1. x^2-2x-y^2+2y를 인수분해하였더니, $(x+ay)(x-by+c)$가 되었다. 이 때, $a,\ b,\ c$를 순서대로 쓴 것은?

① $-1,\ 0,\ 1$ ② $-1,\ 1,\ 2$ ③ $-2,\ -1,\ 1$

④ $-1,\ -1,\ -2$ ⑤ $-1,\ 2$

해설

$$x^2-2x-y^2+2y=(x+y)(x-y)-2(x-y)$$
$$=(x-y)(x+y-2)$$
$$\therefore\ a=-1,\ b=-1,\ c=-2$$

2. $(a-b+c)(a+b-c)$를 전개한 식은?

① $a^2+b^2+c^2-2bc$　② $a^2-b^2+c^2-2bc$
③ $a^2-b^2-c^2+2bc$　④ $a^2+b^2-c^2-2bc$
⑤ $a^2+b^2+c^2+2bc$

해설

$(a-b+c)(a+b-c)$
$=\{a-(b-c)\}\{a+(b-c)\}$
$=a^2-(b-c)^2$
$=a^2-b^2-c^2+2bc$

3. $x^4+4x^3-2x^2+ax+b$가 이차식의 완전제곱식이 될 때, 상수 a, b의 값은?

① $a=12,\ b=9$
② $a=-12,\ b=9$
③ $a=12,\ b=-9$
④ $a=-12,\ b=-9$
⑤ $a=9,\ b=12$

해설

$x^4+4x^3-2x^2+ax+b=(x^2+px+q)^2$으로 놓으면
이 식의 우변은
$x^4+2x^2(px+q)+(px+q)^2$
$=x^4+2px^3+(p^2+2q)x^2+2pqx+q^2$
좌변과 계수를 비교하면
$2p=4,\ p^2+2q=-2$
$p=2,\ q=-3$에서
$a=2pq=-12,\ b=q^2=9$

4. $x^3-6x^2+11x-6$을 인수분해 하면?

① $(x+1)(x-2)(x+3)$
② $(x-1)(x+2)(x+3)$
③ $(x-1)(x-2)(x-3)$
④ $(x+1)(x+2)(x-3)$
⑤ $(x-1)(x-2)(x+3)$

해설

인수정리를 이용하면
$f(1)=0$, $f(2)=0$, $f(3)=0$이므로
(준식)$=(x-1)(x-2)(x-3)$

5. $(a+1)(a^2-a+1)=a^3+1$을 이용하여 $\dfrac{1999^3+1}{1998\times1999+1}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2000

해설

$a=1999$라 하면

$1998\times1999+1=(a-1)a+1=a^2-a+1$

$$\therefore \frac{1999^3+1}{1998\times1999+1}=\frac{a^3+1}{a^2-a+1}$$
$$=\frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a+1}$$
$$=a+1=2000$$

6. 두 다항식 x^3-3x^2+2x, $x^4-4x^3+4x^2$ 의 최대공약수와 최소공배수를 각각 $f(x), g(x)$ 라 할 때, $f(3)+g(3)$ 의 값을 구하면?

① 18　　② 19　　③ 20　　④ 21　　⑤ 22

해설

$x^3-3x^2+2x=x(x-2)(x-1)$

$x^4-4x^3+4x^2=x^2(x-2)^2$

$\therefore f(x)=x(x-2), g(x)=x^2(x-1)(x-2)^2$

$\therefore f(3)+g(3)=3+18=21$

7. 실수 x, y에 대하여, 등식 $2x+y+(x-3y)i=3+2i$가 성립할 때, $\frac{x}{y}$의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{11}$ ② 11 ③ 7 ④ -7 ⑤ -11

해설

$2x+y=3$, $x-3y=2$ 이므로

$x=\frac{11}{7}$, $y=-\frac{1}{7}$

$\therefore \frac{x}{y}=\frac{11}{7}\times-\frac{7}{1}=-11$

8. 등식 $\dfrac{a}{1+i}+\dfrac{b}{1-i}=-5$를 만족하는 두 실수 $a+b$의 값을 구하시오
(단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -10

해설

주어진 식의 양변에 $(1+i)(1-i)$를 곱하면
$a(1-i)+b(1+i)=-10,\ (a+b)+(b-a)i=-10$
$\therefore a+b=-10,\ b-a=0$

9. $16a^4 - 250ab^3$ 의 인수가 아닌 것은?

