1. $(4x^4-5x^3+3x^2-4x+1)\div(x^2-x+1)$을 계산 하였을 때, 몫과 나머지의 합을 구하면?

① $4x^2-6x+1$ ② $4x^2-7x+3$ ③ $4x^2-4x+5$

④ $4x^2-8x+2$ ⑤ $4x^2-6x+7$

해설

직접 나누어서 구한다.

몫 : $4x^2-x-2$, 나머지 : $-5x+3$

$\therefore$ 몫과 나머지의 합은 $4x^2-6x+1$

2. x 에 대한 다항식 $A = 2x^3 + 5x^2 + 4$ 를 다항식 B 로 나눌 때, 몫이 $2x + 1$ 이고, 나머지가 $-6x + 2$ 이다. 이 때, 다항식 B 를 구하면?

① $x^2 + 2x + 2$　② $x^2 + x + 2$　③ $x^2 - x + 2$

④ $x^2 - 2x + 2$　⑤ $x^2 - 3x + 2$

해설

$A = B(2x + 1) - 6x + 2$ 에서

$B(2x + 1) = 2x^3 + 5x^2 + 6x + 2$

$\therefore B = (2x^3 + 5x^2 + 6x + 2) \div (2x + 1)$

$= x^2 + 2x + 2$

3. $(2x^3-3x^2+3x+4)(3x^4+2x^3-2x^2-7x+8)$을 전개한 식에서 x^3의 계수는?

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

해설

$2x^3\times 8-3x^2\times(-7x)+3x\times(-2x^2)+4\times 2x^3=39x^3$

4. $2x^2-3x-2=a(x-1)(x+2)+bx(x+2)+cx(x-1)$이 x에 대한 항등식이 되도록 $a,\ b,\ c$의 값을 정하면?

① $a=1,\ b=-1,\ c=2$
② $a=-1,\ b=1,\ c=-2$
③ $a=1,\ b=1,\ c=2$
④ $a=-1,\ b=-1,\ c=-2$
⑤ $a=1,\ b=-1,\ c=-2$

해설

수치대입법을 이용한다.

$x=0$을 대입 $-2=-2a \quad \therefore\ a=1$

$x=1$을 대입 $-3=3b \quad \therefore\ b=-1$

$x=-2$를 대입 $12=6c \quad \therefore\ c=2$

5. a, b는 정수이고, ax^3+bx^2+1이 x^2-x-1로 나누어 떨어질 때, b의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

전개했을 때 양변의 최고차항과 상수항이 같아야 하므로

ax^3+bx^2+1

$=(x^2-x-1)(ax-1)$

$=ax^3-(1+a)x^2+(1-a)x+1$

양변의 계수를 비교하면

$-(1+a)=b, 1-a=0$

$\therefore \quad a=1,\ b=-2$

6. x에 대한 다항식 $(4x^2-3x+1)^5$을 전개하였을 때, 모든 계수들(상수항 포함)의 합은?

① 0 ② 16 ③ 32 ④ 64 ⑤ 1024

해설

$(4x^2-3x+1)^5$을 전개하여 x에 대한 내림차순으로 정리하면
$(4x^2-3x+1)^5 = a_0x^{10}+a_1x^9+a_2x^8+\cdots+a_9x+a_{10}$과 같이 된다.
여기서 모든 계수들의 합
$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}$을 구하려면
$x=1$을 대입하면 된다.
즉, $(4-3+1)^5 = a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}$
모든 계수들의 합은 $2^5=32$

7. $f(x) = x^3 - ax^2 + bx - 2$가 $(x-1)(x+2)$로 나누어 떨어지도록 상수 $a+b$의 값을 정하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$f(x) = x^3 - ax^2 + bx - 2$ 라 놓으면,

$f(1) = 1 - a + b - 2 = 0$

$\therefore\ -a + b = 1 \cdots$ ㉠

$f(-2) = -8 - 4a - 2b - 2 = 0$

$\therefore\ 2a + b = -5 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a = -2$, $b = -1$

8. 등식 $3x^2+2x+1=a(x-1)^2+b(x-1)+c$ 이 x 에 관한 항등식일 때, 상수 b 의 값은?

