}$$

①, ②에 각각 $x=1, x=-2$ 를 대입하면

$$f(1) = a, f(-2) = b$$

$A(x)$ 를 $x+2$ 로 나눈 나머지는 나머지정리에 의해 $A(-2)$ 이다.

①에 $x=-2$ 를 대입하면

$$f(-2) = -3A(-2) + a = b$$

$$\therefore A(-2) = \frac{a-b}{3}$$

38. x 에 대한 다항식 $P(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 나머지가 5이고, 그 몫을 다시 $x+3$ 으로 나눈 나머지가 3일 때, $xP(x)$ 를 $x+3$ 으로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

x 에 대한 다항식 $P(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$,
 $Q(x)$ 를 $x+3$ 으로 나눈 몫을 $Q_1(x)$ 라 하면
 $P(x) = (x-2)Q(x) + 5, Q(x) = (x+3)Q_1(x) + 3$ 이므로
 $P(x) = (x-2)\{(x+3)Q_1(x) + 3\} + 5$
 $= (x-2)(x+3)Q_1(x) + 3x - 1$
 $\therefore P(-3) = -9 - 1 = -10$
 따라서 $xP(x)$ 를 $x+3$ 으로 나눈 나머지는
 $-3P(-3) = -3 \times (-10) = 30$

해설

나머지정리에 의해 $Q(-3) = 3$
 $P(x) = (x-2)Q(x) + 5$ 에서 양변에 x 를 곱하면
 $xP(x) = x(x-2)Q(x) + 5x \cdots \textcircled{1}$
 나머지정리에 의해 $xP(x)$ 를 $x+3$ 로 나눈 나머지는 $-3P(-3)$
 이다.
 ①의 양변에 $x = -3$ 을 대입하면
 $-3P(-3) = -3 \cdot (-5)Q(-3) - 15$
 $Q(-3) = 3$ 을 대입하면 $-3P(-3) = 30$

39. x 의 다항식 $f(x) = x^5 - ax - 1$ 이 계수가 정수인 일차인수를 갖도록 정수 a 의 값을 구하면?

- ① $a = 0$ 또는 2 ② $a = 1$ 또는 2 ③ $a = -1$ 또는 2
④ $a = 0$ 또는 1 ⑤ $a = 0$ 또는 -2

해설

상수항이 -1 이므로 만일 일차인수가 있다면 그것은 $x - 1$ 또는 $x + 1$ 뿐이다.

(i) $f(1) = 1 - a - 1 = 0$ 에서 $a = 0$

(ii) $f(-1) = -1 + a - 1 = 0$ 에서 $a = 2$

40. $f(x) = 3x^3 - x + 2$ 일 때, $f(x+1) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ 이다. 이 때, $A + B + C + D$ 의 값을 구하면 ?

① 4

② 14

③ 24

④ 34

⑤ 44

해설

$f(x+1) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ 에 $x = 1$ 을 대입하면

$f(2) = A + B + C + D$ 이므로

$f(2)$ 를 구하기 위해서는

$f(x) = 3x^3 - x + 2$ 에 $x = 2$ 를 대입하면

$f(2) = 3 \times 2^3 - 2 + 2 = 24$

해설

$x + 1 = t$ 라 하면,

$f(t) = A(t-1)^3 + B(t-1)^2 + C(t-1) + D$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ & & 3 & 3 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 3 & 3 & 2 & 4 \\ & & 3 & 6 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 3 & 6 & 8 & \\ & & 3 & \end{array}$$

$$3 \quad 9$$

$\therefore A = 3, B = 9, C = 8, D = 4$

$\therefore A + B + C + D = 24$

41. n 이 자연수일 때, 다항식 $x^{2n}(x^2 + ax + b)$ 를 $(x - 3)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지가 $9^n(x - 3)$ 이 될 때, $a + b$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$x^{2n}(x^2 + ax + b) = (x - 3)^2 Q(x) + 9^n(x - 3)$$

$$x^{2n}(x - 3)(x - \alpha) = (x - 3)(x - 3)Q(x) + 9^n \} \text{라 놓으면,}$$

$$x^{2n}(x - \alpha) = (x - 3)Q(x) + 9^n \text{이고}$$

$$\text{양변에 } x = 3 \text{을 대입하면, } 9^n(3 - \alpha) = 9^n$$

$$\therefore 3 - \alpha = 1, \alpha = 2$$

그러므로 $a = -5, b = 6$ 이 된다.

