**1.** 두 함수 $f(x)=x^2-x$, $g(x)=2x+1$에 대하여 $(f\circ g\circ f)(1)$의 값은?

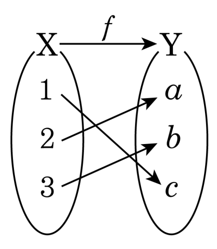
① $-2$ ② $-1$ ③ $0$ ④ $1$ ⑤ $2$

해설

$f(1)=0$이므로 $(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(0)=1$

$\therefore\ (f\circ g\circ f)(1)=f(1)=0$

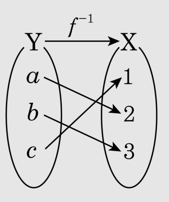
**2.** 두 집합 $X=\{1,2,3\}$, $Y=\{a,b,c\}$에 대하여 함수 $f:X\to Y$가 그림과 같이 주어질 때, $f^{-1}(a)+f^{-1}(c)$의 값은 얼마인가?




① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

역함수 $f^{-1}$는 그림과 같으므로




$f^{-1}(a)+f^{-1}(c)=2+1=3$

**3.** 함수 $y = -x - 1$의 역함수의 그래프에서 $x$절편을 $a$, $y$절편을 $b$라 할 때, $ab$의 값은 얼마인가?

① $-2$　　② $-1$　　③ $1$　　④ $2$　　⑤ $3$

해설

$y = -x - 1$에서 $x = -y - 1$
여기서 $x$와 $y$를 바꾸면 역함수는 $y = -x - 1$
따라서 $x$절편 $a = -1$, $y$절편 $b = -1$이므로
$ab = 1$

**4.** 함수 $f(x) = 2ax - a + 2$에 대하여 $f^{-1}(-7) = 2$일 때, 상수 $a$의 값은 얼마인가?

① $-5$ ② $-3$ ③ $-1$ ④ $1$ ⑤ $3$

해설

$f^{-1}(-7) = 2$이므로
역함수의 정의에 의해서
$f(2) = -7$, $f(2) = 2a \times 2 - a + 2 = -7$, $3a = -9$
$\therefore a = -3$

**5.** 함수 $f(x) = 2x - 3$ 에 대하여 $f^{-1}(2)$ 의 값은?

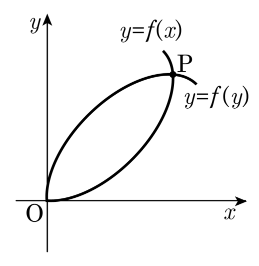
① $\frac{3}{2}$　② $2$　③ $\frac{5}{2}$　④ $3$　⑤ $\frac{7}{2}$

해설

$f^{-1}(2) = a$ 라 하면, $f(a) = 2$ 이므로 $2a - 3 = 2$

$\therefore\ a = \frac{5}{2}$

**6.** 다음 그림과 같은 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $x=f(y)$ 의 교점 $P$ 가 될 수 있는 점은 무엇인가?




① $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$　　② $\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$

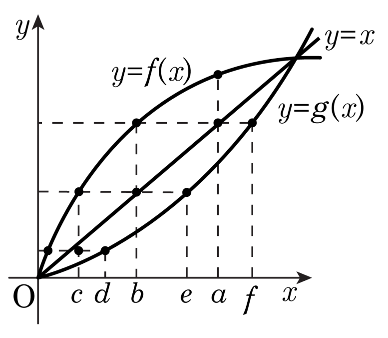
③ $(1,\ 2)$　　④ $(2,\ 2)$

⑤ $(2,\ 3)$

해설

$y=f(x)$ 와 $x=f(y)$ 는
서로 역함수의 관계이므로 두 그래프의
교점 $P$ 는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와
직선 $y=x$ 의 교점과 같다.
따라서 점 $P$ 는 직선 $x=y$ 위의 점이므로
$(2,\ 2)$ 이다.

**7.** 다음 그림은 세 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=x$의 그래프이다. 이때, $(f\circ f\circ g)^{-1}(a)$의 값은?




① $a$ ② $b$ ③ $c$ ④ $d$ ⑤ $e$

해설

$(f\circ f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}\circ f^{-1}\cdots\cdots$㉠이고
$f^{-1}(a)=k$라 하면 $f(k)=a$에서 $k=b$
$\therefore\ f^{-1}(a)=b\cdots\cdots$㉡
$f^{-1}(b)=l$이라 하면 $f(l)=b$에서 $l=c$
$\therefore\ f^{-1}(b)=c\cdots\cdots$㉢
$g^{-1}(c)=m$이라 하면 $g(m)=c$에서 $m=d$
$\therefore\ g^{-1}(c)=d\cdots\cdots$㉣
㉠, ㉡, ㉢, ㉣에서

$$\begin{aligned}(f\circ f\circ g)^{-1}&=(g^{-1}\circ f^{-1}\circ f^{-1})(a)\\&=g^{-1}[f^{-1}\{f^{-1}(a)\}]\\&=g^{-1}\{f^{-1}(b)\}=g^{-1}(c)=d\end{aligned}$$