① 3 ② -4 ③ 2 ④ 8 ⑤ 6

해설

$3x^2+2x+1=a(x-1)^2+b(x-1)+c$
$=(x-1)\left\{a(x-1)+b\right\}+c$

$$\begin{array}{r|rrrl}
1 & 3 & 2 & 1 & \\
 & & 3 & 5 & \\
\hline
1 & 3 & 5 & \boxed{6} & \leftarrow \mathrm{c} \\
 & & 3 & & \\
\hline
 & 3 & \boxed{8} & \leftarrow \mathrm{c} & \\
 & \uparrow & & & \\
 & \mathrm{a} & & &
\end{array}$$

해설

$x=1$ 을 대입하면 $c=6$
$3x^2+2x+1=a(x-1)^2+b(x-1)+6$
$\rightarrow 3x^2+2x-5=a(x-1)^2+b(x-1)$
$\rightarrow (x-1)(3x+5)=a(x-1)^2+b(x-1)$
$\rightarrow$ 양변을 $x-1$ 로 나누면
$3x+5=a(x-1)+b=ax-a+b$
$\therefore\ a=3,\ b=8$
※ 준식의 우변을 모두 전개해서 계수비교하여 구할 수도 있다.

9. 다항식 $8x^3-1$을 $4x^2+2x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 할 때 $Q(x)$의 상수항의 계수는?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$8x^3-1=(2x)^3-1^3=(2x-1)\left(4x^2+2x+1\right)$

$\therefore Q(x)=2x-1$

$\therefore$상수항은 -1

10. $\frac{k}{3}(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)$ 와 같은 것은?

① $\frac{1}{6}(k+1)(k+3)(k+4)$ ② $\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$

③ $\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$ ④ $\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)(k+3)$

⑤ $\frac{1}{4}(k+1)(2k+1)(3k+2)$

해설

$(k+1)(k+2)=\frac{3}{3}(k+1)(k+2)$ 이므로

공통인수 $\frac{1}{3}(k+1)(k+2)$ 로 묶으면

(준 식)$=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$

11. $\left(x^4-8x^2-9\right)\div\left(x^2-9\right)$ 를 계산하여라.

① x^2+1 ② x^2-1 ③ x^2+2

④ x^2-2 ⑤ x^2+3

해설

$x^4-8x^2-9=\left(x^2-9\right)\left(x^2+1\right)$

$\therefore$ (준식)$=x^2+1$

12. x^2-2x-y^2+2y를 인수분해 하였더니 $(x+ay)(x-by+c)$가 된다고 할 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

x^2-2x-y^2+2y
$=(x^2-y^2)-2(x-y)$
$=(x+y-2)(x-y)$
$=(x+ay)(x-by+c)$
계수를 비교하면
$a=-1, b=-1, c=-2$
$\therefore a+b+c=-1-1-2=-4$

13. x에 대한 다항식 x^3-2x^2-x+2가 $(x+a)(x+b)(x+c)$로 인수분해 될 때, $a^2+b^2+c^2$의 값은? (단, a, b, c는 상수)

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$x^3-2x^2-x+2=(x+1)(x-1)(x-2)$

$a^2+b^2+c^2=(-1)^2+1^2+2^2=6$

14. 두 다항식 $2x^2+2x-4$와 $4x^3-4$에 관한 설명이다. 옳지 <u>않은</u> 것을 고르면?

① 두 다항식은 $(x-1)$로 나누어 떨어지므로, $(x-1)$은 두 다항식의 공약수이다.

② 두 다항식은 공약수가 있으므로 서로소가 아니다.

③ $4(x-1)^3(x+2)^2(x^2+x+1)$은 두 다항식의 공배수이다.

④ 두 다항식의 최대공약수는 $2(x-1)$이다.

⑤ 두 다항식의 최소공배수는 $(x+2)(x-1)^2(x^2+x+1)$이다.

