

1. 두 함수 $f(x) = x^2 - x$, $g(x) = 2x + 1$ 에 대하여 $(f \circ g \circ f)(1)$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

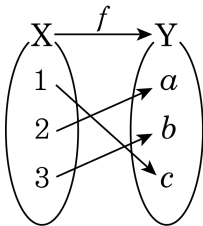
⑤ 2

해설

$$f(1) = 0 \text{ 이므로 } (g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(0) = 1$$

$$\therefore (f \circ g \circ f)(1) = f(1) = 0$$

2. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow Y$ 가 그림과 같이 주어질 때, $f^{-1}(a) + f^{-1}(c)$ 의 값은 얼마인가?



① 2

② 3

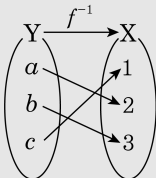
③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

역함수 f^{-1} 는 그림과 같으므로



$$f^{-1}(a) + f^{-1}(c) = 2 + 1 = 3$$

3. 함수 $y = -x - 1$ 의 역함수의 그래프에서 x 절편을 a , y 절편을 b 라 할 때, ab 의 값은 얼마인가?

① -2

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$y = -x - 1$ 에서 $x = -y - 1$

여기서 x 와 y 를 바꾸면 역함수는 $y = -x - 1$

따라서 x 절편 $a = -1$, y 절편 $b = -1$ 이므로

$ab = 1$

4. 함수 $f(x) = 2ax - a + 2$ 에 대하여 $f^{-1}(-7) = 2$ 일 때, 상수 a 의 값은 얼마인가?

① -5

② -3

③ -1

④ 1

⑤ 3

해설

$f^{-1}(-7) = 2$ 이므로

역함수의 정의에 의해서

$$f(2) = -7, f(2) = 2a \times 2 - a + 2 = -7, 3a = -9$$

$$\therefore a = -3$$

5. 함수 $f(x) = 2x - 3$ 에 대하여 $f^{-1}(2)$ 의 값은?

① $\frac{3}{2}$

② 2

③ $\frac{5}{2}$

④ 3

⑤ $\frac{7}{2}$

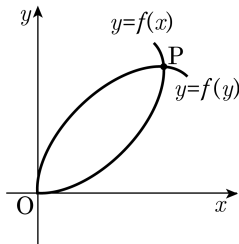
해설

$f^{-1}(2) = a$ 라 하면, $f(a) = 2$ 이므로 $2a - 3 = 2$

$$\therefore a = \frac{5}{2}$$

6. 다음 그림과 같은 두 곡선 $y = f(x)$ 와 $x = f(y)$ 의 교점 P 가 될 수 있는 점은 무엇인가?

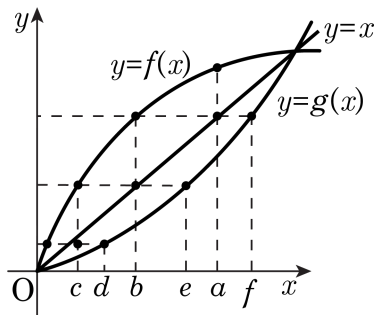
- ① $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ② $\left(1, \frac{3}{2}\right)$
 ③ $(1, 2)$ ④ $(2, 2)$
 ⑤ $(2, 3)$



해설

$y = f(x)$ 와 $x = f(y)$ 는 서로 역함수의 관계이므로 두 그래프의 교점 P 는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같다.
 따라서 점 P 는 직선 $x = y$ 위의 점이므로 $(2, 2)$ 이다.

7. 다음 그림은 세 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = x$ 의 그래프이다. 이때, $(f \circ f \circ g)^{-1}(a)$ 의 값은?



① a

② b

③ c

④ d

⑤ e

해설

$(f \circ f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1} \dots \dots \textcircled{\Gamma}$ 이고

$f^{-1}(a) = k$ 라 하면 $f(k) = a$ 에서 $k = b$

$\therefore f^{-1}(a) = b \dots \dots \textcircled{\Delta}$

$f^{-1}(b) = l$ 이라 하면 $f(l) = b$ 에서 $l = c$

$\therefore f^{-1}(b) = c \dots \dots \textcircled{\ominus}$

$g^{-1}(c) = m$ 이라 하면 $g(m) = c$ 에서 $m = d$

$\therefore g^{-1}(c) = d \dots \dots \textcircled{\Xi}$

$\textcircled{\Gamma}, \textcircled{\Delta}, \textcircled{\ominus}, \textcircled{\Xi}$ 에서

