**1.** $(4x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 4x + 1) \div (x^2 - x + 1)$을 계산 하였을 때, 몫과 나머지의 합을 구하면?

① $4x^2 - 6x + 1$　② $4x^2 - 7x + 3$　③ $4x^2 - 4x + 5$
④ $4x^2 - 8x + 2$　⑤ $4x^2 - 6x + 7$

해설

직접 나누어서 구한다.
몫 : $4x^2 - x - 2$, 나머지 : $-5x + 3$
$\therefore$ 몫과 나머지의 합은 $4x^2 - 6x + 1$

**2.** $x$ 에 대한 다항식 $A = 2x^3 + 5x^2 + 4$ 를 다항식 $B$ 로 나눌 때, 몫이 $2x + 1$ 이고, 나머지가 $-6x + 2$ 이다. 이 때, 다항식 $B$ 를 구하면?

① $x^2 + 2x + 2$ ② $x^2 + x + 2$ ③ $x^2 - x + 2$
④ $x^2 - 2x + 2$ ⑤ $x^2 - 3x + 2$

해설

$A = B(2x + 1) - 6x + 2$ 에서
$B(2x + 1) = 2x^3 + 5x^2 + 6x + 2$
$\therefore B = (2x^3 + 5x^2 + 6x + 2) \div (2x + 1)$
$\quad = x^2 + 2x + 2$

**3.** $(2x^3 - 3x^2 + 3x + 4)(3x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 7x + 8)$ 을 전개한 식에서 $x^3$ 의 계수는?

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

해설

$2x^3 \times 8 - 3x^2 \times (-7x) + 3x \times (-2x^2) + 4 \times 2x^3 = 39x^3$

**4.** $2x^2 - 3x - 2 = a(x-1)(x+2) + bx(x+2) + cx(x-1)$이 $x$에 대한 항등식이 되도록 $a,\ b,\ c$의 값을 정하면?

① $a = 1,\ b = -1,\ c = 2$

② $a = -1,\ b = 1,\ c = -2$

③ $a = 1,\ b = 1,\ c = 2$

④ $a = -1,\ b = -1,\ c = -2$

⑤ $a = 1,\ b = -1,\ c = -2$

해설

수치대입법을 이용한다.

$x = 0$을 대입 $-2 = -2a \quad \therefore\ a = 1$

$x = 1$을 대입 $-3 = 3b \quad \therefore\ b = -1$

$x = -2$를 대입 $12 = 6c \quad \therefore\ c = 2$

**5.** $a$, $b$는 정수이고, $ax^3 + bx^2 + 1$이 $x^2 - x - 1$로 나누어 떨어질 때, $b$의 값은?

① $-2$ ② $-1$ ③ $0$ ④ $1$ ⑤ $2$

해설

전개했을 때 양변의 최고차항과 상수항이 같아야 하므로

$ax^3 + bx^2 + 1$

$= (x^2 - x - 1)(ax - 1)$

$= ax^3 - (1 + a)x^2 + (1 - a)x + 1$

양변의 계수를 비교하면

$-(1 + a) = b, 1 - a = 0$

$\therefore \quad a = 1, b = -2$

**6.** $x$에 대한 다항식 $(4x^2-3x+1)^5$을 전개하였을 때, 모든 계수들(상수항 포함)의 합은?

① 0　② 16　③ 32　④ 64　⑤ 1024

해설

$(4x^2-3x+1)^5$을 전개하여 $x$에 대한 내림차순으로 정리하면
$(4x^2-3x+1)^5 = a_0x^{10}+a_1x^9+a_2x^8+\cdots+a_9x+a_{10}$과 같이 된다.
여기서 모든 계수들의 합
$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}$을 구하려면
$x=1$을 대입하면 된다.
즉, $(4-3+1)^5 = a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}$
모든 계수들의 합은 $2^5=32$

**7.** $f(x) = x^3 - ax^2 + bx - 2$가 $(x-1)(x+2)$로 나누어 떨어지도록 상수 $a+b$의 값을 정하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-3$

해설

$f(x) = x^3 - ax^2 + bx - 2$ 라 놓으면,

$f(1) = 1 - a + b - 2 = 0$

$\therefore\ -a + b = 1 \cdots$ ㉠

$f(-2) = -8 - 4a - 2b - 2 = 0$

$\therefore\ 2a + b = -5 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a = -2,\ b = -1$