$$\text{따라서 } a + b = 1$$

42. n 이 자연수일 때 $x^{2n}(x^2 + ax + b)$ 를 $(x + 2)^2$ 으로 나눈 나머지가 $4^n(x + 2)$ 가 되도록 a, b 의 값을 정할 때, $a - 2b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

$$x^{2n}(x^2 + ax + b) = (x + 2)^2 Q(x) + 4^n(x + 2) \cdots \textcircled{1}$$

$x = -2$ 를 대입하면,

$$4^n(4 - 2a + b) = 0 \quad \therefore b = 2a - 4 \cdots \textcircled{2}$$

②를 ①에 대입하면

$$x^{2n}(x^2 + ax + 2a - 4)$$

$$= (x + 2)^2 Q(x) + 4^n(x + 2)$$

$$\text{한편, } x^2 + ax + 2a - 4 = x^2 - 4 + a(x + 2)$$

$$= (x + 2)(x - 2) + a(x + 2)$$

$$= (x + 2)(x - 2 + a)$$

$$\therefore x^{2n}(x + 2)(x - 2 + a)$$

$$= (x + 2)^2 Q(x) + 4^n(x + 2)$$

$$\therefore x^{2n}(x - 2 + a) = (x + 2)Q(x) + 4^n$$

$x = -2$ 를 대입하면

$$4^n(-4 + a) = 4^n \quad \therefore -4 + a = 1 \quad \therefore a = 5$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } b = 6 \quad \therefore a - 2b = -7$$

43. x 에 대한 다항식 $(1+x-x^2)^{10}$ 을 전개하면 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_{20}x^{20}$ 이 될 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{20}$ 의 값은? (단, a_i 는 상수이고 $i = 0, 1, 2, \cdots, 20$)

① 2^{10}

② $2^{10} - 1$

③ 2

④ 1

⑤ 0

해설

$(1+x-x^2)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_{20}x^{20}$ 이므로
 $x = 1$ 을 대입하면

$$1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{19} + a_{20} \cdots \textcircled{㉠}$$

또, 이 식에 $x = -1$ 을 대입하면

$$1 = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots - a_{19} + a_{20} \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡}$ 을 하면 $2 = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{20})$

$$\therefore a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{20} = 1$$

44. 삼차항의 계수가 1인 삼차다항식 $f(x)$ 에 대하여 $f(-1) = f(1) = f(2) = 3$ 일 때 $f(-2)$ 의 값은?

① -5

② -6

③ -7

④ -8

⑤ -9

해설

$$f(x) = (x+1)(x-1)(x-2) + 3$$

$$\therefore f(-2) = -9$$

해설

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \text{라 하면}$$

$$\text{i) } f(-1) = 3 \text{에서 } a - b + c - 1 = 3$$

$$\text{ii) } f(1) = 3 \text{에서 } a + b + c + 1 = 3$$

$$\text{iii) } f(2) = 3 \text{에서 } 4a + 2b + c + 8 = 3$$

위의 세식을 연립하여 풀면,

$$a = -2, b = -1, c = 5$$

$$\therefore f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 5$$

$$\therefore f(-2) = -8 - 8 + 2 + 5 = -9$$

45. x^{100} 을 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때, 나머지는?

① $100x + 101$

② $100x - 99$

③ $-100x - 99$

④ $-99x - 98$

⑤ $99x + 100$

해설

구하는 나머지를 $ax + b$ 라 하면

$$x^{100} = (x+1)^2 Q(x) + ax + b$$

x^{100} 을 $x+1$ 로 나누면 나머지는 1이므로

$$x^{100} = (x+1)^2 Q(x) + a(x+1) + 1 \quad (\Rightarrow a+1=b)$$

$$x^{100} - 1 = (x+1) \{ (x+1)Q(x) + a \}$$

$$(x^2)^{50} - 1 = (x+1) \{ (x+1)Q(x) + a \}$$

$$(x^2 - 1) \{ (x^2)^{49} + (x^2)^{48} + \cdots + x^2 + 1 \}$$

$$= (x+1) \{ (x+1)Q(x) + a \}$$

$$(x+1)(x-1) \{ (x^2)^{49} + (x^2)^{48} + \cdots + x^2 + 1 \}$$

$$= (x+1) \{ (x+1)Q(x) + a \}$$

$$(x-1) \{ (x^2)^{49} + (x^2)^{48} + \cdots + x^2 + 1 \} = (x+1)Q(x) + a$$

양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$(-1-1)(1^{49} + 1^{48} + \cdots + 1 + 1) = a$$

$$a = -100, a+1=b \text{에서 } b = -99$$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $-100x - 99$

