1. 직선 $ax + by + c = 0$은 $ab > 0,\ bc < 0$일 때, 몇 사분면을 지나지 않는가?

① 제 1 사분면
② 제 2 사분면
③ 제 3 사분면
④ 제 4 사분면
⑤ 제 1 사분면 ,제 2 사분면

해설

$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ 에서

$-\frac{a}{b} < 0\ (\because\ ab > 0)$

$-\frac{c}{b} > 0\ (\because\ bc < 0)$ 이므로

제 1 사분면, 제 2 사분면, 제 4 사분면을 지난다.

2. 좌표평면 위에 세 점 $\mathrm{A}(-2,\ 1)$, $\mathrm{B}(4,\ 7)$, $\mathrm{C}(6,\ 3)$을 꼭짓점으로 하는 $\triangle\mathrm{ABC}$가 있다. 직선 $y = mx + 2m + 1$에 의하여 $\triangle\mathrm{ABC}$의 넓이가 이등분될 때, m의 값은?

① $\frac{2}{7}$　② $\frac{2}{5}$　③ $\frac{4}{7}$　④ $\frac{3}{4}$　⑤ $\frac{6}{7}$

해설

직선 $y = m(x+2) + 1$은 m 의 값에 관계없이
항상 점 $(-2, 1)$을 지나므로 점 A를 지난다.
따라서 주어진 직선이 $\triangle\mathrm{ABC}$ 의 넓이를 이등분하려면
직선이 $\overline{\mathrm{BC}}$ 의 중점 $\mathrm{M}(5, 5)$를 지나야 한다.
$\therefore\ 5 = m(5+2) + 1$
$\therefore\ m = \frac{4}{7}$

3. 다음 중 직선 $2x-3y-5=0$ 에 수직이고 점 $(-1,\ 2)$ 를 지나는 직선 위에 있는 점은?

① $(3, -2)$ ② $(3, -3)$ ③ $(3, -4)$
④ $(3, -5)$ ⑤ $(3, -6)$

해설

주어진 직선의 기울기가 $\frac{2}{3}$ 이므로
이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{3}{2}$ 이다.
따라서 구하는 직선의 방정식은
$y-2=-\frac{3}{2}(x+1)$
$\therefore 3x+2y-1=0$
그러므로 이 직선 위에 있는 점은 점 $(3, -4)$ 이다.

4. 두 직선 $kx+2y+3=0$, $2x+ky+4=0$이 서로 평행하도록 양수 k의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

두 직선이 평행하려면 기울기는 같고
y절편은 달라야 한다.
$\frac{k}{2}=\frac{2}{k}\neq\frac{3}{4}$ $\therefore k^2=4$
따라서 양수 k의 값은 2이다.

5. 세 직선 $x+2y=5$, $2x-3y=4$, $ax+y=0$이 삼각형을 이루지 못할 때, 상수 a의 값들의 곱은?

① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{3}{23}$ ③ $-\frac{1}{23}$ ④ $\frac{2}{23}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

해설

주어진 세 직선이 일치하는 경우는 없으므로
삼각형을 이루지 못하는 것은 두 직선이
서로 평행해서 교점이 두 개만 생기거나
세 직선이 모두 한 점에서 만나는 경우이다.

(ⅰ) 두 직선이 평행한 경우 세 직선의 기울기는

각각 $-\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $-a$이므로

$a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=-\frac{2}{3}$이면 두 직선이 평행하다.

(ⅱ) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우

$x+2y=5$ 와 $2x-3y=4$의 교점은 $\left(\frac{23}{7}, \frac{6}{7}\right)$

이 점이 $ax+y=0$ 위에 있으려면 $a=-\frac{6}{23}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{3}$, $-\frac{6}{23}$

따라서 세 수의 곱은 $\frac{2}{23}$

6. 점 $\mathrm{A}(-2,1)$, $\mathrm{B}(4,4)$ 를 이은 선분 AB 를 $2:1$ 로 내분하는 점을 지나 AB 에 수직인 직선의 방정식을 l 이라고 할 때, 점 $(1,0)$ 에서 직선l 에 이르는 거리는?