$(f \circ f \circ g)^{-1} = (g^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1})(a)$

$= g^{-1}[f^{-1}\{f^{-1}(a)\}]$

$= g^{-1}\{f^{-1}(b)\} = g^{-1}(c) = d$

8. 다음 보기는 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 $f(x)$ 를 나타낸 것이다. 역함수가 존재하는 것을 모두 고르면 무엇인가?

$$\textcircled{㉠} f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ x & (x < 0) \end{cases}$$

$$\textcircled{㉡} f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & (x \geq 1) \\ 1 - x & (x < 1) \end{cases}$$

$$\textcircled{㉢} f(x) = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ x + 3 & (x < 0) \end{cases}$$

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉡, ㉢

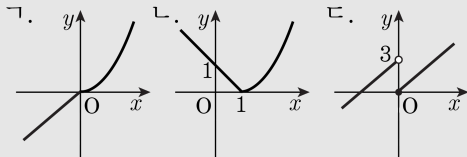
⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

함수 $f(x)$ 가 일대일대응일 때

역함수가 존재한다.

이 때, 보기의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서, 함수 ㉠이 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

9. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수

$$f(x) = \begin{cases} x+k & (x \geq 0) \\ -x+k & (x < 0) \end{cases} \text{ 가 } f^{-1}(2) = -3 \text{ 을 만족시킬 때, } f(5) \text{ 의}$$

값은 얼마인가?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$f^{-1}(2) = -3$ 에서 $f(-3) = 2$ 이므로

$$f(-3) = 3 + k = 2$$

$$\therefore k = -1 \text{ 이므로 } f(x) = \begin{cases} x-1 & (x \geq 0) \\ -x-1 & (x < 0) \end{cases}$$

$$\therefore f(5) = 5 - 1 = 4$$

10. 함수 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 존재하고 $f(5) = -2$, $(f \circ f)(x) = x$ 일 때, $f^{-1}(5)$ 의 값은?

① -5

② -2

③ 1

④ 2

⑤ 5

해설

$(f \circ f)(x) = x$ 에서 $f = f^{-1}$

따라서 $f^{-1}(5) = f(5) = -2$

11. 실수 전체의 집합에서 $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ 로 정의된 함수 f 에 대하여 $(f \circ f \circ f)(x) = 2$ 가 되는 x 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}(f \circ f)(x) &= f(f(x)) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) + 1 \\ &= \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f \circ f \circ f)(x) &= f(f(f(x))) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{2} \right) + 1 \\ &= \frac{1}{8}x + \frac{7}{4} = 2\end{aligned}$$

$$\therefore x = 2$$

12. $f\left(\frac{2x}{-x+2}\right) = x^2 - 3x$ 일 때, $f(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$f\left(\frac{2x}{-x+2}\right) = x^2 - 3x \text{ 일 때}$$

$$\frac{2x}{-x+2} = 2 \text{ 에서 } 2x = 2(-x+2), 2x = -2x+4$$

$$\therefore x = 1$$

이것을 주어진 식에 대입하면

$$f\left(\frac{2}{-1+2}\right) = 1 - 3$$

$$\therefore f(2) = -2$$

13. 두 함수 $f(x) = x + k$, $g(x) = x^2 + 1$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립하도록 상수 k 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$f \circ g = g \circ f \text{ 에서 } x^2 + 1 + k = x^2 + 2kx + k^2 + 1$$

$$\text{즉 } 2kx + k^2 - k = 0$$

모든 x 에 대하여 성립하므로 $k = 0$

14. 함수 $f(x)$ 가 $f(3x+1) = 2x-1$ 을 만족할 때, 함수 $f(x)$ 를 구하면?