**8.** 등식 $3x^2+2x+1=a(x-1)^2+b(x-1)+c$ 이 $x$ 에 관한 항등식일 때, 상수 $b$ 의 값은?

① 3　　② $-4$　　③ 2　　④ 8　　⑤ 6

해설

$3x^2+2x+1=a(x-1)^2+b(x-1)+c$
$=(x-1)\left\{a(x-1)+b\right\}+c$

$$\begin{array}{c|cccl}
1 & 3 & 2 & 1 & \\
 & & 3 & 5 & \\
\hline
1 & 3 & 5 & \multicolumn{1}{|c}{6} & \leftarrow \ \mathrm{c} \\
\cline{4-4}
 & & 3 & & \\
\hline
 & 3 & \multicolumn{1}{|c}{8} & \leftarrow \mathrm{c} & \\
\cline{3-3}
 & \uparrow & & & \\
 & \mathrm{a} & & &
\end{array}$$

해설

$x=1$ 을 대입하면 $c=6$
$3x^2+2x+1=a(x-1)^2+b(x-1)+6$
$\rightarrow 3x^2+2x-5=a(x-1)^2+b(x-1)$
$\rightarrow (x-1)(3x+5)=a(x-1)^2+b(x-1)$
$\rightarrow$ 양변을 $x-1$ 로 나누면
$3x+5=a(x-1)+b=ax-a+b$
$\therefore\ a=3,\ b=8$
※ 준식의 우변을 모두 전개해서 계수비교하여 구할 수도 있다.

**9.** 다항식 $8x^3-1$을 $4x^2+2x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 할 때 $Q(x)$의 상수항의 계수는?

① $-2$ ② $-1$ ③ $0$ ④ $1$ ⑤ $2$

해설

$8x^3-1=(2x)^3-1^3=(2x-1)\left(4x^2+2x+1\right)$

$\therefore Q(x)=2x-1$

$\therefore$ 상수항은 $-1$

**10.** $\frac{k}{3}(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)$ 와 같은 것은?

① $\frac{1}{6}(k+1)(k+3)(k+4)$　② $\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$
③ $\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$　④ $\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)(k+3)$
⑤ $\frac{1}{4}(k+1)(2k+1)(3k+2)$

해설

$(k+1)(k+2)=\frac{3}{3}(k+1)(k+2)$ 이므로

공통인수 $\frac{1}{3}(k+1)(k+2)$ 로 묶으면

(준 식)$=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$

**11.** $(x^4-8x^2-9)\div(x^2-9)$를 계산하여라.

① $x^2+1$ ② $x^2-1$ ③ $x^2+2$
④ $x^2-2$ ⑤ $x^2+3$

해설

$x^4-8x^2-9=(x^2-9)(x^2+1)$
$\therefore$ (준식)$=x^2+1$

**12.** $x^2-2x-y^2+2y$를 인수분해 하였더니 $(x+ay)(x-by+c)$가 된다고 할 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $-4$

해설

$x^2-2x-y^2+2y$

$=(x^2-y^2)-2(x-y)$

$=(x+y-2)(x-y)$

$=(x+ay)(x-by+c)$

계수를 비교하면

$a=-1, b=-1, c=-2$

$\therefore a+b+c=-1-1-2=-4$

**13.** $x$에 대한 다항식 $x^3-2x^2-x+2$가 $(x+a)(x+b)(x+c)$로 인수분해될 때, $a^2+b^2+c^2$의 값은? (단, $a, b, c$는 상수)

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$x^3-2x^2-x+2=(x+1)(x-1)(x-2)$
$a^2+b^2+c^2=(-1)^2+1^2+2^2=6$

**14.** 두 다항식 $2x^2 + 2x - 4$와 $4x^3 - 4$에 관한 설명이다. 옳지 <u>않은</u> 것을 고르면?

① 두 다항식은 $(x-1)$로 나누어 떨어지므로, $(x-1)$은 두 다항식의 공약수이다.

② 두 다항식은 공약수가 있으므로 서로소가 아니다.

③ $4(x-1)^3(x+2)^2(x^2+x+1)$은 두 다항식의 공배수이다.

④ 두 다항식의 최대공약수는 $2(x-1)$이다.

⑤ 두 다항식의 최소공배수는 $(x+2)(x-1)^2(x^2+x+1)$이다.