① $\sqrt{2}$　② $\sqrt{3}$　③ 2　④ $\sqrt{5}$　⑤ $\sqrt{6}$

해설

선분 AB 의 내분점의 좌표

$$\mathrm{M}\left(\frac{2\times4+1\times(-2)}{2+1}, \frac{2\times4+1\times1}{2+1}\right)=(2,3)$$

직선 AB 의 기울기는 $\dfrac{4-1}{4-(-2)}=\dfrac{1}{2}$

그러므로 직선 l 은 기울기가 -2 이고

$(2,3)$ 을 지나므로 $l: y-3=-2(x-2)$

$\therefore\ 2x+y-7=0$

따라서 $(1,0)$ 으로부터 직선 l 까지의 거리는

$$\frac{|2\cdot1+0-7|}{\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

7. 두 직선 $2x+y-4=0$, $x-2y+3=0$의 교점과 점 $(2,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식을 구하면?

① $x-y+1=0$　② $x+y+1=0$　③ $x-y-1=0$
④ $x-y+2=0$　⑤ $x+y+2=0$

해설

두 직선 $2x+y-4=0$과 $x-2y+3=0$의
교점을 지나는 직선의 방정식은
$2x+y-4+k(x-2y+3)=0 \cdots$ ㉠
이때, ㉠이 점 $(2,3)$을 지나므로 $3-k=0$
$\therefore\ k=3$
$k=3$을 ㉠에 대입하여 정리하면 $x-y+1=0$

8. 두 직선 $x+y=1,\ ax+2y+a+2=0$ 이 제 1사분면에서 만나도록 하는 정수 a 값의 개수를 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x+y=1 \cdots$ ㉠

$ax+2y+a+2=0 \cdots$ ㉡

㉡ − ㉠ × 2 : $(a-2)x+a+4=0$

$\Rightarrow \quad x=\dfrac{a+4}{2-a}$

$\Rightarrow y=1-x=\dfrac{2a+2}{a-2}$

∴ 교점 : $\left(\dfrac{a+4}{2-a},\ \dfrac{2a+2}{a-2}\right)$

교점이 제 1 사분면에 있으므로

$\dfrac{a+4}{2-a}>0,\ \dfrac{2a+2}{a-2}>0$

두 식의 양변에$(a-2)^2$ 을 곱하면

$(a-2)(a+4)<0,\ 2(a+1)(a-2)>0$

$\Rightarrow -4<a<2,\ a<-1\ or\ a>2$

$\therefore\ -4<a<-1$

∴ 정수인 a 의 개수는 $-3,-2$ 즉 2개

9. 함수 $f(x)=ax+1$이 a 의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표를 구하면?

① $(1,0)$ ② $(1,1)$ ③ $(0,1)$
④ $(-1,0)$ ⑤ $(0,-1)$

해설

함수 $f(x)=ax+1$ 의 그래프는
a 의 값에 관계없이 점$(0,\ 1)$ 을 지나는 직선이다.

10. 방정식 $x^2 + y^2 + Ax + By = 0$ 이 나타내는 원의 중심이 $(-2, -3)$ 일 때, 상수 A, B 의 값과 반지름의 길이를 바르게 나열한 것은?

① 2, 3, $\sqrt{2}$　② 3, 7, 5　③ 4, 4, $\sqrt{9}$
④ 4, 6, $\sqrt{13}$　⑤ 5, 9, 11

해설

중심이 $(-2, -3)$ 이고 반지름의 길이가
r 인 원의 방정식은
$(x+2)^2 + (y+3)^2 = r^2$
$x^2 + y^2 + 4x + 6y + 13 - r^2 = 0$
이것이 $x^2 + y^2 + Ax + By = 0$ 과 일치해야 하므로
$A = 4, B = 6, 13 - r^2 = 0$
$13 - r^2 = 0$ 에서
$r = \sqrt{13}$ $(\because r > 0)$
따라서, $A = 4, B = 6$ 이고
반지름의 길이는 $\sqrt{13}$ 이다.

11. $x^2+y^2+x-y+k=0$ 의 그래프가 원을 나타내도록 하는 상수 k 의 값의 범위는?