① a ② $2a-5b$

③ $2a(2a-5b)$ ④ $4a^2+10ab+25b^2$

⑤ $2a(2a+5b)$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= 2a(8a^3-125b^3)\\ &= 2a\{(2a)^3-(5b)^3\}\\ &= 2a(2a-5b)(4a^2+10ab+25b^2)\end{aligned}$$

10. 가로의 길이가 $x$cm, 세로의 길이가 y cm, 높이가 $z$cm 인 직육면체에서 $x+y+z=10,\ x^2+y^2+z^2=46$ 일 때, 이 직육면체의 겉넓이는 몇 cm^2 인가?

① $45\,\text{cm}^2$　② $50\,\text{cm}^2$　③ $54\,\text{cm}^2$
④ $58\,\text{cm}^2$　⑤ $60\,\text{cm}^2$

해설

공식 $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$ 을 이용하여
주어진 조건을 대입하면 $xy+yz+zx=27$
겉넓이는 $2(xy+yz+zx)$ 이므로 54

11. 다항식 $f(x) = x^4 + ax^2 + x + 2$를 $g(x) = x^3 + bx + 2$로 나눈 나머지가 $R(x)$라 한다. $g(x)$와 $R(x)$의 최대공약수가 $x + 2$일 때, ab의 값은?

① 9　② 10　③ 12　④ 15　⑤ 16

해설

$f(x) = g(x) \cdot Q(x) + R(x)$에서
$g(x)$ 와 $R(x)$의 최대공약수 $x + 2$ 는
$f(x)$ 와 $g(x)$의 최대공약수와 같다.
($\because$ 유클리드 호제법)
$f(-2) = 16 + 4a = 0, a = -4$
$g(-2) = -8 - 2b + 2 = 0, b = -3$
$\therefore\ ab = 12$

12. 복소수 $(1+i)x^2-(2+i)x-3-2i$를 제곱하면 음의 실수가 된다고 할 때, 실수 x의 값은?

① -1　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

(준식)$=x^2-2x-3+(x^2-x-2)i$
이것을 제곱해서 음의 실수가 되려면 순허수이어야 하므로
$x^2-2x-3=0\cdots$㉠, $x^2-x-2\neq 0\cdots$㉡
㉠에서 $x=3,\ x=-1$
이 중에서 ㉡를 만족하는 것은 $\therefore\ x=3$

13. 등식 $(x+yi)(z-i)=10$을 만족하는 자연수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : 3개

해설

$(xz+y)+(yz-x)i=10$

$xz+y=10 \cdots$ ㉠, $yz-x=0 \cdots$ ㉡

㉡을㉠에 대입

$y(z^2+1)=10$

z를 기준으로 하여 순서쌍을 구해보면

$(5,\ 5,\ 1)$, $(4,\ 2,\ 2)$, $(3,\ 1,\ 3)$ 3개

14. 등식 $(x^2 - 3x + 1) + (y^2 - 1)i = -1 + 3i$을 만족하는 실수 x, y에 대하여 xy의 최댓값은?

① -4 ② -2 ③ -1 ④ 2 ⑤ 4

해설

실수부와 허수부로 나누어 생각한다.

$\therefore\ x^2 - 3x + 1 = -1 \quad y^2 - 1 = 3$

$x = 1$ 또는 $2y = \pm 2$

$\therefore\ (xy$의 최댓값$) = 4$

15. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\frac{x+i}{x-i}$ 를 만족하는 실수 x의 값은 ?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ -5

해설

$(1+\sqrt{3}i)(x-i)=2(x+i)$

$(x+\sqrt{3})+(\sqrt{3}x-1)i=2x+2i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x+\sqrt{3}=2x,\ \ \sqrt{3}x-1=2$

$\therefore\ x=\sqrt{3}$

16. 복소수 $z = 1+4i$일 때, $\overline{x(2-i)}+y(1-i) = \bar{z}$가 성립하도록 하는 실수 $x,\ y$에 대하여 $x+y$의 값은? (단, $\bar{z}$는 복소수 z의 켤레복소수이고, $i = \sqrt{-1}$)

① 0 ② 2 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$z = 1+4i$이므로 $\bar{z} = 1-4i$이다.