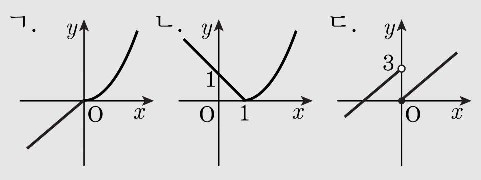
**8.** 다음 보기는 실수 전체의 집합 $R$ 에서 $R$ 로의 함수 $f(x)$ 를 나타낸 것이다. 역함수가 존재하는 것을 <u>모두</u> 고르면 무엇인가?

> ㉠ $f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \ge 0) \\ x & (x < 0) \end{cases}$
>
> ㉡ $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & (x \ge 1) \\ 1 - x & (x < 1) \end{cases}$
>
> ㉢ $f(x) = \begin{cases} x & (x \ge 0) \\ x + 3 & (x < 0) \end{cases}$

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉢
④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

함수 $f(x)$가 일대일대응일 때
역함수가 존재한다.
이 때, 보기의 그래프는 다음 그림과 같다.




따라서, 함수 ㄱ이 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

**9.** 실수 전체의 집합 $R$ 에서 $R$ 로의 함수

$f(x)=\begin{cases} x+k & (x \geq 0) \\ -x+k & (x<0) \end{cases}$ 가 $f^{-1}(2)=-3$ 을 만족시킬 때, $f(5)$ 의

값은 얼마인가?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$f^{-1}(2)=-3$ 에서 $f(-3)=2$ 이므로

$f(-3)=3+k=2$

$\therefore\ k=-1$ 이므로 $f(x)=\begin{cases} x-1 & (x \geq 0) \\ -x-1 & (x<0) \end{cases}$

$\therefore\ f(5)=5-1=4$

**10.** 함수 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 존재하고 $f(5) = -2$, $(f \circ f)(x) = x$ 일 때, $f^{-1}(5)$ 의 값은?

① $-5$ ② $-2$ ③ $1$ ④ $2$ ⑤ $5$

해설

$(f \circ f)(x) = x$ 에서 $f = f^{-1}$
따라서 $f^{-1}(5) = f(5) = -2$

**11.** 실수 전체의 집합에서 $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$로 정의된 함수 $f$에 대하여 $(f \circ f \circ f)(x) = 2$가 되는 $x$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x + 1\right) + 1$$
$$= \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$$
$$(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}\right) + 1$$
$$= \frac{1}{8}x + \frac{7}{4} = 2$$
$\therefore\ x = 2$

**12.** $f\left(\frac{2x}{-x+2}\right)=x^2-3x$ 일 때, $f(2)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-2$

해설

$f\left(\frac{2x}{-x+2}\right)=x^2-3x$ 일 때

$\frac{2x}{-x+2}=2$ 에서 $2x=2(-x+2)$ , $2x=-2x+4$

$\therefore\ x=1$

이것을 주어진 식에 대입하면

$f\left(\frac{2}{-1+2}\right)=1-3$

$\therefore\ f(2)=-2$

**13.** 두 함수 $f(x) = x + k$, $g(x) = x^2 + 1$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립하도록 상수 $k$ 의 값을 정하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$f \circ g = g \circ f$ 에서 $x^2 + 1 + k = x^2 + 2kx + k^2 + 1$
즉 $2kx + k^2 - k = 0$
모든 $x$에 대하여 성립하므로 $k = 0$

**14.** 함수 $f(x)$가 $f(3x+1)=2x-1$을 만족할 때, 함수 $f(x)$ 를 구하면?

① $f(x)=\dfrac{x-1}{2}$　② $f(x)=\dfrac{3x+1}{2}$　③ $f(x)=\dfrac{x-2}{3}$
④ $f(x)=\dfrac{2x-5}{3}$　⑤ $f(x)=\dfrac{2x+3}{3}$