① $k \le \frac{1}{2}$ ② $k < \frac{1}{2}$ ③ $k > \frac{1}{2}$ ④ $k \ge \frac{1}{2}$ ⑤ $k < \frac{1}{3}$

해설

주어진 방정식을 정리하면,

$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}-k$

$\therefore$ 원이 되려면, $\frac{1}{2}-k>0 \ \rightarrow \ k<\frac{1}{2}$

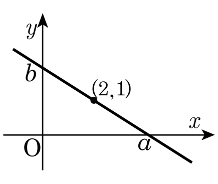
12. 점 $(2,\ 1)$, $(4,\ -1)$ 을 지나고, y 축에 접하는 두 개의 원 중 큰 원의 반지름의 길이는?

① 10 ② 8 ③ 6 ④ 5 ⑤ 4

해설

중심의 좌표를 $(a,\ b)$ 라 하면
y 축에 접하므로 반지름의 길이 r 는
$r = |a|$ 이다.
$\therefore\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 \cdots\cdots$ ㉠
㉠이 점 $(2,\ 1)$ 을 지나므로
$(2-a)^2 + (1-b)^2 = a^2$
$\therefore b^2 - 4a - 2b + 5 = 0 \cdots\cdots$ ㉡
㉠이 점 $(4,\ -1)$ 을 지나므로
$(4-a)^2 + (-1-b)^2 = a^2$
$b^2 - 8a + 2b + 17 = 0 \cdots\cdots$ ㉢
㉡ $\times 2 -$ ㉢에서 $b^2 - 6b - 7 = 0$, $(b+1)(b-7) = 0$
$\therefore\ b = -1,\ 7$
이때, ㉡에서 $b = -1$ 이면 $a = 2$, $b = 7$ 이면 $a = 10$
$\therefore\ r = 2$ 또는 10
따라서 큰 원의 반지름의 길이는 10 이다.

13. 다음 그림에서 a와 b 사이의 관계식을 나타내면?



① $a+\frac{a}{2}=1$ ② $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$

③ $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$ ④ $\frac{2}{a}+b=1$

⑤ $\frac{1}{2a}+\frac{1}{b}=1$

해설

x 절편이 a, y 절편이 b 인 직선의 방정식은

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 이다.

따라서 $(2,\ 1)$ 을 지나므로

$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$ 이다.

14. 직선 $x+ay-1=0$ 과 x 축, y 축의 양의 부분으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 $\frac{1}{4}$ 일 때, a 의 값을 구하여라. (단, $a>0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=2$

해설

$y=-\frac{1}{a}x+\frac{1}{a}$ 의 x 절편은 $(1,\ 0)$ y 절편은 $(0, \frac{1}{a})$ 이다.

$\therefore$ 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{a}=\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad a=2$

15. 좌표평면 위에 서로 다른 세 점 $A(-2k-1, 5)$ $B(k, -k-10)$, $C(2k+5, k-1)$가 일직선 위에 있을 때, k의 값의 곱을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

세 점 A, B, C가 일직선 위에 있으므로
직선 AB와 직선 BC의 기울기는 같다.

$$\frac{-k-10-5}{k-(-2k-1)} = \frac{(k-1)-(-k-10)}{2k+5-k}$$

이 식을 정리하면 $k^2+7k+12=0$

$\therefore$ k의 값의 곱은 12이다.

16. 세 직선 $x+2y-3=0,\ 3x+y-4-a=0,\ \ 2x-3y-2a=0$ 이 한 점에서 만나도록 상수 a 의 값은?

① $a=-\frac{3}{5}$　② $a=-\frac{1}{3}$　③ $a=-\frac{5}{3}$
④ $a=\frac{5}{3}$　⑤ $a=5$

해설

두 직선의 교점이 다른 한 직선 위에 있으면 된다.

$x+2y-3=0 \quad \cdots$ ㉠
$3x+y-4-a=0 \cdots$ ㉡
$2x-3y-2a=0 \quad \cdots$ ㉢라하고,

㉡ $\times 3+$ ㉢ $\Leftrightarrow \therefore\ 11x-12-5a=0$

$\therefore\ x=\frac{5a+12}{11}$

㉡ $\times 2-$ ㉢ $\times 3 \Leftrightarrow \therefore\ 11y-8+4a=0$

$\therefore\ y=\frac{-4a+8}{11}$

$\therefore$ ㉡, ㉢의 교점의 좌표는 $\left(\frac{5a+12}{11},\ \frac{-4a+8}{11}\right)$

이 점이 ㉠위에 있어야 하므로

$\frac{5a+12}{11}+2\ \frac{-4a+8}{11}-3=0$

즉, $\frac{5a+12-8a+16}{11}-3=0$

$-3a+28=33,\ 3a=-5 \quad \therefore\ a=-\frac{5}{3}$

17. 점 $(3, 4)$ 에서 직선 $2x - y + k = 0$ 까지의 거리가 $\sqrt{5}$ 일 때, 양수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = 3$

해설

$\frac{|2 \times 3 - 4 + k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5}$ 이므로 $|2 + k| = 5$ 이다.