주어진 등식의 좌변을 정리하면

$$\begin{aligned}\overline{x(2-i)}+y(1-i) &= \bar{x}\overline{(2-i)}+y(1-i)\\ &= x(2+i)+y(1-i)\end{aligned}$$

$\therefore\ x(2+i)+y(1-i) = 1-4i$

$(2x+y)+(x-y)i = 1-4i$

복소수가 서로 같을 조건에서

$2x+y = 1,\ x-y = -4$

위 두 식을 연립하여 풀면 $x = -1,\ y = 3$

$\therefore\ x+y = 2$

17. $i^2 = -1$ 일 때, $(n+i)^4$ 이 정수가 되도록 하는 정수 n 의 개수는?

① 0 개　　② 1 개　　③ 2 개　　④ 3 개　　⑤ 4 개

해설

$(n+i)^4 = \{(n+i)^2\}^2 = (n^2 - 1 + 2ni)^2$
이것이 정수가 되려면 $n^2 - 1 + 2ni$ 가 정수가 되거나 순허수가 되어야 한다.
i) $n = 0$ 일 때 성립
ii) $n^2 - 1 = 0$, $n = \pm 1$ 일 때 성립
따라서 구하는 정수의 개수는 3 개

해설

$(n+i)^4 = n^4 - 6n^2 + 1 + i(4n^3 - 4n)$
이것이 실수이려면, $4n^3 - 4n = 0$, $n = 0$, ± 1
이 때 $(n+i)^4$ 은 모두 정수가 되므로, $(n+i)^4$ 이 정수가 되도록 하는 정수 n 의 개수는 3 개다.

18. 복소수 $x=a+bi$(a, b는 실수)가 $x^2=3+4i$, $x^3=2+11i$를 만족할 때 $a+b$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$x^3 = x^2 \times x$$
$$= (3+4i)(a+bi)$$
$$= (3a-4b)+(4a+3b)i$$

$(3a-4b)+(4a+3b)i = 2+11i$

$3a-4b=2, 4a+3b=11$

$\therefore a=2, b=1$ 이므로 $a+b=3$

해설

$x = \dfrac{x^3}{x^2} = a+bi$

$$\frac{2+11i}{3+4i} = \frac{(2+11i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}$$
$$= \frac{50+25i}{25}$$
$$= 2+i$$

$\therefore a=2, b=1$

19. 두 실수 a, b 에 대하여 복소수 $z = a + bi$ 와 켤레복소수 $\bar{z} = a - bi$ 의 곱 $z \cdot \bar{z} = 9$ 일 때, $\frac{1}{2}\left(z + \frac{9}{z}\right)$ 를 간단히 하면?

① b　　② $2b$　　③ 0　　④ $5a$　　⑤ a

해설

$z \cdot \bar{z} = 9$ 이므로 $\bar{z} = \frac{9}{z}$

$\therefore \frac{1}{2}\left(z + \frac{9}{z}\right) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$

$z + \bar{z} = a + bi + a - bi = 2a$ 이므로

$\frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2} \times 2a = a$

20. $z \cdot \overline{z} = 1$ 을 만족하는 복소수 $z_1,\ z_2$ 에 대하여 $z_1 + z_2 = 2$ 일 때, $z_1 \cdot z_2$ 의 값은? (단, $\overline{z_1},\ \overline{z_2}$ 는 각각 $z_1,\ z_2$ 의 켤레복소수이다.)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$
$(a,\ b,\ c,\ d$ 는 실수)로 놓으면
$\overline{z_1} = a - bi$, $\overline{z_2} = c - di$ 이므로
$z_1 \cdot \overline{z_1} = 1$ 에서
$a^2 + b^2 = 1 \cdots$ ㉠
$z_2 \cdot \overline{z_2} = 1$ 에서
$c^2 + d^2 = 1 \cdots$ ㉡
$z_1 + z_2 = 2$ 에서 $a + c + (b + d)i = 2$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$a + c = 2,\ b + d = 0$
㉠ − ㉡을 하면
$a^2 - c^2 + b^2 - d^2 = 0$
$(a + c)(a - c) + (b + d)(b - d) = 0$
그런데 $b + d$ 는 0이므로 $(a + c)(a - c) = 0$
$\therefore\ a = -c$ 또는 $a = c$
그런데 $a + c = 2$ 이므로 $a = c = 1$
㉠, ㉡에 $a = c$, $c = 1$ 을 각각 대입하면 $d = b = 0$
따라서 $z_1 = 1$, $z_2 = 1$ 이므로
$z_1 \cdot z_2 = 1$