46. x^8 을 $x-2$ 로 나눌 때의 몫과 나머지가 각각 $q_1(x)$, $\sqrt{r_1}$ 이고, $q_1(x)$ 를 $x-2$ 로 나눌 때의 몫과 나머지가 각각 $q_2(x)$, $\sqrt{r_2}$ 일 때, $\frac{r_2}{r_1}$ 의 값은?

① $\frac{1}{8}$

② $\frac{1}{4}$

③ 16

④ 21

⑤ 64

해설

$$x^8 = (x-2)q_1(x) + \sqrt{r_1} \dots\dots ①$$

$$q_1(x) = (x-2)q_2(x) + \sqrt{r_2} \dots\dots ②$$

①에서 $x=2$ 를 양변에 대입하면

$$\sqrt{r_1} = 2^8, r_1 = 2^{16}$$

$$\begin{aligned} \text{또, } q_1(x) &= \frac{x^8 - \sqrt{r_1}}{x-2} = \frac{x^8 - 2^8}{x-2} \\ &= (x^7 + 2x^6 + \dots + 2^7) \end{aligned}$$

②에서 $x=2$ 를 양변에 대입하면

$$q_1(2) = \sqrt{r_2}, r_2 = \{q_1(2)\}^2$$

$$\text{그런데 } q_1(2) = 8 \cdot 2^7 = 2^{10}$$

$$\therefore r_2 = 2^{20}$$

$$\text{따라서, } \frac{r_2}{r_1} = \frac{2^{20}}{2^{16}} = 2^4 = 16$$

47. x 에 대한 다항식 $f(x)$ 를 $2x-1$ 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 -2 이다. 다항식 $xf(x)$ 를 $x - \frac{1}{2}$ 로 나눈 몫과 나머지를 차례로 적은 것은?

① $2xQ(x) - 2, -1$

② $2xQ(x) - 1, -1$

③ $\frac{1}{2}xQ(x) - 2, 1$

④ $\frac{1}{2}xQ(x) - 1, 1$

⑤ $\frac{1}{2}xQ(x) + 1, 2$

해설

$$f(x) = (2x - 1)Q(x) - 2$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)2Q(x) - 2$$

$$xf(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)2xQ(x) - 2x$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)2xQ(x) - 2\left(x - \frac{1}{2}\right) - 1$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)\{2xQ(x) - 2\} - 1$$

48. x 에 관한 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 + 1$ 로 나누면 나머지가 $x + 1$ 이고, $x - 1$ 로 나누면 나머지가 4이다. 이 다항식 $f(x)$ 를 $(x^2 + 1)(x - 1)$ 로 나눌 때의 나머지의 상수항을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 2

해설

$f(x)$ 를 $(x^2 + 1)(x - 1)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax^2 + bx + c$ (단, a, b, c 는 상수)라고 하면,

$$f(x) = (x^2 + 1)(x - 1)Q(x) + ax^2 + bx + c$$

그런데 $f(x)$ 를 $x^2 + 1$ 로 나누면 나머지가 $x + 1$ 이므로

$$f(x) = (x^2 + 1)(x - 1)Q(x) + a(x^2 + 1) + (x + 1)$$

또 $f(x)$ 를 $x - 1$ 로 나누면 나머지가 4이므로

$$f(1) = 2a + 2 = 4 \text{에서 } a = 1$$

$$\text{따라서 } ax^2 + bx + c = a(x^2 + 1) + x + 1 = x^2 + x + 2$$

$\therefore$ 구하는 나머지의 상수항은 2

49. 다음은 다항식 $x^{2n} + 1 + (x+1)^{2n}$ 이 $x^2 + x + 1$ 로 나누어떨어지지 않게 하는 자연수 n 을 구하는 과정이다. () 에 알맞은 수를 차례대로 나열한 것은?

