1. 다음 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖는 것을 모두 고르면?

㉠ $x^2+2x+1=0$　　㉡ $x^2+2x+4=0$
㉢ $x^2+4x+2=0$

① ㉠　② ㉡　③ ㉢　④ ㉠, ㉢　⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ $(x+1)^2=0$: 중근
㉡ $a=1, b'=1, c=4$
$1^2-1\cdot 4=-3<0$: 허근
㉢ $a=1, b'=2, c=2$
$2^2-1\cdot 2=2>0$: 서로 다른 두 실근 (○)

2. 이차방정식 $x^2 - 6x + k = 0$이 중근을 가질 때, 실수 k의 값은?

① 1 ② 3 ③ 6 ④ 9 ⑤ 36

해설

주어진 이차방정식이 중근을 가지므로

$\frac{D}{4} = (-3)^2 - 1 \cdot k = 0$

$\therefore\ k = 9$

3. 이차방정식 $x^2 - 2x + m = 0$이 허근을 가질 때, 실수 m의 범위를 구하면?

① $m < 1$
② $-1 < m < 1$
③ $m < -1$ 또는 $m > 1$
④ $m > 1$
⑤ $m > -1$

해설

주어진 이차방정식이 허근을 가지려면
$D/4 = 1 - m < 0$
$\therefore m > 1$

4. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하고 판별식을 D라고 할 때 $|\alpha-\beta|$는 다음 중 어느 것과 같은가 ?

① $\frac{\sqrt{D}}{a}$　② $\frac{-\sqrt{D}}{a}$　③ $\frac{\sqrt{D}}{|a|}$
④ $-\frac{\sqrt{D}}{|a|}$　⑤ $-\frac{D}{|a|}$

해설

근의 공식을 이용하여 풀면

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

즉 $\alpha=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$, $\beta=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ (단, $D=b^2-4ac$)

$$\begin{aligned}\therefore |\alpha-\beta| &= \left|\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}-\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right| \\ &= \left|\frac{-b+\sqrt{D}+b+\sqrt{D}}{2a}\right| \\ &= \left|\frac{2\sqrt{D}}{2a}\right| = \frac{\sqrt{D}}{|a|}\end{aligned}$$

5. 이차방정식 $x^2 - 3x + 1 = 0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\alpha^3 + \beta^3$을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 18

해설

$\alpha + \beta = 3,\ \alpha\beta = 1$

$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

$= 27 - 9 = 18$

6. 방정식 $|x| + |x-1| = 2$의 해를 구하시오.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{1}{2}$ 또는 -0.5

▷ 정답 : $\frac{3}{2}$ 또는 1.5

해설

i) $x < 0$일 때,
$-x - (x-1) = 2$이므로 $-2x + 1 = 2$
$\therefore\ x = -\frac{1}{2}$
ii) $0 \leq x < 1$일 때,
$x - (x-1) = 2$이므로 $0 \cdot x = 1$
$\therefore$ 해가 없다.
iii) $1 \leq x$일 때,
$x + x - 1 = 2$이므로 $2x = 3$
$\therefore\ x = \frac{3}{2}$
(i), (ii), (iii)에서 $x = -\frac{1}{2}$ 또는 $x = \frac{3}{2}$

7. 다음 이차방정식의 해를 바르게 짝지은 것은?

(1) $x(5x-4)=4(x-1)$
(2) $x^2-3\sqrt{2}x+6=0$

① (1) $\frac{4\pm 2i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$
② (1) $\frac{3\pm 2i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$
③ (1) $\frac{4\pm 2i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{3}\pm\sqrt{6}i}{2}$
④ (1) $\frac{1\pm 2i}{5}$, (2) $\frac{2\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$
⑤ (1) $\frac{4\pm 3i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$

해설

근의 공식을 이용하여 푼다.
(1) $x(5x-4)=4(x-1)$
$\therefore\ 5x^2-8x+4=0$
$\therefore\ x=\frac{4\pm\sqrt{16-20}}{5}=\frac{4\pm 2i}{5}$
(2) $x=\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{18-24}}{2}=\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$

8. x에 대한 이차방정식 $kx^2+(2k+1)x+6=0$의 해가 $2,\ \alpha$일 때, $k+\alpha$의 값을 구하면?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

해가 $2, \alpha$라면 방정식에 2를 대입하면 0이 된다.
$k \cdot 2^2 + (2k+1)2 + 6 = 0$
$4k + 4k + 8 = 0$에서 $k = -1$
$k = -1$을 방정식에 대입하고 α를 구한다.
$-x^2 - x + 6 = 0,\ x^2 + x - 6 = 0$
$(x+3)(x-2) = 0,\ x = 2, -3$
$\therefore k = -1,\ \alpha = -3$
$\therefore\ k + \alpha = -4$