① $f(x) = \frac{x-1}{2}$

② $f(x) = \frac{3x+1}{2}$

③ $f(x) = \frac{x-2}{3}$

④ $f(x) = \frac{2x-5}{3}$

⑤ $f(x) = \frac{2x+3}{3}$

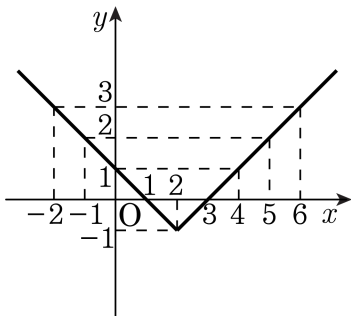
해설

$f(3x+1) = 2x-1$ 에서 $3x+1 = t$ 라고 놓으면 $x = \frac{t-1}{3}$ 이므로

$$\therefore f(t) = 2 \cdot \frac{t-1}{3} - 1 = \frac{2t-5}{3}$$

$$\therefore f(x) = \frac{2x-5}{3}$$

15. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $f(f(x)) = 0$ 의 모든 근의 합을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$f(f(x)) = 0$ 에서 $f(x) = X$ 라 하면

$f(X) = 0$ 이므로 $X = 1$ 또는 $X = 3$

$X = 1$ 즉, $f(x) = 1$ 일 때, $x = 0, 4$

$X = 3$ 즉, $f(x) = 3$ 일 때, $x = -2, 6$

따라서, 모든 근의 합은 $0 + 4 + (-2) + 6 = 8$ 이다.

16. $f(x) = -2x + 3$, $g(x) = 4x + 1$ 일 때, $f \circ g \circ h = g$ 를 만족하는 일차함수 $h(x)$ 에 대하여 $h(2)$ 의 값을 구하면?

① -3

② -1

③ 0

④ 2

⑤ 3

해설

$h(x) = ax + b$ 라고 놓고

$$(g \circ h)(x) = 4(ax + b) + 1 = 4ax + 4b + 1$$

$$\begin{aligned}(f \circ (g \circ h))(x) &= -2(4ax + 4b + 1) + 3 \\ &= -8ax - 8b - 2 + 3 \\ &= 4x + 1\end{aligned}$$

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = 0$$

$$h(x) = -\frac{1}{2}x$$

$$h(2) = -1$$

17. $f(x) = x + 1$, $g(x) = 3x - 2$ 일 때, $(g \circ h)(x) = f(x)$ 를 만족시키는 함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $h(x) = \frac{1}{3}x + 1$

② $h(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

③ $h(x) = x + \frac{1}{3}$

④ $h(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

⑤ $h(x) = \frac{2}{3}x + 1$

해설

$f(x) = x + 1$, $g(x) = 3x - 2$ 일 때,

$(g \circ h)(x) = f(x)$ 를 만족해야 하므로

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = 3h(x) - 2$$

$$3h(x) - 2 = x + 1, 3h(x) = x + 3$$

$$\therefore h(x) = \frac{1}{3}x + 1$$

18. 함수 $f(x) = x + 1$ 라 할 때, $f^{10}(2)$ 의 값을 구하여라. (단, $f^2 = f \circ f$, $f^n = f^{n-1} \circ f$)

▶ 답:

▷ 정답: 12

해설

$$\begin{aligned} f^2(x) &= (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x+1) \\ &= (x+1) + 1 = x+2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^3(x) &= (f^2 \circ f)(x) = f^2(f(x)) = f^2(x+1) \\ &= (x+1) + 2 = x+3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^4(x) &= (f^3 \circ f)(x) = f^3(f(x)) = f^3(x+1) \\ &= (x+1) + 3 = x+4 \end{aligned}$$

...

$$f^n(x) = x + n$$

$$\therefore f^{10}(2) = 2 + 10 = 12$$

19. 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, $(f \circ g)(p)$ 의 값은 얼마인가? (단, 점선은 x 축 또는 y 축에 평행하다.)

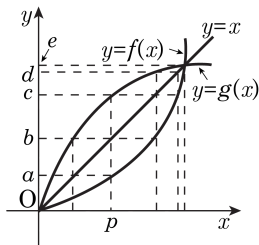
① a

② b

③ c

④ d

⑤ e



해설

주어진 그림에서 $g(p) = c, f(c) = b$

$\therefore (f \circ g)(p) = f(g(p)) = f(c) = b$

20. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 $f(x) = ax + b|x|$ (a, b 는 상수)가 역함수를 가질 조건은?