해설

$2x^2+2x-4=2(x-1)(x+2)$

$4x^3-4=4(x-1)(x^2+x+1)$

최대공약수 : $2(x-1)$

최소공배수 : $4(x-1)(x+2)(x^2+x+1)$

15. 세 개의 다항식 x^3+ax+b, x^3+cx^2+a, cx^2+bx+4, 의 공약수 중 하나가 $x-1$일 때, $a+b+c$의 값은?

① 2　　② −2　　③ 3　　④ −3　　⑤ 4

해설

$f(x)=x^3+ax+b \rightarrow f(1)=1+a+b=0 \cdots ㉠$

$g(x)=x^3+cx^2+a \rightarrow g(1)=1+c+a=0 \cdots ㉡$

$h(x)=cx^2+bx+4 \rightarrow h(1)=c+b+4=0 \cdots ㉢$

㉠ + ㉡ + ㉢에서 $2(a+b+c)+6=0$

$\therefore\ a+b+c=-3$

16. 두 다항식 $A,\ B$ 에 대하여 $A+B=-x^3-2x^2+4x+5$, $2A-B=4x^3-x^2-x+1$ 일 때, 두 다항식 A, B 를 구하면?

① $A=x^3+x^2+x+2,\ B=-2x^3-3x^2+3x+3$

② $A=x^3-x^2+x+2,\ B=-2x^3-x^2+3x+3$

③ $A=x^3-x^2+x-2,\ B=-2x^3-x^2+3x+7$

④ $A=x^3-x^2-x+2,\ B=-2x^3-x^2+5x+3$

⑤ $A=3x^3-3x^2+3x+6,\ B=-4x^3+x^2+x-1$

해설

$A+B=-x^3-2x^2+4x+5\cdots$ ㉠
$2A-B=4x^3-x^2-x+1\cdots$ ㉡
(㉠ + ㉡) $\div 3$: $A=x^3-x^2+x+2$
(2㉠ − ㉡) $\div 3$: $B=-2x^3-x^2+3x+3$

17. 두 다항식 $A=a+2b$, $B=2a+3b$일 때, $2A+B$를 구하는 과정에서 사용된 연산법칙 중 옳지 않은 것을 골라라.

$$\begin{aligned}2A+B &= 2(a+2b)+(2a+3b) \\ &= (2a+4b)+(2a+3b) \quad ㉠\ \text{분배법칙} \\ &= 2a+(4b+2a)+3b \quad ㉡\ \text{결합법칙} \\ &= 2a+(2a+4b)+3b \quad ㉢\ \text{교환법칙} \\ &= (2a+2a)+(4b+3b) \quad ㉣\ \text{교환법칙} \\ &= (2+2)a+(4+3)b \quad ㉤\ \text{분배법칙} \\ &= 4a+7b\end{aligned}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉣

해설

㉣ $2a+(2a+4b)+3b=(2a+2a)+(4b+3b)$: 결합법칙

18. 다항식 $f(x)$를 다항식 $g(x)$로 나눈 나머지를 $r(x)$라 할 때, $f(x)-g(x)-2r(x)$를 $g(x)$로 나눈 나머지는?

① $-2r(x)$ ② $-r(x)$ ③ 0

④ $r(x)$ ⑤ $2r(x)$

해설

$f(x)$를 $g(x)$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=g(x)Q(x)+r(x)$

$$
\begin{aligned}
\therefore\ f(x)-g(x)-2r(x)&\\
&=g(x)Q(x)+r(x)-g(x)-2r(x)\\
&=g(x)\{Q(x)-1\}-r(x)
\end{aligned}
$$

여기서 $g(x)$의 차수는 $-r(x)$의 차수보다 높으므로 구하는 나머지는 $-r(x)$이다.

19. 다항식 $2x^2+5ax-a^2$을 다항식 $P(x)$로 나눈 몫이 $x+3a$, 나머지가 $2a^2$일 때, 다항식 $(x+a)P(x)$를 나타낸 것은?