해설

$2x^2 + 2x - 4 = 2(x-1)(x+2)$
$4x^3 - 4 = 4(x-1)(x^2+x+1)$
최대공약수 : $2(x-1)$
최소공배수 : $4(x-1)(x+2)(x^2+x+1)$

**15.** 세 개의 다항식 $x^3+ax+b$, $x^3+cx^2+a$, $cx^2+bx+4$, 의 공약수 중 하나가 $x-1$일 때, $a+b+c$의 값은?

① 2　　② $-2$　　③ 3　　④ $-3$　　⑤ 4

해설

$f(x)=x^3+ax+b \to f(1)=1+a+b=0\cdots$㉠
$g(x)=x^3+cx^2+a \to g(1)=1+c+a=0\cdots$㉡
$h(x)=cx^2+bx+4 \to h(1)=c+b+4=0\cdots$㉢
㉠ + ㉡ + ㉢에서 $2(a+b+c)+6=0$
$\therefore\ a+b+c=-3$

**16.** 두 다항식 $A,\ B$ 에 대하여 $A+B=-x^3-2x^2+4x+5$ , $2A-B=4x^3-x^2-x+1$ 일 때, 두 다항식 $A, B$ 를 구하면?

① $A=x^3+x^2+x+2,\ B=-2x^3-3x^2+3x+3$

② $A=x^3-x^2+x+2,\ B=-2x^3-x^2+3x+3$

③ $A=x^3-x^2+x-2,\ B=-2x^3-x^2+3x+7$

④ $A=x^3-x^2-x+2,\ B=-2x^3-x^2+5x+3$

⑤ $A=3x^3-3x^2+3x+6,\ B=-4x^3+x^2+x-1$

해설

$A+B=-x^3-2x^2+4x+5\cdots$ ㉠
$2A-B=4x^3-x^2-x+1\cdots$ ㉡
(㉠ + ㉡) $\div 3$ : $A=x^3-x^2+x+2$
(2㉠ − ㉡) $\div 3$ : $B=-2x^3-x^2+3x+3$

**17.** 두 다항식 $A = a + 2b$, $B = 2a + 3b$ 일 때, $2A + B$를 구하는 과정에서 사용된 연산법칙 중 옳지 <u>않은</u> 것을 골라라.

$$
\begin{aligned}
2A + B &= 2(a + 2b) + (2a + 3b) \\
&= (2a + 4b) + (2a + 3b) && \text{㉠ 분배법칙} \\
&= 2a + (4b + 2a) + 3b && \text{㉡ 결합법칙} \\
&= 2a + (2a + 4b) + 3b && \text{㉢ 교환법칙} \\
&= (2a + 2a) + (4b + 3b) && \text{㉣ 교환법칙} \\
&= (2 + 2)a + (4 + 3)b && \text{㉤ 분배법칙} \\
&= 4a + 7b
\end{aligned}
$$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉣

해설

㉣ $2a + (2a + 4b) + 3b = (2a + 2a) + (4b + 3b)$: 결합법칙

**18.** 다항식 $f(x)$를 다항식 $g(x)$로 나눈 나머지를 $r(x)$라 할 때, $f(x)-g(x)-2r(x)$를 $g(x)$로 나눈 나머지는?

① $-2r(x)$　　② $-r(x)$　　③ $0$

④ $r(x)$　　⑤ $2r(x)$

해설

$f(x)$를 $g(x)$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면
$f(x)=g(x)Q(x)+r(x)$
$\therefore f(x)-g(x)-2r(x)$
$=g(x)Q(x)+r(x)-g(x)-2r(x)$
$=g(x)\{Q(x)-1\}-r(x)$
여기서 $g(x)$의 차수는 $-r(x)$의 차수보다 높으므로 구하는 나머지는 $-r(x)$이다.