① $a^2 - b^2 < 0$

② $a^2 - b^2 > 0$

③ $a + b > 0$

④ $a - b > 0$

⑤ $a - b < 0$

해설

$$f(x) = \begin{cases} (a+b)x & (x \geq 0) \\ (a-b)x & (x < 0) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 역함수를 가지려면

$f(x)$ 가 증가함수이거나 감소함수이어야 하므로

두 직선 $y = (a+b)x, y = (a-b)x$ 의 기울기의 부호가 같아야 한다.

$$\therefore (a+b)(a-b) > 0, \quad a^2 - b^2 > 0$$

21. $x \neq 1$ 인 모든 실수에 대하여 $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ 로 정의된 함수 f 에 대하여
역함수 $f^{-1}(x)$ 가 $f^{-1}(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$f(x) = y = \frac{2x+1}{x-1} \text{의 역함수는}$$

$$x = \frac{2y+1}{y-1} \text{에서}$$

$$x(y-1) = 2y+1, xy-x = 2y+1, xy-2y = x+1$$

$$(x-2)y = x+1$$

$$\therefore y = \frac{x+1}{x-2} = f^{-1}(x)$$

$$= \frac{ax+b}{x+c}$$

$$\text{즉, } a=1, b=1, c=-2$$

$$\therefore a+b+c=0$$

22. 1 보다 큰 실수 전체의 집합 A 에서 A 로의 함수 $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$,
 $g(x) = \sqrt{2x-1}$ 에 대하여 $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(3)$ 의 값을 구하면?

- ① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{7}{2}$ ③ $\frac{9}{2}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{11}{2}$

해설

$$(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f) = (f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ f) = g^{-1} \circ f$$
$$\Rightarrow (g^{-1} \circ f)(3) = g^{-1}(f(3)) = g^{-1}(2) = k \text{ 라고 하자.}$$

$$\Rightarrow g(k) = 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{2k-1} = 2$$

$$\therefore k = \frac{5}{2}$$

23. 두 함수 $f(x) = \frac{x-1}{x}$, $g(x) = 1-x$ 에 대하여 $g(x) = f^{-1}\left(\frac{9}{10}\right)$ 이 성립할 때, 이를 만족시키는 실수 x 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -9

해설

먼저 $f^{-1}(x)$ 를 구해보면

$$y = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$$

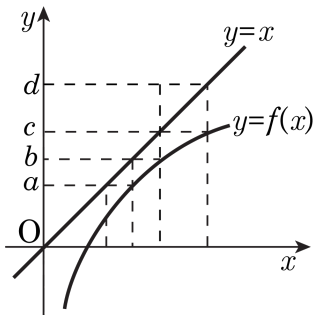
$$\Rightarrow x = 1 - \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{1-x} = f^{-1}(x)$$

$$\therefore f^{-1}\left(\frac{9}{10}\right) = 10$$

$$\Rightarrow g(x) = 1-x = 10 \quad x = -9$$

24. 아래의 그림은 두 함수 $y = f(x)$, $y = x$ 의 그래프이다. $f^{-1}(b)$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : c

해설

$f^{-1}(b) = k$ 라 하면 $f(k) = b$

$f(c) = b$ 이므로 $k = c$

따라서 $f^{-1}(b) = c$

25. 점 (2, 1)을 지나는 일차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 일치할 때, $f(-2)$ 의 값은?

① -5

② -2

③ 0

④ 2

⑤ 5

해설

$f = f^{-1}$ 이므로 $(f \circ f)(x) = x$

$f(x) = m(x - 2) + 1 = mx - 2m + 1$ ($m \neq 0$) 으로 놓으면

$f(f(x)) = m(mx - 2m + 1) - 2m + 1 = x$

$\therefore m^2x - 2m^2 - m + 1 = x$

즉, $m^2 = 1$, $-2m^2 - m + 1 = 0$ 이므로

$m = -1$

따라서 $f(x) = -x + 3$ 이고

$f(-2) = -(-2) + 3 = 5$ 이다.

26. 점 $(-1, -2)$ 를 지나는 일차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 일치할 때, $f(-3)$ 의 값은?

① -6

② -3

③ 0

④ 3

⑤ 6

해설

$f = f^{-1}$ 이므로 $(f \circ f)(x) = x$

$f(x) = a(x+1) - 2 = ax + a - 2$ ($a \neq 0$)로 놓으면

$f(f(x)) = a(ax + a - 2) + a - 2 = x$

$\therefore a^2x + a^2 - a - 2 = x$

즉, $a^2 = 1$, $a^2 - a - 2 = 0$ 이므로 $a = -1$

따라서 $f(x) = -x - 3$ 이고

$f(-3) = -(-3) - 3 = 0$ 이다.