① $x^2+2ax-2a^2$
② x^2-a^2
③ $2x^2+3ax+a^2$
④ $2x^2-3ax-a^2$
⑤ $2x^2+ax-a^2$

해설

$2x^2+5ax-a^2=P(x)(x+3a)+2a^2$이므로

$P(x)(x+3a)=2x^2+5ax-3a^2$

따라서, 다항식 $P(x)$는 $2x^2+5ax-3a^2$을 $x+3a$로 나눈 몫이므로

$P(x)=2x-a$

$$\begin{aligned}\therefore\ (x+a)P(x)&=(x+a)(2x-a)\\&=2x^2+ax-a^2\end{aligned}$$

20. $x+y+z=1$, $xy+yz+zx=2$, $xyz=3$일 때, $(x+1)(y+1)(z+1)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$(x+1)(y+1)(z+1)$
$= xyz+xy+yz+zx+x+y+z+1$
$= 7$

21. $P = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ 의 값을 구하면?

① $2^{32}-1$ ② $2^{32}+1$ ③ $2^{31}-1$

④ $2^{31}+1$ ⑤ $2^{17}-1$

해설

주어진 식에 $(2-1)=1$ 을 곱해도 식은 성립하므로

$$P = (2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$$
$$= (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^16+1)$$
$$= (2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$$
$$= \quad \vdots$$
$$= (2^{16}-1)(2^{16}+1)$$
$$= 2^{32}-1$$

22. $(10^5+2)^3$ 의 각 자리의 숫자의 합을 구하여라.

① 15 ② 18 ③ 21 ④ 26 ⑤ 28

해설

준식을 전개하면

$10^{15}+2^3+3\times2\times10^5(10^5+2)$

$=10^{15}+2^3+6\times10^{10}+12\times10^5$

$=10^{15}+10^{10}\times6+10^5\times12+8$

$\therefore\ 1+6+1+2+8=18$

23. $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$일 때, $4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$\therefore\ ab+bc+ca=-\frac{1}{2}$

$4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

$=4\{(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)\}$

$=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2=1$

24. 다음 중에서 겉넓이가 22, 모든 모서리의 길이의 합이 24 인 직육면체의 대각선의 길이는?

① $\sqrt{11}$　　② $\sqrt{12}$

③ $\sqrt{13}$　　④ $\sqrt{14}$

⑤ 유일하지 않다.

해설

겉넓이 : $2xy + 2xz + 2yz = 22$

모서리 : $4x + 4y + 4z = 24$

대각선 : $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$= (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx)$

$= 6^2 - 22 = 14$

$\therefore\ d = \sqrt{14}$

25. $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$ 일 때, $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ 1 ⑤ 4

해설

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ 에 대입하면

$ab+bc+ca=-\frac{1}{2}$

$(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$

$\frac{1}{4}=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$

따라서 $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\frac{1}{4}$

26. $x^2 - x + 1 = 0$일 때, $x^5 + \dfrac{1}{x^5}$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2 - x + 1 = 0$, 양변에 $x + 1$을 곱하면,

$(x+1)(x^2 - x + 1) = 0$

$x^3 + 1 = 0$, $x^3 = -1$에서 $x^5 = x^3 \times x^2 = -x^2$

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = -\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \cdots\cdots ①$$

$x^2 - x + 1 = 0$를 x로 나누어 정리한다.

$$x + \frac{1}{x} = 1$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = -1$$

① 에 대입하면, $x^5 + \dfrac{1}{x^5} = 1$

27. $f(x)$가 x의 다항식일 때 $(x^2-2)(x^4+1)f(x)=x^8+ax^4+b$가 x에 대한 항등식이 될 때 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

$(x^2-2)(x^4+1)f(x)=x^8+ax^4+b$에서
$x^2=2$를 대입하면 $0=16+4a+b\cdots①$
$x^4=-1$을 대입하면 $0=1-a+b\cdots②$
①, ②를 연립하여 풀면 $a=-3,\ b=-4$
$\therefore\ a+b=-7$

28. $\dfrac{2x+ay-b}{x-y-1}$가 $x-y-1 \neq 0$인 어떤 x, y의 값에 대하여도 항상 일정한 값을 가질 때, $a-b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$\dfrac{2x+ay-b}{x-y-1}=k$라 놓으면