21. $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+a$가 이차식의 완전제곱이 되도록 a의 값을 정하면?

① 4　② 8　③ 12　④ 15　⑤ 16

해설

(준식)$= (x^2-8x+7)(x^2-8x+15)+a$
여기서, $x^2-8x+7 = X$로 놓으면
(준식) $= X(X+8)+a$
$= X^2+8X+a = (X+4)^2+a-16$
따라서 $a=16$

22. $a(a+1)=1$ 일 때, $\dfrac{a^4-a^2}{a^6-1}$ 의 값은?

① 1　　② $\dfrac{1}{2}$　　③ $\dfrac{1}{3}$　　④ $\dfrac{1}{4}$　　⑤ $\dfrac{1}{5}$

해설

$a(a+1)=1$ 에서

$a^2=-a+1$

$$\begin{aligned} a^4 &= (-a+1)^2 = a^2-2a+1 \\ &= (-a+1)-2a+1 = -3a+2 \\ a^6 &= a^4 \times a^2 = (-3a+2)(-a+1) \\ &= 3a^2-5a+2 = 3(-a+1)-5a+2 \\ &= -8a+5 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{a^4-a^2}{a^6-1} = \frac{-3a+2-(-a+1)}{-8a+5-1} = \frac{-2a+1}{-8a+4} = \frac{-2a+1}{4(-2a+1)} = \frac{1}{4}$$

23. 다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지는 5이고, 몫 $Q(x)$를 다시 $x+3$으로 나누면 나머지가 3이다. 이때, $f(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지는?

① 10　② -10　③ 9　④ -9　⑤ 8

해설

나머지정리에 의해 $f(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지는 $f(-3)$이다.
$f(x)=(x-2)Q(x)+5$에서
$x=-3$을 대입하면 $f(-3)=(-3-2)Q(-3)+5$
$Q(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지가 3이므로 $Q(-3)=3$
$\therefore\ f(-3)=-10$

24. $xy(x-y)+yz(y-z)+zx(z-x)$을 인수분해하면?

① $-(x-y)(y-z)(z-x)$　② $-(x+y)(y-z)(z-x)$
③ $-(x-y)(y+z)(z-x)$　④ $-(x-y)(y-z)(z+x)$
⑤ $-(x-y)(y+z)(z+x)$

해설

(준 식)$= xy(x-y)+zx(z-x)+yz(y-z)$
$= yx^2-y^2x+z^2x-zx^2+yz(y-z)$
$= (y-z)x^2-(y^2-z^2)x+yz(y-z)$
$= (y-z)x^2-(y+z)(y-z)x+yz(y-z)$
$= (y-z)\{x^2-(y+z)x+yz\}$
$= (y-z)(x-y)(x-z)$
$= -(x-y)(y-z)(z-x)$

25. 세 양수 $a,\ b,\ c$가 $a^3+b^3+c^3=3abc$를 만족시킬 때 $a,\ b,\ c$를 세 변으로 하는 삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}$이라고 한다. 이 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$에서
$a>0,\ b>0,\ c>0$이므로 $a+b+c\neq 0$
$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$
$\therefore\ \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$
$\therefore\ a=b=c$ ($\because a,\ b,\ c$는 실수)
따라서 $a,\ b,\ c$를 세 변으로 하는 삼각형은 정삼각형이고 그 넓이가 $\frac{\sqrt{3}}{4}$이므로 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}$,
$a^2=1$
$\therefore\ a=b=c=1$
$\therefore\ a+b+c=3$

26. $1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-\cdots+99^2$을 계산하여라.