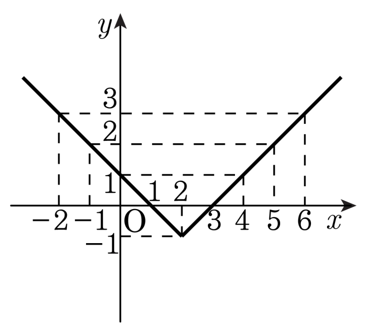
해설

$f(3x+1)=2x-1$에서 $3x+1=t$ 라고 놓으면 $x=\dfrac{t-1}{3}$ 이므로

$\therefore\ f(t)=2\cdot\dfrac{t-1}{3}-1=\dfrac{2t-5}{3}$

$\therefore\ f(x)=\dfrac{2x-5}{3}$

**15.** 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $f(f(x)) = 0$ 의 모든 근의 합을 구하여라.




▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$f(f(x)) = 0$ 에서 $f(x) = X$ 라 하면
$f(X) = 0$ 이므로 $X = 1$ 또는 $X = 3$
$X = 1$ 즉, $f(x) = 1$ 일 때, $x = 0, 4$
$X = 3$ 즉, $f(x) = 3$ 일 때, $x = -2, 6$
따라서, 모든 근의 합은 $0 + 4 + (-2) + 6 = 8$ 이다.

**16.** $f(x) = -2x+3,\ g(x) = 4x+1$ 일 때, $f \circ g \circ h = g$ 를 만족하는 일차함수 $h(x)$ 에 대하여 $h(2)$ 의 값을 구하면?

① $-3$　　② $-1$　　③ $0$　　④ $2$　　⑤ $3$

해설

$h(x) = ax + b$ 라고 놓고

$(g \circ h)(x) = 4(ax+b)+1 = 4ax+4b+1$

$$\begin{aligned}(f \circ (g \circ h))(x) &= -2(4ax+4b+1)+3 \\ &= -8ax-8b-2+3 \\ &= 4x+1\end{aligned}$$

$a = -\frac{1}{2}$ , $b = 0$

$h(x) = -\frac{1}{2}x$

$h(2) = -1$

**17.** $f(x)=x+1$ , $g(x)=3x-2$ 일 때, $(g\circ h)(x)=f(x)$ 를 만족시키는 함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $h(x)=\frac{1}{3}x+1$
② $h(x)=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$
③ $h(x)=x+\frac{1}{3}$
④ $h(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$
⑤ $h(x)=\frac{2}{3}x+1$

해설

$f(x)=x+1$ , $g(x)=3x-2$ 일 때,
$(g\circ h)(x)=f(x)$ 를 만족해야 하므로
$(g\circ h)(x)=g(h(x))=3h(x)-2$
$3h(x)-2=x+1$ , $3h(x)=x+3$
$\therefore h(x)=\frac{1}{3}x+1$

**18.** 함수 $f(x) = x+1$ 라 할 때, $f^{10}(2)$ 의 값을 구하여라. (단, $f^2 = f \circ f$, $f^n = f^{n-1} \circ f$ )

▶ 답:

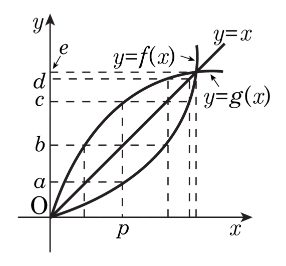
▷ 정답: 12

해설

$$\begin{aligned} f^2(x) &= (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x+1) \\ &= (x+1)+1 = x+2 \\ f^3(x) &= (f^2 \circ f)(x) = f^2(f(x)) = f^2(x+1) \\ &= (x+1)+2 = x+3 \\ f^4(x) &= (f^3 \circ f)(x) = f^3(f(x)) = f^3(x+1) \\ &= (x+1)+3 = x+4 \\ &\cdots \\ f^n(x) &= x+n \end{aligned}$$

$\therefore\ f^{10}(2) = 2+10 = 12$

**19.** 두 함수 $y = f(x)$ , $y = g(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, $(f \circ g)(p)$ 의 값은 얼마인가? (단, 점선은 $x$ 축 또는 $y$ 축에 평행하다.)




① $a$　　② $b$　　③ $c$

④ $d$　　⑤ $e$

해설

주어진 그림에서 $g(p) = c, f(c) = b$

$\therefore (f \circ g)(p) = f(g(p)) = f(c) = b$

**20.** 실수 전체의 집합 $R$ 에서 $R$ 로의 함수 $f(x) = ax + b|x|$ ($a, b$는 상수)가 역함수를 가질 조건은?

① $a^2 - b^2 < 0$　② $a^2 - b^2 > 0$　③ $a + b > 0$

④ $a - b > 0$　⑤ $a - b < 0$

해설

$$f(x) = \begin{cases} (a+b)x & (x \geq 0) \\ (a-b)x & (x < 0) \end{cases}$$

함수$f(x)$ 가 역함수를 가지려면
$f(x)$ 가 증가함수이거나 감소함수이어야 하므로
두 직선 $y = (a+b)x, y = (a-b)x$ 의 기울기의 부호가 같아야 한다.
$\therefore (a+b)(a-b) > 0,\ \ a^2 - b^2 > 0$