**19.** 다항식 $2x^2 + 5ax - a^2$ 을 다항식 $P(x)$ 로 나눈 몫이 $x + 3a$, 나머지가 $2a^2$ 일 때, 다항식 $(x + a)P(x)$ 를 나타낸 것은?

① $x^2 + 2ax - 2a^2$　　② $x^2 - a^2$

③ $2x^2 + 3ax + a^2$　　④ $2x^2 - 3ax - a^2$

⑤ $2x^2 + ax - a^2$

해설

$2x^2 + 5ax - a^2 = P(x)(x + 3a) + 2a^2$ 이므로

$P(x)(x + 3a) = 2x^2 + 5ax - 3a^2$

따라서, 다항식 $P(x)$ 는 $2x^2 + 5ax - 3a^2$ 을 $x + 3a$ 로 나눈 몫이므로

$P(x) = 2x - a$

$$\begin{aligned} \therefore\ (x + a)P(x) &= (x + a)(2x - a) \\ &= 2x^2 + ax - a^2 \end{aligned}$$

**20.** $x+y+z=1$, $xy+yz+zx=2$, $xyz=3$일 때, $(x+1)(y+1)(z+1)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$(x+1)(y+1)(z+1)$
$=xyz+xy+yz+zx+x+y+z+1$
$=7$

**21.** $P=(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ 의 값을 구하면?

① $2^{32}-1$  ② $2^{32}+1$  ③ $2^{31}-1$
④ $2^{31}+1$  ⑤ $2^{17}-1$

**해설**

주어진 식에 $(2-1)=1$ 을 곱해도 식은 성립하므로

$P=(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$

$=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^16+1)$

$=(2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$

$= \quad \vdots$

$=(2^{16}-1)(2^{16}+1)$

$=2^{32}-1$

**22.** $(10^5+2)^3$ 의 각 자리의 숫자의 합을 구하여라.

① 15 ② 18 ③ 21 ④ 26 ⑤ 28

해설

준식을 전개하면

$10^{15}+2^3+3\times2\times10^5(10^5+2)$

$=10^{15}+2^3+6\times10^{10}+12\times10^5$

$=10^{15}+10^{10}\times6+10^5\times12+8$

$\therefore\ 1+6+1+2+8=18$

**23.** $a+b+c=0,\ a^2+b^2+c^2=1$ 일 때, $4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$\therefore\ ab+bc+ca = -\frac{1}{2}$

$4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

$= 4\{(ab+bc+ca)^2 - 2abc(a+b+c)\}$

$= 4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1$

**24.** 다음 중에서 겉넓이가 22, 모든 모서리의 길이의 합이 24 인 직육면체의 대각선의 길이는?

① $\sqrt{11}$ ② $\sqrt{12}$

③ $\sqrt{13}$ ④ $\sqrt{14}$

⑤ 유일하지 않다.

해설

겉넓이 : $2xy + 2xz + 2yz = 22$

모서리 : $4x + 4y + 4z = 24$

대각선 : $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$ $\quad\therefore\ d = \sqrt{14}$

$= (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx)$

$= 6^2 - 22 = 14$

**25.** $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$ 일 때, $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $0$ ④ $1$ ⑤ $4$

해설

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ 에 대입하면

$ab+bc+ca = -\frac{1}{2}$

$(ab+bc+ca)^2 = a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$

$\frac{1}{4} = a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$

따라서 $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 = \frac{1}{4}$

**26.** $x^2 - x + 1 = 0$ 일 때, $x^5 + \frac{1}{x^5}$ 의 값은?

① $-2$ ② $-1$ ③ $0$ ④ $1$ ⑤ $2$

해설

$x^2 - x + 1 = 0$, 양변에 $x + 1$을 곱하면,
$(x+1)(x^2 - x + 1) = 0$
$x^3 + 1 = 0$, $x^3 = -1$ 에서 $x^5 = x^3 \times x^2 = -x^2$
$x^5 + \frac{1}{x^5} = -\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \cdots\cdots$ ①
$x^2 - x + 1 = 0$를 $x$로 나누어 정리한다.
$x + \frac{1}{x} = 1$
$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = -1$
① 에 대입하면, $x^5 + \frac{1}{x^5} = 1$

**27.** $f(x)$가 $x$의 다항식일 때 $(x^2-2)(x^4+1)f(x) = x^8 + ax^4 + b$가 $x$에 대한 항등식이 될 때 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-7$

해설

$(x^2-2)(x^4+1)f(x) = x^8 + ax^4 + b$에서
$x^2 = 2$를 대입하면 $0 = 16 + 4a + b \cdots$ ①
$x^4 = -1$을 대입하면 $0 = 1 - a + b \cdots$ ②
①, ②를 연립하여 풀면 $a = -3,\ b = -4$
$\therefore\ a + b = -7$

**28.** $\dfrac{2x+ay-b}{x-y-1}$가 $x-y-1 \neq 0$인 어떤 $x$, $y$의 값에 대하여도 항상 일정한 값을 가질 때, $a-b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $-4$