$2x+ay-b=k(x-y-1)$

x, y에 대하여 정리하면,

$(2-k)x+(a+k)y-b+k=0$

위의 식이 x, y에 대한 항등식이어야 하므로

$2-k=0,\ a+k=0,\ -b+k=0$

$\therefore\ k=2,\ a=-2,\ b=2$

$\therefore\ a-b=-4$

29. 등식 $x^3 + ax^2 + 2x + b = (x^2 + x + 1)Q(x) + 2x + 1$이 x에 대한 항등식일 때, $a + b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$Q(x) = x + c$라고 두고 전개하여 계수를 비교하면
$a = 0,\ b = 0,\ c = -1$이므로 $a + b = 0$

해설

$x^3 + ax^2 + 2x + b$를 $x^2 + x + 1$로 직접 나눗셈을 하면,

$$
\begin{array}{rl}
 & x+(a-1) \\
x^2+x+1 \big) & \overline{x^3+ax^2+\qquad 2x+b} \\
- & \underline{x^3+\ x^2+\qquad\quad x\qquad} \\
 & (a-1)x^2+\qquad x+b \\
- & \underline{(a-1)x^2+(a-1)x+(a-1)} \\
 & \qquad\qquad (2-a)x+b-a+1
\end{array}
$$

$2 - a = 2,\ b - a + 1 = 1$

$a = 0,\ b = 0$

30. x에 대한 다항식 $(ax-1)^3$의 전개식에서 모든 항의 계수의 합이 125일 때, 실수 a의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$x=1$을 대입하면 계수들의 합을 얻을 수 있다.

즉, $(a-1)^3=125, a-1=5$

$\therefore\ a=6$

31. x에 대한 다항식 x^3+kx^2+kx-1을 $x-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 $Q_1(x)$, R_1, $x+2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 $Q_2(x)$, R_2라 할 때, $R_1=R_2$를 만족하는 실수 k의 값을 구하면?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$$\begin{aligned} x^3+kx^2+kx-1 &= (x-2)Q_1(x)+R_1 \\ &= (x+2)Q_2(x)+R_2 \end{aligned}$$

$x=2$ 대입, $R_1=8+4k+2k-1=6k+7$

$x=-2$ 대입, $R_2=-8+4k-2k-1=2k-9$

$R_1=R_2$ 이므로 $6k+7=2k-9$

$\therefore\ k=-4$

32. 다항식 $f(x)$ 를 $2x-1$ 로 나누면 나머지는 -4 이고, 그 몫을 $x+2$ 로 나누면 나머지는 2 이다. 이때, $f(x)$ 를 $x+2$ 로 나눌 때의 나머지를 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -14

해설

$f(x)=(2x-1)Q(x)-4$ 라 하면

$f(-2)=-5Q(-2)-4$

그런데 $Q(-2)=2$ 이므로 $f(-2)=-14$

33. 다항식 $f(x)$를 x^2-4로 나누었을 때의 나머지가 $-x+4$이다. 다항식 $f(x+1)$을 x^2+2x-3으로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① $2x+1$ ② $-x+3$ ③ $x-1$

④ $2x$ ⑤ $2x-3$

해설

$$f(x)=(x^2-4)P(x)-x+4$$
$$=(x+2)(x-2)P(x)-x+4$$
$$\therefore\ f(-2)=6,\ f(2)=2$$
$$f(x+1)=(x^2+2x-3)Q(x)+ax+b$$
$$=(x+3)(x-1)Q(x)+ax+b$$

$x=-3$을 대입하면 $f(-2)=-3a+b=6$

$x=1$을 대입하면 $f(2)=a+b=2$

$\therefore\ a=-1,\ b=3$

따라서 나머지는 $-x+3$

34. 이차항의 계수가 1인 두 이차다항식 A, B의 최대공약수가 $x+2$이고 최소공배수가 x^3+x^2-4x-4이다. $A+B=ax^2+bx+c$를 만족하는 상수 $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^3+x^2-4x-4=(x+2)(x+1)(x-2)$

두 다항식은 각각 $(x+2)(x+1), (x+2)(x-2)$

$A+B=(x+2)(x-2)+(x+2)(x+1)$

$=2x^2+3x-2=ax^2+bx+c$

$\therefore a=2, b=3, c=-2$

$\therefore\ a+b+c=3$

35. 차수가 같은 두 다항식의 합이 $2x^2-5x-3$ 이고 최소공배수가 x^3-2x^2-5x+6 일 때, 두 다항식의 최대공약수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x-3$

해설

두 다항식을 A, B 라고 하면

$A+B=(a+b)G,\ L=abG,$

즉, 최대공약수는 두 식의 합과 최소공배수의 공약수이다.