**21.** $x \neq 1$ 인 모든 실수에 대하여 $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ 로 정의된 함수 $f$ 에 대하여 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 $f^{-1}(x) = \dfrac{ax+b}{x+c}$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(x) = y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ 의 역함수는

$x = \dfrac{2y+1}{y-1}$ 에서

$x(y-1) = 2y+1,\ xy - x = 2y+1,\ xy - 2y = x+1$

$(x-2)y = x+1$

$\therefore\ y = \dfrac{x+1}{x-2} = f^{-1}(x)$

$\quad = \dfrac{ax+b}{x+c}$

즉, $a = 1,\ b = 1,\ c = -2$

$\therefore\ a+b+c = 0$

**22.** 1 보다 큰 실수 전체의 집합 $A$ 에서 $A$ 로의 함수 $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, $g(x) = \sqrt{2x-1}$ 에 대하여 $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(3)$ 의 값을 구하면?

① $\dfrac{3}{2}$ ② $\dfrac{7}{2}$ ③ $\dfrac{9}{2}$ ④ $\dfrac{5}{2}$ ⑤ $\dfrac{11}{2}$

해설

$(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f) = (f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ f) = g^{-1} \circ f$

$\Rightarrow (g^{-1} \circ f)(3) = g^{-1}(f(3)) = g^{-1}(2) = k$ 라고 하자.

$\Rightarrow g(k) = 2$

$\Rightarrow \sqrt{2k-1} = 2$

$\therefore k = \dfrac{5}{2}$

**23.** 두 함수 $f(x) = \frac{x-1}{x}$, $g(x) = 1-x$에 대하여 $g(x) = f^{-1}\left(\frac{9}{10}\right)$이 성립할 때, 이를 만족시키는 실수 $x$ 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-9$

해설

먼저 $f^{-1}(x)$ 를 구해보면

$y = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$

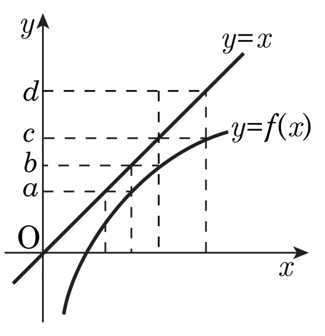
$\Rightarrow \quad x = 1 - \frac{1}{y}$

$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{1-x} = f^{-1}(x)$

$\therefore \quad f^{-1}\left(\frac{9}{10}\right) = 10$

$\Rightarrow \quad g(x) = 1 - x = 10 \quad x = -9$

**24.** 아래의 그림은 두 함수 $y=f(x)$ , $y=x$ 의 그래프이다. $f^{-1}(b)$ 의 값을 구하여라.




▶ 답 :

▷ 정답 : $c$

해설

$f^{-1}(b)=k$ 라 하면 $f(k)=b$
$f(c)=b$ 이므로 $k=c$
따라서 $f^{-1}(b)=c$

**25.** 점 $(2,\ 1)$ 을 지나는 일차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 일치할 때, $f(-2)$ 의 값은?

① $-5$ ② $-2$ ③ $0$ ④ $2$ ⑤ $5$

해설

$f = f^{-1}$ 이므로 $(f \circ f)(x) = x$

$f(x) = m(x-2)+1 = mx - 2m + 1\ (m \neq 0)$ 으로 놓으면

$f(f(x)) = m(mx - 2m + 1) - 2m + 1 = x$

$\therefore m^2x - 2m^2 - m + 1 = x$

즉, $m^2 = 1,\ -2m^2 - m + 1 = 0$ 이므로

$m = -1$

따라서 $f(x) = -x + 3$ 이고

$f(-2) = -(-2) + 3 = 5$ 이다.

**26.** 점 $(-1,\ -2)$를 지나는 일차함수 $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 일치할 때, $f(-3)$의 값은?

① $-6$　　② $-3$　　③ $0$　　④ $3$　　⑤ $6$

해설

$f=f^{-1}$이므로 $(f\circ f)(x)=x$
$f(x)=a(x+1)-2=ax+a-2\ (a\neq 0)$로 놓으면
$f(f(x))=a(ax+a-2)+a-2=x$
$\therefore a^2x+a^2-a-2=x$
즉, $a^2=1$, $a^2-a-2=0$이므로 $a=-1$
따라서 $f(x)=-x-3$이고
$f(-3)=-(-3)-3=0$이다.

