

1. 지수법칙을 이용하여 $2^7 \times 5^5$ 은 몇 자리 수인지 구하여라.

▶ 답: 자리 수

▷ 정답: 6자리 수

해설

$$2^7 \times 5^5 = 2^5 \cdot 2^2 \times 5^5 = (2 \times 5)^5 \times 4 = 4 \times 10^5$$

2. $2^{13} \times 5^{15}$ 은 몇 자리의 수인지 구하여라.

▶ 답: 자리 수

▷ 정답: 15 자리 수

해설

$$2^{13} \times 5^{13} \cdot 5^2 = (2 \times 5)^{13} \times 5^2 = 25 \times 10^{13}$$

따라서 15자리의 수이다.

3. $2^{10} \times 3 \times 5^8$ 은 몇 자리의 수인가?

① 8

② 9

③ 10

④ 11

⑤ 12

해설

$$2^{2+8} \times 3 \times 5^8 = 2^2 \times 3 \times (2 \times 5)^8 = 12 \times 10^8$$

따라서 10자리의 수이다.

4. $2^7 \times 5^4$ 이 n 자리의 자연수일 때, n 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$2 \times 5 = 10$ 이므로

$$2^7 \times 5^4 = 2^3 \times 2^4 \times 5^4 = 2^3 \times 10^4 = 8 \times 10000$$

따라서 5 자리의 자연수이다.

5. $2^{10} \times 5^{14}$ 은 n 자리의 자연수이다. n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$2 \times 5 = 10$ 이므로

$$5^4 \times 2^{10} \times 5^{10} = 5^4 \times 10^{10} = 625 \times 10^{10}$$

따라서 13자리의 자연수이다.

6. $2^5 \times 5^7 \times 7$ 이 n 자리의 자연수일 때, n 의 값은?

① 5

② 7

③ 8

④ 10

⑤ 12

해설

$2 \times 5 = 10$ 이므로

$$(2 \times 5)^5 \times 5^2 \times 7 = 175 \times 10^5$$

$$\therefore n = 8$$

7. $2^9 \times 3 \times 5^{12}$ 이 n 자리의 자연수 일 때, n 의 값을 구하면?

① 11

② 12

③ 13

④ 14

⑤ 15

해설

$2 \times 5 = 10$ 이므로

$$3 \times 5^3 \times (2 \times 5)^9 = 375 \times 10^9$$

$$\therefore n = 12$$

8. $\frac{2^{15} \times 15^{20}}{45^{10}}$ 은 몇 자리의 수인가?

① 8자리

② 10자리

③ 11자리

④ 12자리

⑤ 13자리

해설

$$\begin{aligned}\frac{2^{15} \times 15^{20}}{45^{10}} &= \frac{2^{15} \times (3 \times 5)^{20}}{(3^2 \times 5)^{10}} \\ &= \frac{2^{15} \times 3^{20} \times 5^{20}}{3^{20} \times 5^{10}} \\ &= 2^{15} \times 5^{10} \\ &= 2^5 \times 2^{10} \times 5^{10} \\ &= 32 \times 10^{10}\end{aligned}$$

따라서 12자리의 수이다.

9. $\frac{2^{10} \times 15^{20}}{45^{10}}$ 은 a 자리의 수이다. 이 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$$\frac{2^{10} \times 3^{20} \times 5^{20}}{3^{20} \times 5^{10}} = 2^{10} \times 5^{10} = 10^{10}$$

$$\therefore a = 11$$

10. $a = 4^9$, $b = 5^{12} + 5$ 일 때, $a \times b$ 는 n 자리의 자연수이다. 이 때, n 의 값은?

① 12

② 14

③ 17

④ 18

⑤ 20

해설

$$\begin{aligned}4^9(5^{12} + 5) &= 2^{18} \times 5^{12} + 2^{18} \times 5 \\ &= (2 \times 5)^{12} \times 2^6 + (2 \times 5) \times 2^{17}\end{aligned}$$

이 때 $(2 \times 5)^{12} \times 2^6 > (2 \times 5) \times 2^{17}$ 이므로

$(2 \times 5) \times 2^{17}$ 은 자릿수를 고려할 때 생각하지 않는다.

$$(2 \times 5)^{12} \times 2^6 = 64 \times (2 \times 5)^{12}$$

따라서 n 은 14 자리의 자연수이다.

11. $2^{16} \times 5^{20}$ 이 n 자리의 자연수일 때, n 의 값은?

① 16

② 17

③ 18

④ 19

⑤ 20

해설

$$2^{16} \times 5^{16} \times 5^4 = (2 \times 5)^{16} \times 5^4 = 625 \times 10^{16}$$

따라서 19 자리의 자연수이다.

12. $2^{14} \times 5^{18}$ 은 n 자리의 자연수이다. n 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 17

해설

$$2^{14} \times 5^{18} = (2 \times 5)^{14} \times 5^4 = 10^{14} \times 5^4 = 625 \times 10^{14}$$

따라서 17 자리의 자연수이다.