해설

$\dfrac{2x+ay-b}{x-y-1}=k$라 놓으면

$2x+ay-b=k(x-y-1)$

$x$, $y$에 대하여 정리하면,

$(2-k)x+(a+k)y-b+k=0$

위의 식이 $x$, $y$에 대한 항등식이어야 하므로

$2-k=0$, $a+k=0$, $-b+k=0$

$\therefore$ $k=2$, $a=-2$, $b=2$

$\therefore$ $a-b=-4$

**29.** 등식 $x^3 + ax^2 + 2x + b = (x^2 + x + 1)Q(x) + 2x + 1$ 이 $x$ 에 대한 항등식일 때, $a + b$ 의 값은?

① $-2$　　② $-1$　　③ $0$　　④ $1$　　⑤ $2$

해설

$Q(x) = x + c$ 라고 두고 전개하여 계수를 비교하면
$a = 0,\ b = 0,\ c = -1$ 이므로 $a + b = 0$

해설

$x^3 + ax^2 + 2x + b$ 를 $x^2 + x + 1$ 로 직접 나눗셈을 하면,

$$\begin{array}{r|l}
 & x+(a-1) \\
\hline
x^2+x+1 & x^3+ax^2+2x+b \\
- & x^3+x^2+x \\
\hline
 & (a-1)x^2+x+b \\
- & (a-1)x^2+(a-1)x+(a-1) \\
\hline
 & (2-a)x+b-a+1
\end{array}$$

$2 - a = 2,\ b - a + 1 = 1$
$a = 0,\ b = 0$

**30.** $x$에 대한 다항식 $(ax-1)^3$의 전개식에서 모든 항의 계수의 합이 125일 때, 실수 $a$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$x=1$을 대입하면 계수들의 합을 얻을 수 있다.
즉, $(a-1)^3=125, a-1=5$
$\therefore\ a=6$

**31.** $x$에 대한 다항식 $x^3+kx^2+kx-1$을 $x-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 $Q_1(x)$, $R_1$, $x+2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 $Q_2(x)$, $R_2$라 할 때, $R_1=R_2$를 만족하는 실수 $k$의 값을 구하면?

① $-4$ ② $-2$ ③ $0$ ④ $2$ ⑤ $4$

해설

$$x^3+kx^2+kx-1=(x-2)Q_1(x)+R_1$$
$$=(x+2)Q_2(x)+R_2$$

$x=2$ 대입, $R_1=8+4k+2k-1=6k+7$

$x=-2$ 대입, $R_2=-8+4k-2k-1=2k-9$

$R_1=R_2$이므로 $6k+7=2k-9$

$\therefore\ k=-4$

**32.** 다항식 $f(x)$ 를 $2x-1$로 나누면 나머지는 $-4$이고, 그 몫을 $x+2$로 나누면 나머지는 $2$이다. 이때, $f(x)$를 $x+2$로 나눌 때의 나머지를 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-14$

해설

$f(x)=(2x-1)Q(x)-4$라 하면
$f(-2)=-5Q(-2)-4$
그런데 $Q(-2)=2$ 이므로 $f(-2)=-14$

**33.** 다항식 $f(x)$를 $x^2-4$로 나누었을 때의 나머지가 $-x+4$이다. 다항식 $f(x+1)$을 $x^2+2x-3$으로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① $2x+1$　② $-x+3$　③ $x-1$
④ $2x$　⑤ $2x-3$

해설

$f(x)=(x^2-4)P(x)-x+4$
$\quad\;\;=(x+2)(x-2)P(x)-x+4$
$\therefore\; f(-2)=6,\; f(2)=2$
$f(x+1)=(x^2+2x-3)Q(x)+ax+b$
$\qquad\quad\;=(x+3)(x-1)Q(x)+ax+b$
$x=-3$을 대입하면 $f(-2)=-3a+b=6$
$x=1$을 대입하면 $f(2)=a+b=2$
$\therefore\; a=-1,\; b=3$
따라서 나머지는 $-x+3$