$x^3-2x^2-5x+6=(x-3)(x-1)(x+2)$

$2x^2-5x-3=(x-3)(2x+1)$

$\therefore\ G=x-3$

36. $\dfrac{2005^3+1}{2005\times 2004+1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2006

해설

$2005=x$ 로 놓으면

$$(\text{준 식})=\frac{x^3+1^3}{x(x-1)+1}$$
$$=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}$$
$$=x+1$$
$$=2006$$

37. $a+b+c=1,\ ab+bc+ca=1,\ abc=1$일 때, $a^3+b^3+c^3$의 값은?

① 3　② -3　③ 1　④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{1}{9}$

해설

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$1 = a^2+b^2+c^2+2$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2=-1$

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$a^3+b^3+c^3-3=1\cdot(-1-1)=-2$

$\therefore\ a^3+b^3+c^3=1$

38. 2가 아닌 모든 실수 x에 대하여 $\dfrac{ax^2+4x+b}{x-2}$의 값이 항상 일정하도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a-b$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$\dfrac{ax^2+4x+b}{x-2}=k$라 하면

$ax^2+4x+b=k(x-2)$

$ax^2+(4-k)x+b+2k=0$

x에 대한 항등식이므로

$a=0$

$4-k=0$에서 $k=4$

$b+2k=0$에서 $b=-8$

$\therefore\ a-b=8$

해설

주어진 식이 모든 x에 대해 일정한 값을 가지려면
분자인 ax^2+4x+b가 분모인 '$x-2$' 만을 인수로 가져야 한다.
즉, 분자가 $k(x-2)$가 되어야 한다.

$$\frac{ax^2+4x+b}{x-2}=\frac{4(x-2)}{x-2}=4$$

$\therefore a=0,\ b=-8$에서 $a-b=8$

39. $y=kx^2+(1-2k)x+k-1$의 그래프는 k에 관계없이 항상 한 정점 A를 지난다. B의 좌표를 $\mathrm{B}(b, 1)$라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이가 $\sqrt{2}$가 되도록 하는 b의 값들의 합을 구하면?

① 1　　② 2　　③ -2　　④ -3　　⑤ -1

해설

(i) 준식을 k에 관하여 정리하면

$(x^2-2x+1)k+(x-y-1)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 성립할 조건은

$x^2-2x+1=0,\ x-y-1=0$

$\therefore\ x=1,\ y=0$

$\therefore\ A(1,0)$

(ii) $\mathrm{A}(1,0), \mathrm{B}(b,1)$에서

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(b-1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$

$b^2-2b=0,\quad b(b-2)=0\quad \therefore\ b=0,\ 2$

$\therefore\ b$의 값들의 합은 2

40. x^{30}을 $x-3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라 할 때, $Q(x)$의 상수항을 포함한 모든 계수들의 합을 구하면?

① $3^{30}+1$　② $3^{30}-1$　③ $\frac{1}{2}(3^{30}-1)$
④ $\frac{1}{3}(3^{30}-1)$　⑤ 0

해설

$x^{30}=(x-3)\,Q(x)+R$
양변에 $x=3$을 대입 하면, $3^{30}=R$
$x^{30}=(x-3)\,Q(x)+3^{30}$
양변에 $x=1$을 대입하면, $1=-2Q(1)+3^{30}$
$\therefore\ Q(1)=\frac{1}{2}(3^{30}-1)$
※ 다항식에서 상수항을 포함한 모든 계수의 합은 문자대신 1을 대입한 값과 같다.