ω 가 다항식 $x^2 + x + 1 = 0$ 을 만족하는 근이라고 하면 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

$$\therefore \omega^3, \omega \neq 1$$

(i) $n = 3k (k = 0, 1, 2, \dots)$ 이면

$$\omega^{2n} + 1 + (\omega + 1)^{2n} = (\ominus) \neq 0$$

(ii) $n = 3k + 1 (k = 0, 1, 2, \dots)$ 이면

$$\omega^{2n} + 1 + (\omega + 1)^{2n} = (\omin�)$$

(iii) $n = 3k + 2 (k = 0, 1, 2, \dots)$ 이면

$$\omega^{2n} + 1 + (\omega + 1)^{2n} = 0$$

따라서 (i), (ii), (iii) 에서 구하는 n 은 ($\ominus$) 이다.

① 1, 0, $3k$

② 2, 1, $3k + 1$

③ 3, 0, $3k + 2$

④ 3, 0, $3k$

⑤ 2, 1, $3k$

해설

(i) $n = 3k$ 이면

$$\begin{aligned} & \omega^{2n} + 1 + (\omega + 1)^{2n} \\ &= \omega^{6k} + 1 + (\omega + 1)^{6k} \\ &= \omega^{6k} + 1 + (-\omega^2)^{6k} \\ &= (\omega^3)^{2k} + 1 + (\omega^3)^{4k} \\ &= 1 + 1 + 1 (\because \omega^3 = 1) = (3) \neq 0 \end{aligned}$$

(ii) $n = 3k + 1$ 이면

$$\begin{aligned} & \omega^{2n} + 1 + (\omega + 1)^{2n} \\ &= \omega^{6k} + 2 + 1 + (\omega + 1)^{6k} + 2 \\ &= \omega^{6k} \cdot \omega^2 + 1 + (-\omega^2)^{6k} + 2 \\ &= \omega^2 + 1 + (-\omega^2)^{6k} (-\omega^2)^2 \\ &= \omega^2 + 1 + \omega = (0) \end{aligned}$$

(iii) $n = 3k + 2$ 이면

$$\omega^{2n} + 1 + (\omega + 1)^{2n} = 0$$

따라서 (i), (ii), (iii) 에서 구하는 n 은 $(3k)$ 이다.

50. $(x-2)^4 = a(x-3)^4 + b(x-3)^3 + c(x-3)^2 + d(x-3) + e$ 가 x 에 대한 항등식일 때, $2c - bd$ 의 값은?

① -8

② -4

③ 0

④ 4

⑤ 8

해설

x 에 대한 항등식 이므로 x 에 대한 적당한 수를 넣어 식을 만든다.

$$\text{i) } x = 3 \Rightarrow e = 1$$

$$\text{ii) } x = 2 \Rightarrow a - b + c - d + 1 = 0$$

$$\text{iii) } x = 4 \Rightarrow a + b + c + d + 1 = 16$$

$$\text{iv) } x = 4 \Rightarrow 16a - 8b + 4c - 2d + 1 = 1$$

$$\text{v) } x = 5 \Rightarrow 16a + 8b + 4c - 2d + 1 = 1$$

위 5개의 식을 연립하여 a, b, c, d 의 값을 구한다.

$$a = 1, b = 4, c = 6, d = 4, e = 1$$

$$\therefore 2c - bd = -4$$

해설

$$x - 2 = t \text{ 라 하면 } x - 3 = t - 1$$

$$(\text{준식}) : t^4 = a(t-1)^4 + b(t-1)^3 + c(t-1)^2 + d(t-1) + e$$

다음처럼 조립제법으로 $t-1$ 로 계속 나눌 때, 나오는 나머지가 순서대로 e, d, c, b 이고 마지막 몫이 a 이다.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \underline{1} = e \\ & & 1 & 2 & 3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 2 & 3 & \underline{4} = d \\ & & 1 & 3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 3 & \underline{6} = c \\ & & 1 & \end{array}$$

$$a = 1 \quad \underline{4} = b$$

$$\therefore 2c - bd = -4$$