**34.** 이차항의 계수가 1인 두 이차다항식 $A, B$의 최대공약수가 $x+2$이고 최소공배수가 $x^3+x^2-4x-4$이다. $A+B=ax^2+bx+c$를 만족하는 상수 $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^3+x^2-4x-4=(x+2)(x+1)(x-2)$
두 다항식은 각각 $(x+2)(x+1), (x+2)(x-2)$
$A+B=(x+2)(x-2)+(x+2)(x+1)$
$=2x^2+3x-2=ax^2+bx+c$
$\therefore a=2, b=3, c=-2$
$\therefore\ a+b+c=3$

**35.** 차수가 같은 두 다항식의 합이 $2x^2-5x-3$ 이고 최소공배수가 $x^3-2x^2-5x+6$ 일 때, 두 다항식의 최대공약수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $x-3$

해설

두 다항식을 $A$, $B$ 라고 하면
$A+B=(a+b)G$, $L=abG$,
즉, 최대공약수는 두 식의 합과 최소공배수의 공약수이다.
$x^3-2x^2-5x+6=(x-3)(x-1)(x+2)$
$2x^2-5x-3=(x-3)(2x+1)$
$\therefore\ G=x-3$

**36.** $\dfrac{2005^3+1}{2005\times2004+1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2006

해설

$2005 = x$ 로 놓으면

$$(\text{준 식}) = \frac{x^3+1^3}{x(x-1)+1}$$
$$= \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}$$
$$= x+1$$
$$= 2006$$

**37.** $a+b+c=1,\ ab+bc+ca=1,\ abc=1$ 일 때, $a^3+b^3+c^3$ 의 값은?

① 3 ② $-3$ ③ 1 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{9}$

해설

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$
$1 = a^2+b^2+c^2+2$
$\therefore\ a^2+b^2+c^2 = -1$
$a^3+b^3+c^3-3abc$
$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
$a^3+b^3+c^3-3 = 1\cdot(-1-1) = -2$
$\therefore\ a^3+b^3+c^3 = 1$

**38.** 2가 아닌 모든 실수 $x$에 대하여 $\dfrac{ax^2+4x+b}{x-2}$의 값이 항상 일정하도록 상수 $a, b$의 값을 정할 때, $a-b$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$\dfrac{ax^2+4x+b}{x-2}=k$라 하면

$ax^2+4x+b=k(x-2)$

$ax^2+(4-k)x+b+2k=0$

$x$에 대한 항등식이므로

$a=0$

$4-k=0$에서 $k=4$

$b+2k=0$에서 $b=-8$

$\therefore\ a-b=8$

해설

주어진 식이 모든 $x$에 대해 일정한 값을 가지려면
분자인 $ax^2+4x+b$가 분모인 '$x-2$' 만을 인수로 가져야 한다.
즉, 분자가 $k(x-2)$가 되어야 한다.

$\dfrac{ax^2+4x+b}{x-2}=\dfrac{4(x-2)}{x-2}=4$

$\therefore a=0,\ b=-8$에서 $a-b=8$

**39.** $y = kx^2 + (1-2k)x + k - 1$의 그래프는 $k$에 관계없이 항상 한 정점 A를 지난다. B의 좌표를 B$(b, 1)$라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이가 $\sqrt{2}$가 되도록 하는 $b$의 값들의 합을 구하면?

① 1　② 2　③ −2　④ −3　⑤ −1

해설

( i ) 준식을 $k$에 관하여 정리하면
$(x^2 - 2x + 1)k + (x - y - 1) = 0$
이 식이 $k$의 값에 관계없이 성립할 조건은
$x^2 - 2x + 1 = 0,\ x - y - 1 = 0$
$\therefore\ x = 1,\ y = 0$
$\therefore\ A(1, 0)$

( ii ) A$(1, 0)$, B$(b, 1)$에서
$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{2}$이므로
$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(b-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$
$b^2 - 2b = 0,\quad b(b-2) = 0\quad \therefore\ b = 0,\ 2$
$\therefore\ b$의 값들의 합은 2

**40.** $x^{30}$을 $x-3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R$이라 할 때, $Q(x)$의 상수항을 포함한 모든 계수들의 합을 구하면?

① $3^{30}+1$　② $3^{30}-1$　③ $\frac{1}{2}\left(3^{30}-1\right)$
④ $\frac{1}{3}\left(3^{30}-1\right)$　⑤ $0$

해설

$x^{30}=(x-3)\,Q(x)+R$
양변에 $x=3$을 대입 하면, $3^{30}=R$
$x^{30}=(x-3)\,Q(x)+3^{30}$
양변에 $x=1$을 대입하면, $1=-2Q(1)+3^{30}$
$\therefore\ Q(1)=\frac{1}{2}\left(3^{30}-1\right)$
※ 다항식에서 상수항을 포함한 모든 계수의 합은 문자대신 1을 대입한 값과 같다.