41. 다음 식을 인수분해 하면 $(x+py)(x+qy+r)^2$ 이다. 이 때, $p^2+q^2+r^2$ 의 값을 구하여라.

$[x^3-y^3+x^2y-xy^2+2x^2-2y^2+x-y]$

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^3-y^3+x^2y-xy^2+2x^2-2y^2+x-y$

$=(x-y)(x^2+xy+y^2)+xy(x-y)+2(x+y)(x-y)+(x-y)$

$=(x-y)\{(x+y)^2+2(x+y)+1\}$

$=(x-y)(x+y+1)^2$

$p=-1, q=1, r=1$

$\therefore\ p^2+q^2+r^2=3$

42. $a^2-b^2=1$일 때, $\{(a+b)^n+(a-b)^n\}^2-\{(a+b)^n-(a-b)^n\}^2$의 값은? (단, n은 자연수)

① 2　　② $2(a+b)^n$　　③ 4

④ $4(a+b)^n$　　⑤ $4(a-b)^n$

해설

$(A)^2-(B)^2$ 형태이므로
합차공식을 사용하여 정리하면
(준식)$=4(a+b)^n(a-b)^n=4(a^2-b^2)^n=4$

43. $\dfrac{899^3+1}{899\times 898+1}$ 의 양의 약수의 개수는?

① 27 개 ② 25 개 ③ 21 개 ④ 18 개 ⑤ 15 개

해설

$a=899$ 라 치환하면

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= \frac{a^3+1}{a(a-1)+1} \\ &= \frac{(a+1)\left(a^2-a+1\right)}{a^2-a+1} \\ &= a+1=900\end{aligned}$$

$900=2^2\times 3^2\times 5^2$

$\therefore$ 900 의 약수의 개수 $=(2+1)\times(2+1)\times(2+1)$
$=27$

44. $a-b=1+i$, $b-c=1-i$일 때, $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$의 값은?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$a-b=1+i$ ⋯⋯㉠

$b-c=1-i$ ⋯⋯㉡

㉠+㉡을 계산하면 $a-c=2$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

$=\frac{1}{2}\{(1+i)^2+(1-i)^2+(-2)^2\}$

$=\frac{1}{2}\{1+2i-1+1-2i-1+4\}$

$=2$

45. 세 개의 실수 a, b, c에 대하여 $[a,\ b,\ c] = (a-b)(a-c)$라 할 때, $[a,\ b,\ c]+[b,\ c,\ a]+[c,\ a,\ b]=0$이면 $[a,\ b,\ c]$의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$(a-b)(a-c)+(b-c)(b-a)+(c-a)(c-b)=0$

전개하여 정리하면 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

$\therefore\ a=b=c$

$\therefore\ [a,\ b,\ c]=(a-b)(a-c)=0$

46. $x-1$로 나누면 나머지가 1이고, $x+1$로 나누면 나머지가 -1인 다항식 $f(x)$가 있다. $f(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하자. $f(0)=0$일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

ㄱ $Q(0)=0$이다.

ㄴ $f(x)$는 이차식이 될 수 없다.

ㄷ $f(x)$가 삼차식이면 $f(x)=x^3$이다

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

$f(x)=(x^2-1)Q(x)+ax+b$

$f(1)=a+b=1,\quad f(-1)=-a+b=-1$

$\therefore\ a=1,\ b=0$

$\therefore\ f(x)=(x^2-1)Q(x)+x$

ㄱ $f(0)=-Q(0)=0$ $\therefore$참

ㄴ $f(x)$가 이차식이기 위해서는 $Q(x)$가 0이 아닌 상수이어야 하는데 $Q(0)=0$이므로 그런 경우는 없다. $\therefore$참

ㄷ $Q(0)=0$이므로 $Q(x)=ax\ (a\neq 0)$

$\therefore\ f(x)=ax(x^2-1)+x\ (a\neq 0)$ $\therefore$거짓

47. 함수 $f(n) = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ 으로 정의할 때, $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(2007)$ 을 10 으로 나눈 나머지는?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(2007)$ 의 일의 자리만 보면 된다.
$f(5)$ 이후부터는 10 으로 나누어떨어지므로
10 으로 나누어떨어지지 않는 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ 까지 더하면
$1 + 2 + 6 + 24 = 33$
따라서 $f(1) + f(2) + \cdots + f(2007)$ 을 10 으로 나눈 나머지는 3 이다.