따라서 $k = 3$ ($\because$ k 는 양수)

18. 두 직선 $3x+4y=24$ 와 $3x+4y=4$ 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

두 직선이 평행하므로 한 직선의 임의의 점과 나머지 직선 사이의 거리를 구하면 된다.

$3x+4y=24$ 의 점 $(0,6)$

$\frac{|0\times3+6\times4-4|}{\sqrt{3^2+4^2}}=4$

19. 직선 $3x-4y=0$ 과 평행이고, 점 $(2,\ 1)$ 에서의 거리가 1 인 직선의 y 절편은?(단, y 절편은 양수)

① $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$ ② $\left(0,\ \frac{3}{4}\right)$ ③ $(0,\ 1)$
④ $\left(0,\ \frac{4}{3}\right)$ ⑤ $(0,\ 3)$

해설

직선 $3x-4y=0$ 과 평행한 직선을 $3x-4y+k=0$ 이라 놓으면

$\frac{|3\times 2-4\times 1+k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$, $|2+k|=5 \therefore\ k=3$ ($\because$ y 절편은 양수)

따라서 직선 $3x-4y+3=0$ 의 y 절편은 $\left(0,\ \frac{3}{4}\right)$

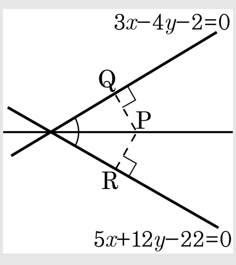
20. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의
점 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ 에 대하여 P에서
두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하면



$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$ 이므로

$\frac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$

$13(3X-4Y-2)=\pm 5(5X+12Y-22)$

즉, $13(3X-4Y-2)=5(5X+12Y-22)$ 또는

$13(3X-4Y-2)=-5(5X+12Y-22)$ 정리하면

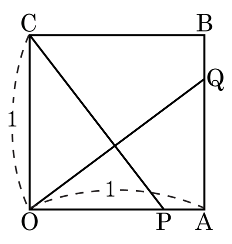
$x-8y+6=0$ 또는 $8x+y-17=0$ 에서

기울기가 양이므로

$\therefore\ x-8y+6=0$

$\therefore a+b+c=-1$

21. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 OABC 의 두 변 $\overline{OA}$, $\overline{AB}$ 위에 각각 점 P, Q 를 $\overline{OP} = \overline{AQ}$ 가 되도록 잡을때, ($\overline{CP}$ 의 기울기) × ($\overline{OQ}$ 의 기울기)를 구하면?



① $-\frac{1}{2}$　② -1　③ $\frac{1}{2}$

④ 1　⑤ 2

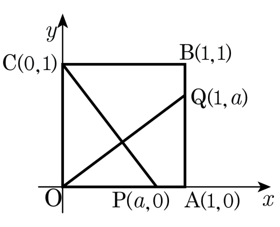
해설

정사각형 OABC 에 다음 그림과 같이 좌표축을 잡으면 ($\overline{CP}$ 의 기울기)$= \frac{-1}{a}$,

($\overline{OQ}$ 의 기울기)$= \frac{a}{1}$

따라서, 두 직선의 기울기의 곱은

$\left(\frac{-1}{a}\right) \times \left(\frac{a}{1}\right) = -1$



22. 네 점 A$(-2,\ 0)$, B$(2,\ 0)$, C$(2,\ 3)$, D$(-2,\ 3)$을 꼭지점으로 하는 직사각형 ABCD의 넓이가 직선 $mx+y-2m=0$에 의하여 이등분될 때, 상수 m의 값은?

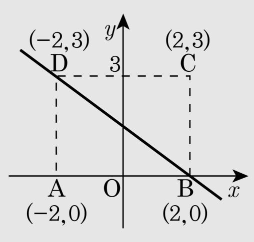
① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

해설

직선 $mx+y-2m=0$

즉 $y=-m(x-2)$은 m의 값에 관계없이 항상 점 B$(2,\ 0)$을 지난다.