9. x에 대한 이차방정식 $x^2+2(a+3)x+a^2+7=0$이 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $a \geq 0$ ② $-1 < a < 0$ ③ $-2 < a < 0$
④ $a \geq -\frac{1}{3}$ ⑤ $0 \leq a \leq \frac{1}{3}$

해설

주어진 이차방정식이 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\frac{D}{4} \geq 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4} = (a+3)^2 - (a^2+7) \geq 0$

$a^2+6a+9-a^2-7 \geq 0$

$6a+2 \geq 0 \quad \therefore a \geq -\frac{1}{3}$

10. 이차방정식 $2x^2-6x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$를 두 근으로 하는 이차방정식은?

① $2x^2-6x+1=0$ ② $x^2-6x+1=0$

③ $x^2-7x+3=0$ ④ $2x^2+6x-1=0$

⑤ $2x^2-7x+3=0$

해설

근과 계수의 관계에서

$\alpha+\beta=\frac{6}{2}=3$, $\alpha\beta=\frac{1}{2}$ 이므로

3 과 $\frac{1}{2}$을 이용한 근과 계수의 관계를 구해보면

$3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$, $3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$\therefore\ x^2-\frac{7}{2}x+\frac{3}{2}=0$

$\therefore\ 2x^2-7x+3=0$

11. 계수가 유리수인 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 일 때, ab 의 값은?

① -3 ② 0 ③ 2

④ 4 ⑤ $2 + 2\sqrt{3}$

해설

유리계수이므로 다른 한 근은 $2 - \sqrt{3}$
근과 계수와의 관계에 의해
$a = 4, b = 1$
$\therefore ab = 4$

해설

$x^2 + ax + b = 0$ 에 $x = 2 + \sqrt{3}$ 대입
$(2 + \sqrt{3})^2 - a \cdot (2 + \sqrt{3}) + b = 0$
계수가 유리수이므로
$\sqrt{3} \cdot (4 - a) + (b - 2a + 7) = 0$
$a = 4, b = 1$
$\therefore ab = 4$

12. 방정식 $(a^2-3)x-1=a(2x+1)$의 해가 존재하지 않기 위한 a의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$(a^2-2a-3)x=a+1$

$(a-3)(a+1)x=a+1$

$\therefore a=3$이면 해가 없다.

13. 이차방정식 $(2-\sqrt{3})x^2-2(\sqrt{3}-1)x-6=0$의 두 근 중 큰 근에 가장 가까운 정수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

이차항의 계수를 유리수로 고치기 위해 방정식의 양변에 $2+\sqrt{3}$을 곱하면

$x^2-2(\sqrt{3}+1)x-(12+6\sqrt{3})=0$

근의 공식을 이용해 위 방정식을 풀면

$x=(\sqrt{3}+1)\pm\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2+12+6\sqrt{3}}$

$=(\sqrt{3}+1)\pm 2\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

$=(\sqrt{3}+1)\pm 2(\sqrt{3}+1)$

$\therefore\ x=3\sqrt{3}+3$ 또는 $x=-\sqrt{3}-1$

큰 근은 $3\sqrt{3}+3$

그런데 $\sqrt{3}\fallingdotseq 1.7\cdots$ 이므로

가장 가까운 정수는 8이다.

14. 방정식 $x^2-2|x|-3=0$의 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

ⅰ) $x \geq 0$일 때
$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$
$x=-1$ 또는 $x=3$
그런데 $x \geq 0$이므로 $x=3$
ⅱ) $x<0$일 때
$x^2+2x-3=0$, $(x-1)(x+3)=0$
$x=1$ 또는 $x=-3$
그런데 $x<0$이므로 $x=-3$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $x=3$ 또는 $x=-3$
따라서 근의 합은 0이다.

15. 방정식 $x^2+2(k+a)x+k^2+k+b=0$이 k의 값에 관계없이 중근을 갖도록 실수 a, b의 값을 정할 때, $a+2b$의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

준식에서 $\dfrac{D}{4}=(k+a)^2-(k^2+k+b)$

$=(2a-1)k+a^2-b=0$

이것이 k에 대한 항등식이 되어야 하므로

$2a-1=0,\quad a^2-b=0$

$\therefore\ a=\dfrac{1}{2},\quad b=\dfrac{1}{4}$

$\therefore\ a+2b=1$