48. x^3 의 계수가 1 인 삼차다항식 $f(x)$ 에 대하여 $f(1) = 1$, $f(2) = 2, f(3) = 3$ 이 성립한다. 이 때, $f(x)$ 를 $x-4$ 로 나눈 나머지는?

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

$f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3$ 에서 $f(x) = x$
즉, $f(x) - x$ 는 $x-1, x-2, x-3$ 을 인수로 한다.
$f(x) - x = (x-1)(x-2)(x-3)$
$\therefore f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) + x,\ f(4) = 10$

해설

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 라 하면
(i) $f(1) = 1 \Rightarrow a + b + c + 1 = 1$
(ii) $f(2) = 2 \Rightarrow 4a + 2b + c + 8 = 2$
(iii) $f(3) = 3 \Rightarrow 9a + 3b + c + 2n = 3$
위의 세식을 연립하여 풀면,
$a = -6, b = 12, c = -6$
$\Rightarrow f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 6$
$\therefore f(4) = 4^3 - 6 \times 4^2 + 12 \times 4 - 6 = 10$

49. 세 실수 a, b, c 사이에 $a^2 - bc = b^2 - ac = c^2 - ab$ 인 관계가 성립할 때, $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ 의 값은?

① 0　　② 1　　③ 0, 2

④ 0, 1　　⑤ 0, 1, 2

해설

$a^2 - bc = b^2 - ac$ 에서 $(a^2 - b^2) + (ac - bc) = 0$

$\therefore\ (a + b + c)(a - b) = 0 \cdots$ ㉠

$b^2 - ac = c^2 - ab$ 에서 $(b^2 - c^2) + (ab - ac) = 0$

$\therefore\ (a + b + c)(b - c) = 0 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a + b + c = 0$ 또는 $a = b = c$

한편 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ 이므로

ⅰ) $a + b + c = 0$ 일 때 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$

ⅱ) $a = b = c$ 일 때

(준식)$= 3a^3 - 3a^3 = 0$

따라서 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$

50. 세 변의 길이가 x, y, z인 삼각형 ABC에서 등식 $(x^4-y^4)(x+y)-2(x^3-y^3)z^2+(x-y)z^4=0$이 성립할 때, △ABC는 어떤 삼각형인가?

① $z=x$인 이등변삼각형, 또는 y가 빗변인 직각삼각형

② $y=z$인 이등변삼각형, 또는 x가 빗변인 직각삼각형

③ x가 빗변인 직각삼각형

④ y가 빗변인 직각삼각형

⑤ $x=y$인 이등변 삼각형, 또는 z가 빗변인 직각삼각형

해설

$(x^4-y^4)(x+y)-2(x^3-y^3)z^2+(x-y)z^4$

$=(x-y)(x+y)^2(x^2+y^2)-2(x-y)(x^2+xy+y^2)z^2+(x-y)z^4$

$=(x-y)\{(x^2+2xy+y^2)(x^2+y^2)-2(x^2+xy+y^2)z^2+z^4\}$

$=(x-y)\{x^4+x^2y^2+2x^3y+2xy^3+x^2y^2+y^4-2x^2z^2-2xyz^2-2y^2z^2+z^4\}$

$=(x-y)\{x^4+y^4+z^4+2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2+2xy(x^2+y^2-z^2)\}$

$=(x-y)\{(x^2+y^2-z^2)^2+2xy(x^2+y^2-z^2)\}$

$=(x-y)(x^2+y^2-z^2)(x^2+y^2-z^2+2xy)=0$

$\therefore$ $x=y$인 이등변 삼각형 또는 z가 빗변인 직각 삼각형

($\because$ $x^2+y^2-z^2+2xy=(x+y)^2-z^2$에서 삼각형의 변인 x, y, z는 $x+y\neq z$)