**41.** 다음 식을 인수분해 하면 $(x+py)(x+qy+r)^2$ 이다. 이 때, $p^2+q^2+r^2$ 의 값을 구하여라.

| |
|---|
| $[x^3-y^3+x^2y-xy^2+2x^2-2y^2+x-y]$ |

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^3-y^3+x^2y-xy^2+2x^2-2y^2+x-y$
$=(x-y)(x^2+xy+y^2)+xy(x-y)+2(x+y)(x-y)+(x-y)$
$=(x-y)\{(x+y)^2+2(x+y)+1\}$
$=(x-y)(x+y+1)^2$
$p=-1, q=1, r=1$
$\therefore\ p^2+q^2+r^2=3$

**42.** $a^2 - b^2 = 1$ 일 때, $\{(a+b)^n + (a-b)^n\}^2 - \{(a+b)^n - (a-b)^n\}^2$ 의 값은? (단, $n$은 자연수)

① $2$　② $2(a+b)^n$　③ $4$

④ $4(a+b)^n$　⑤ $4(a-b)^n$

**해설**

$(A)^2 - (B)^2$ 형태이므로
합차공식을 사용하여 정리하면
(준식)$= 4(a+b)^n(a-b)^n = 4(a^2-b^2)^n = 4$

**43.** $\dfrac{899^3+1}{899\times 898+1}$ 의 양의 약수의 개수는?

① 27 개  ② 25 개  ③ 21 개  ④ 18 개  ⑤ 15 개

해설

$a=899$ 라 치환하면

$$(\text{준 식})=\frac{a^3+1}{a(a-1)+1}$$

$$=\frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a+1}$$

$$=a+1=900$$

$900=2^2\times 3^2\times 5^2$

$\therefore$ 900 의 약수의 개수 $=(2+1)\times(2+1)\times(2+1)$

$=27$

**44.** $a-b=1+i$, $b-c=1-i$일 때, $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$a-b=1+i$ ⋯⋯㉠
$b-c=1-i$ ⋯⋯㉡
㉠+㉡을 계산하면 $a-c=2$
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$
$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$
$=\frac{1}{2}\{(1+i)^2+(1-i)^2+(-2)^2\}$
$=\frac{1}{2}\{1+2i-1+1-2i-1+4\}$
$=2$

**45.** 세 개의 실수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $[a,\ b,\ c] = (a-b)(a-c)$라 할 때, $[a,\ b,\ c]+[b,\ c,\ a]+[c,\ a,\ b]=0$이면 $[a,\ b,\ c]$의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$(a-b)(a-c)+(b-c)(b-a)+(c-a)(c-b)=0$
전개하여 정리하면 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$
$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$
$\therefore\ a=b=c$
$\therefore\ [a,\ b,\ c]=(a-b)(a-c)=0$

**46.** $x-1$로 나누면 나머지가 1이고, $x+1$로 나누면 나머지가 $-1$인 다항식 $f(x)$가 있다. $f(x)$를 $x^2-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하자. $f(0)=0$일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

> ㉠ $Q(0)=0$이다.
>
> ㉡ $f(x)$는 이차식이 될 수 없다.
>
> ㉢ $f(x)$가 삼차식이면 $f(x)=x^3$이다

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉠, ㉡
④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

**해설**

$f(x)=(x^2-1)Q(x)+ax+b$
$f(1)=a+b=1,\quad f(-1)=-a+b=-1$
$\therefore\ a=1,\ b=0$
$\therefore\ f(x)=(x^2-1)Q(x)+x$
㉠ $f(0)=-Q(0)=0$ $\quad\therefore$참
㉡ $f(x)$가 이차식이기 위해서는 $Q(x)$가 0이 아닌 상수이어야 하는데 $Q(0)=0$이므로 그런 경우는 없다. $\therefore$참
㉢ $Q(0)=0$이므로 $Q(x)=ax\ (a\neq 0)$
$\therefore\ f(x)=ax(x^2-1)+x\ (a\neq 0)$ $\quad\therefore$거짓

**47.** 함수 $f(n) = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$으로 정의할 때, $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(2007)$을 10으로 나눈 나머지는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(2007)$의 일의 자리만 보면 된다.
$f(5)$ 이후부터는 10으로 나누어떨어지므로
10으로 나누어떨어지지 않는 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$까지 더하면
$1 + 2 + 6 + 24 = 33$
따라서 $f(1) + f(2) + \cdots + f(2007)$을 10으로 나눈 나머지는 3이다.