① 99　　② 100　　③ 4950

④ 5050　　⑤ 10000

해설

$$
\begin{aligned}
&1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-\cdots+99^2\\
&=99^2-98^2+97^2-96^2+\cdots+3^2-2^2+1^2\\
&=(99^2-98^2)+(97^2-96^2)+\\
&\quad\cdots+(3^2-2^2)+1^2\\
&=(99-98)(99+98)+(97-96)(97+96)+\cdots+(3-2)(3+2)+1\\
&=(99+98)+(97+96)+\cdots+(3+2)+1\\
&=1+2+3+\cdots+99\\
&=(1+99)+(2+98)+\cdots+(49+51)+50\\
&=4950
\end{aligned}
$$

27. 실수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $[a,\ b,\ c] = a^2 + bc$라 하고 $x + y + z = 10$, $x^2 + y^2 + z^2 = 12$일 때, $[x,\ 2y,\ z] + [y,\ 2z,\ x] + [z,\ 2x,\ y]$의 값은?

① 10　② 22　③ 88　④ 100　⑤ 144

해설

$$
\begin{aligned}
&[x,\ 2y,\ z] + [y,\ 2z,\ x] + [z,\ 2x,\ y] \\
&= x^2 + 2yz + y^2 + 2zx + z^2 + 2xy \\
&= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx \\
&= (x + y + z)^2 = 100
\end{aligned}
$$

28. 두 다항식 $x^2+4x+2k$와 x^2+3x+k의 최대공약수가 x에 대한 일차식일 때, 상수 k값들의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$A=x^2+4x+2k,\ B=x^2+3x+k$라고 하면 $A-B=x+k$
$A-B$는 최대공약수 G를 인수로 갖고,
주어진 조건에서 두 식의 최대공약수가 일차식이므로
두 식의 최대공약수는 $x+k$이다.
$A,\ B$는 최대공약수 $x+k$를 인수로 가지므로
A에 $x=-k$를 대입하면
$k^2-2k=0,\ k(k-2)=0$
$\therefore\ k=0$ 또는 $k=2$
따라서, k값들의 합은 2이다.

29. x에 관한 세 개의 다항식 $A(x) = x^4 - 10x^2 + 9$, $B(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$, $C(x) = x(x-3)(x^2+a) - (x-3)(x^2+b) + 8$의 최대공약수가 이차식일 때, $a+b$의 값은?

① 4　　② -4　　③ 8　　④ -8　　⑤ 2

해설

$A(x) = x^4 - 10x^2 + 9 = (x-1)(x+1)(x-3)(x+3)$

$B(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

$= (x-1)(x+1)(x-3)(x+2)$

$\therefore$ 두 다항식의 최대공약수는 $(x-1)(x+1)(x-3)$

그런데 다항식 $C(x)$는 $x-3$으로 나누어떨어지지 않으므로

세 다항식의 최대공약수는 $(x-1)(x+1)$이다.

$\therefore$ 다항식 $C(\pm 1) = 0$

$\therefore\ C(1) = -a + b + 4 = 0,\ C(-1) = a + b + 4 = 0$

$\therefore\ a = 0,\ b = -4$에서 $a + b = -4$

30. $x^2 + ax + b,\ x^2 + bx + a$ 의 최대공약수가 x 의 일차식일 때, 최소공배수는?

① $(x-2)(x-a)(x-b)$　② $(x+2)(x-a)(x-b)$

③ $(x+1)(x+a)(x+b)$　④ $(x+1)(x-a)(x-b)$

⑤ $(x-1)(x-a)(x-b)$

해설

$$\begin{cases} x^2 + ax + b \ \cdots ㉠ \\ x^2 + bx + a \ \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠ − ㉡ : $(a-b)(x-1)$

㉠, ㉡ 에서 $a \neq b$ 이므로 최대공약수는 $x-1$ 이다.

$1 + a + b = 0,\ a = -1 - b,\ b = -1 - a$

이 때, ㉠은 $x^2 - (1+b)x + b = (x-1)(x-b)$

㉡은 $x^2 - (1+a)x + a = (x-1)(x-a)$

여기서, $a \neq b$ 이므로 $x-a$ 와 $x-b$ 는 서로 소이다.

따라서, 구하는 최소공배수는 $(x-1)(x-a)(x-b)$