27. 다음 보기의 함수 $f(x)$ 중 $(f \circ f \circ f)(x) = f(x)$ 가 성립하는 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $f(x) = x + 1$

㉡ $f(x) = -x$

㉢ $f(x) = -x + 1$

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉡, ㉢

해설

$$\begin{aligned}\text{㉠. } (f \circ f \circ f)(x) &= f(f(f(x))) = f(f(x+1)) \\ &= f((x+1)+1) = f(x+2) \\ &= (x+2)+1 = x+3 \\ \therefore (f \circ f \circ f)(x) &\neq f(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{㉡. } (f \circ f \circ f)(x) &= f(f(f(x))) = f(f(-x)) \\ &= f(-(-x)) = f(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{㉢. } (f \circ f \circ f)(x) &= f(f(f(x))) = f(f(-x+1)) \\ &= f(-(-x+1)+1) = f(x)\end{aligned}$$

따라서 $(f \circ f \circ f)(x) = f(x)$ 가 성립하는 것은 ㉡, ㉢ 이다.

28. $f\left(\frac{2x-1}{3}\right) = 4 - 2x$ 일 때, $(f \circ f)(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

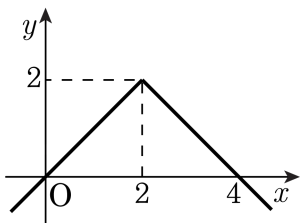
$$\frac{2x-1}{3} = t \text{ 로 놓으면}$$

$$2x-1 = 3t \text{ 이므로 } x = \frac{3t+1}{2}$$

$$f(t) = 4 - 2 \cdot \frac{3t+1}{2} = -3t + 3$$

$$\therefore (f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(-3) = 12$$

29. $y = f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 방정식 $(f \circ f)(x) = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는?



① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 무수히 많다.

해설

$$f(x) = \begin{cases} y = x(x \leq 2) & \dots \textcircled{㉠} \\ y = -x + 4(x > 2) & \dots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

$$\textcircled{㉠}\text{에서는 } (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x) = x$$

$$\therefore x = 1$$

$$\begin{aligned} \textcircled{㉡}\text{에서는 } (f \circ f)(x) &= f(f(x)) = f(-x + 4) \\ &= -x + 4 \end{aligned}$$

$$\therefore x = 3$$

실근의 개수 : 2 개.

30. 함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & (x \geq 1) \\ -\sqrt{1-x} & (x < 1) \end{cases}$ 에 대하여 $f(x)$ 의 역함수가 존재할 때, $(f^{-1} \circ f^{-1})(x) = 1$ 일 때, x 의 값을 구하면? (단, $f^{-1}(x)$ 은 $f(x)$ 의 역함수)

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & (x \geq 1) \\ -\sqrt{1-x} & (x < 1) \end{cases} \text{ 에서}$$

$$(f^{-1} \circ f^{-1})(x) = (f \circ f)^{-1}(x) = 1$$

$$(f \circ f)(1) = (f(f(1))) = f(0) = -1$$

$$\therefore x = -1$$

31. 함수 $f(x) = x^2 - 4x + 6 (x \geq 2)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점 사이의 거리를 구했을 때, 옳은 것은 무엇인가?

① 1

② $\sqrt{2}$

③ $\sqrt{3}$

④ 2

⑤ $\sqrt{5}$

해설

$y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점은
 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같다.

$$x^2 - 4x + 6 = x \text{ 에서}$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0, (x-2)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } x = 3$$

따라서 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의
 두 교점은 $(2, 2), (3, 3)$ 이고,

이 두 교점 사이의 거리는

$$\sqrt{(3-2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}$$

해설

$$x^2 - 4x + 6 = x ,$$

즉 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 5, \alpha\beta = 6$$

따라서 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의

그래프의 두 교점은 $(\alpha, \alpha), (\beta, \beta)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{(\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2} = \sqrt{2} \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}$$

$$= \sqrt{2} \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6} = \sqrt{2}$$

32. 함수 $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ ($x \geq 0$) 의 역함수를 $g(x)$ 라 할때, $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점 사이의 거리를 구하면?

① 2

② $2\sqrt{2}$

③ 3

④ $2\sqrt{3}$

⑤ $3\sqrt{2}$

해설

$x \geq 0$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프와
직선 $y = x$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

$$\frac{1}{2}x^2 = x \text{ 에서 } x^2 - 2x = 0, x(x-2) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 두 교점의 좌표가 $(0, 0)$, $(2, 2)$ 이므로
두 교점 사이의 거리는 $\sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$