이 때, 이 직선이 직사각형 ABCD의 넓이를 이등분하므로 점 D$(-2,\ 3)$을 지나야 한다.



따라서, D$(-2,\ 3)$을 대입하면 $3=-m(-2-2)$이므로

$\therefore\ m=\frac{3}{4}$

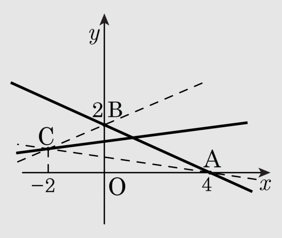
23. 두 직선 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 와 $y=kx+2k+1$ 이 제 1 사분면에서 만날 때, k 의 값의 범위는?

① $-\frac{1}{6}<k<\frac{1}{2}$ ② $-\frac{3}{2}<k<\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{6}<k<2$
④ $-\frac{1}{6}<k<1$ ⑤ $-\frac{1}{2}<k<\frac{1}{2}$

해설

$y=-\frac{1}{2}x+2\cdots$ ㉠

$y=kx+2k+1\cdots$ ㉡



㉡ 을 k 에 대하여 정리하면
$k(x+2)+(1-y)=0$ 이므로
k 의 값에 관계없이 정점 $C(-2,\ 1)$ 을 지난다.
㉠, ㉡이 제1 사분면에서 만날 조건은
그림에서 직선 AC, BC 사이를 직선 ㉡이 지나야 한다.

$\overline{AC}$ 의 기울기는 $-\frac{1}{6}$,

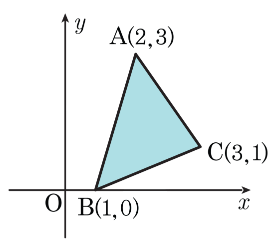
$\overline{BC}$ 의 기울기는 $\frac{1}{2}$

따라서 기울기 k는 $-\frac{1}{6}$ 보다 커야하고

$\frac{1}{2}$ 보다 작아야 제 1 사분면에서 만난다.

$\therefore\ -\frac{1}{6}<k<\frac{1}{2}$

24. 직선 $y=-mx-m+2$ 가 아래 그림의 삼각형 ABC 를 지나기 위한 m 의 범위는?



① $-1 \le m \le 3$ ② $-1 \le m \le \frac{1}{3}$

③ $-\frac{1}{3} \le m \le 1$ ④ $-\frac{1}{3} \le m \le 3$

⑤ $1 \le m \le 3$

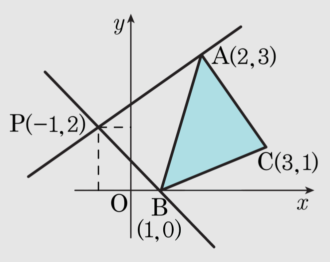
해설

직선 $y=-mx-m+2$ 에서 $mx+y+m-2=0$

$m(x+1)+y-2=0$ 이므로

점 P$(-1,\ 2)$ 를 반드시 지난다.

따라서 직선 $y=-mx-m+2$ 가 $\triangle$ABC 를 지나기 위한 기울기 $-m$ 의 범위는



(직선 PB 의 기울기) $\le -m \le$ (직선 PA 의 기울기)

직선 PB 의 기울기는 $\frac{2-0}{-1-1}=-1$

직선 PA 의 기울기는 $\frac{2-3}{-1-2}=\frac{1}{3}$

$-1 \le -m \le \frac{1}{3}$

$\therefore\ -\frac{1}{3} \le m \le 1$

25. 직선 $(k-3)x+(k-1)y+2=0$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다. 이 점과 직선$x+2y-4=0$ 사이의 거리는?

① $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　② $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　③ $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　④ $\sqrt{5}$　　⑤ $2\sqrt{5}$

해설

$(k-3)x+(k-1)y+2=0$ 을 k 에 대하여
정리하면$k(x+y)+(-3x-y+2)=0$ 이 식이
k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로
$x+y=0$, $-3x-y+2=0$
두 식을 연립하여 풀면 $x=1,\ y=-1$
따라서 점 $(1,\ -1)$ 과 직선 $x+2y-4=0$
사이의 거리는

$$\frac{|1\cdot 1+2\cdot(-1)-4|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$