**48.** $x^3$ 의 계수가 1 인 삼차다항식 $f(x)$ 에 대하여 $f(1) = 1,\ f(2) = 2, f(3) = 3$ 이 성립한다. 이 때, $f(x)$ 를 $x-4$ 로 나눈 나머지는?

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

$f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3$ 에서 $f(x) = x$
즉, $f(x) - x$ 는 $x-1, x-2, x-3$ 을 인수로 한다.
$f(x) - x = (x-1)(x-2)(x-3)$
$\therefore f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) + x,\ f(4) = 10$

해설

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 라 하면
(ⅰ) $f(1) = 1 \Rightarrow a + b + c + 1 = 1$
(ⅱ) $f(2) = 2 \Rightarrow 4a + 2b + c + 8 = 2$
(ⅲ) $f(3) = 3 \Rightarrow 9a + 3b + c + 2n = 3$
위의 세식을 연립하여 풀면,
$a = -6, b = 12, c = -6$
$\Rightarrow f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 6$
$\therefore f(4) = 4^3 - 6 \times 4^2 + 12 \times 4 - 6 = 10$

**49.** 세 실수 $a$, $b$, $c$사이에 $a^2-bc=b^2-ac=c^2-ab$인 관계가 성립할 때, $a^3+b^3+c^3-3abc$의 값은?

① 0　　② 1　　③ 0, 2
④ 0, 1　　⑤ 0, 1, 2

해설

$a^2-bc=b^2-ac$에서 $(a^2-b^2)+(ac-bc)=0$
$\therefore\ (a+b+c)(a-b)=0\cdots$㉠
$b^2-ac=c^2-ab$에서 $(b^2-c^2)+(ab-ac)=0$
$\therefore\ (a+b+c)(b-c)=0\cdots$㉡
㉠, ㉡에서 $a+b+c=0$ 또는 $a=b=c$
한편 $a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$이므로
ⅰ) $a+b+c=0$일 때 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$
ⅱ) $a=b=c$일 때
(준식)$=3a^3-3a^3=0$
따라서 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$

**50.** 세 변의 길이가 $x,\ y,\ z$인 삼각형 ABC에서 등식 $(x^4-y^4)(x+y)-2(x^3-y^3)z^2+(x-y)z^4=0$이 성립할 때, $\triangle$ABC는 어떤 삼각형인가?

① $z=x$인 이등변삼각형, 또는 $y$가 빗변인 직각삼각형

② $y=z$인 이등변삼각형, 또는 $x$가 빗변인 직각삼각형

③ $x$가 빗변인 직각삼각형

④ $y$가 빗변인 직각삼각형

⑤ $x=y$인 이등변 삼각형, 또는 $z$가 빗변인 직각삼각형

해설

$(x^4-y^4)(x+y)-2(x^3-y^3)z^2+(x-y)z^4$

$=(x-y)(x+y)^2(x^2+y^2)-2(x-y)(x^2+xy+y^2)z^2+(x-y)z^4$

$=(x-y)\{(x^2+2xy+y^2)(x^2+y^2)-2(x^2+xy+y^2)z^2+z^4\}$

$=(x-y)\{x^4+x^2y^2+2x^3y+2xy^3+x^2y^2+y^4-2x^2z^2-2xyz^2-2y^2z^2+z^4\}$

$=(x-y)\{x^4+y^4+z^4+2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2+2xy(x^2+y^2-z^2)\}$

$=(x-y)\{(x^2+y^2-z^2)^2+2xy(x^2+y^2-z^2)\}$

$=(x-y)(x^2+y^2-z^2)(x^2+y^2-z^2+2xy)=0$

$\therefore\ x=y$인 이등변 삼각형 또는 $z$가 빗변인 직각 삼각형

($\because\ x^2+y^2-z^2+2xy=(x+y)^2-z^2$에서 삼각형의 변인 $x,\ y,\ z$는 $x+y\neq z$)