**27.** 다음 보기의 함수 $f(x)$ 중 $(f \circ f \circ f)(x) = f(x)$ 가 성립하는 것을 모두 고른 것은?

**보기**

ㄱ $f(x) = x + 1$　　ㄴ $f(x) = -x$

ㄷ $f(x) = -x + 1$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

**해설**

ㄱ. $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(x+1))$
$= f((x+1)+1) = f(x+2)$
$= (x+2)+1 = x+3$
$\therefore (f \circ f \circ f)(x) \neq f(x)$

ㄴ. $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(-x))$
$= f(-(-x)) = f(x)$

ㄷ. $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(-x+1))$
$= f(-(-x+1)+1) = f(x)$

따라서 $(f \circ f \circ f)(x) = f(x)$ 가 성립하는 것은 ㄴ, ㄷ 이다.

**28.** $f\left(\dfrac{2x-1}{3}\right)=4-2x$ 일 때, $(f\circ f)(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

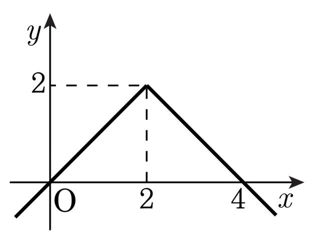
$\dfrac{2x-1}{3}=t$ 로 놓으면

$2x-1=3t$ 이므로 $x=\dfrac{3t+1}{2}$

$f(t)=4-2\cdot\dfrac{3t+1}{2}=-3t+3$

$\therefore (f\circ f)(2)=f(f(2))=f(-3)=12$

**29.** $y = f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 방정식 $(f \circ f)(x) = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는?




① 1 개　　② 2 개　　③ 3 개

④ 4 개　　⑤ 무수히 많다.

해설

$$f(x) = \begin{cases} y = x(x \le 2) & \cdots ㉠ \\ y = -x + 4(x > 2) & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서는 $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x) = x$

$\therefore x = 1$

㉡에서는 $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(-x+4)$

$= -x + 4$

$\therefore x = 3$

실근의 개수 : 2 개.

**30.** 함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & (x \geq 1) \\ -\sqrt{1-x} & (x < 1) \end{cases}$ 에 대하여 $f(x)$ 의 역함수가 존재할 때, $(f^{-1} \circ f^{-1})(x) = 1$ 일 때, $x$ 의 값을 구하면? (단, $f^{-1}(x)$ 은 $f(x)$ 의 역함수)

① $-2$ ② $-1$ ③ $0$ ④ $1$ ⑤ $2$

해설

$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & (x \geq 1) \\ -\sqrt{1-x} & (x < 1) \end{cases}$ 에서

$(f^{-1} \circ f^{-1})(x) = (f \circ f)^{-1}(x) = 1$

$(f \circ f)(1) = (f(f(1)) = f(0) = -1$

$\therefore\ x = -1$

**31.** 함수 $f(x) = x^2 - 4x + 6(x \geq 2)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점 사이의 거리를 구했을 때, 옳은 것은 무엇인가?

① 1　　② $\sqrt{2}$　　③ $\sqrt{3}$　　④ 2　　⑤ $\sqrt{5}$

해설

$y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점은
$y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같다.
$x^2 - 4x + 6 = x$ 에서
$x^2 - 5x + 6 = 0, (x-2)(x-3) = 0$
$\therefore x = 2$ 또는 $x = 3$
따라서 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의
두 교점은 $(2, 2), (3, 3)$ 이고,
이 두 교점 사이의 거리는
$\sqrt{(3-2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}$

해설

$x^2 - 4x + 6 = x$ ,
즉 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 의 두 근을 $\alpha, \beta$ 라 하면
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha + \beta = 5, \alpha\beta = 6$
따라서 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의
그래프의 두 교점은 $(\alpha, \alpha), (\beta, \beta)$ 사이의 거리는
$\sqrt{(\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2} = \sqrt{2}\sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}$
$= \sqrt{2}\sqrt{5^2 - 4 \cdot 6} = \sqrt{2}$

**32.** 함수 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 \ (x \geq 0)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할때, $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점 사이의 거리를 구하면?

① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ 3 ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

$x \geq 0$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프와
직선 $y = x$ 의 교점의 $x$ 좌표를 구하면
$\frac{1}{2}x^2 = x$ 에서 $x^2 - 2x = 0$ , $x(x-2) = 0$
$\therefore x = 0$ 또는 $x = 2$
따라서 두 교점의 좌표가 $(0,\ 0)$ , $(2,\ 2)$ 이므로
두 교점 사이의 거리는 $\sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$