13. $2^8 \times 3^2 \times 5^{11}$ 이 n 자리의 자연수일 때, n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$\begin{aligned}2^8 \times 3^2 \times 5^{11} &= 3^2 \times 5^3 \times (2 \times 5)^8 \\ &= 1125 \times 10^8\end{aligned}$$

따라서 12 자리의 자연수이다.

14. $2^9 \times 3^2 \times 5^7$ 은 m 자리의 자연수이고, 각 자리의 숫자의 합은 n 이라고 한다. 이 때, $m+n$ 의 값은?

① 9

② 15

③ 18

④ 24

⑤ 36

해설

$$2^2 \times 3^2 \times (2 \times 5)^7 = 36 \times 10^7$$

9 자리 자연수이므로 $m = 9$

각 자리의 숫자의 합은 $n = 3 + 6 = 9$

$$\therefore m + n = 9 + 9 = 18$$

15. $\frac{2^{15} \times 15^{30}}{45^{15}}$ 은 a 자리의 수이다. 이 때, $a^2 + a + 1$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 273

해설

$$\frac{2^{15} \times 3^{30} \times 5^{30}}{3^{30} \times 5^{15}} = 2^{15} \times 5^{15} = 10^{15} \text{ 이므로}$$

$$a = 16 \quad \therefore a^2 + a + 1 = 273$$

16. $a = 4^5$, $b = 5^{10} + 5$ 일 때, $a \times b$ 는 n 자리의 자연수이다. 이 때, n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$4^5(5^{10} + 5) = 2^{10} \times 5^{10} + 2^{10} \times 5 = (2 \times 5)^{10} + (2 \times 5) \times 2^9$
따라서 n 은 11 자리의 자연수이다.

17. $2^{12} \times 3^2 \times 5^{10}$ 은 몇 자리의 수인지 구하여라.

▶ 답 : 자리 수

▷ 정답 : 12자리 수

해설

$$\begin{aligned} & 2^{12} \times 3^2 \times 5^{10} \\ &= 2^{10} \times 2^2 \times 3^2 \times 5^{10} \\ &= 2^2 \times 3^2 \times (2 \times 5)^{10} \\ &= 2^2 \times 3^2 \times (10)^{10} \\ &= 36 \times (10)^{10} \end{aligned}$$

18. $2^{10} \times 3 \times 5^8$ 은 몇 자리의 수인가?

① 8자리의 수

② 9자리의 수

③ 10자리의 수

④ 11자리의 수

⑤ 12자리의 수

해설

$$2^{2+8} \times 3 \times 5^8 = 2^2 \times 3 \times (2 \times 5)^8 = 12 \times 10^8$$

따라서 10자리의 수이다.

19. $2^3 \times 5^7 \times 2^6 \times 5^5$ 은 n 자리의 자연수이다. n 의 값을 구하면?

① 9

② 10

③ 11

④ 12

⑤ 13

해설

$$\begin{aligned}2^3 \times 5^7 \times 2^6 \times 5^5 &= 2^9 \times 5^{12} \\ &= 2^9 \times 5^9 \times 5^3 \\ &= 10^9 \times 125\end{aligned}$$

따라서 12 자리의 수이다.

20. $2^{13} \times 5^{15}$ 이 n 자리의 자연수일 때, n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$$\begin{aligned}2^{13} \times 5^{15} &= 2^{13} \times 5^{13} \times 5^2 \\ &= (2 \times 5)^{13} \times 5^2 \\ &= 25 \times 10^{13}\end{aligned}$$

따라서 15자리의 수이므로 $n = 15$ 이다.

21. $2^{12} \times 5^{13}$ 은 몇 자리의 수인지 구하여라.

▶ 답: 자리의 수

▷ 정답: 13 자리의 수

해설

$$\begin{aligned} 2^{12} \times 5^{13} &= 2^{12} \times 5^{12} \times 5 = (2 \times 5)^{12} \times 5 \\ &= 10^{12} \times 5 \end{aligned}$$

따라서 13자리의 수이다.

22. 다음 중 가장 큰 수는?

① $2^{10} \times 5^9 \times 7$

② $2^{12} \times 3 \times 5^{11}$

③ $2^{10} \times 5^{11}$

④ $2^{10} \times 5^9$

⑤ $2^9 \times 5^8 \times 13$

해설

① $2^{10} \times 5^9 \times 7 = 14 \times 10^9$ 이므로 11 자리의 수

② $2^{12} \times 3 \times 5^{11} = 6 \times 10^{11}$ 이므로 12 자리의 수

③ $2^{10} \times 5^{11} = 5 \times 10^{10}$ 이므로 11 자리의 수

④ $2^{10} \times 5^9 = 2 \times 10^9$ 이므로 10 자리의 수

⑤ $2^9 \times 5^8 \times 13 = 26 \times 10^8$ 이므로 10 자리의 수

23. $2^{17} \times 5^{20}$ 은 n 자리의 자연수이고, 3^{2008} 의 일의 자리의 숫자는 m 일 때, $n + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 21

해설

$$2^{17} \times 5^{20} = (2^{17} \times 5^{17}) \times 5^3 = 125 \times 10^{17}$$

$$\therefore n = 20$$

3^m 의 일의 자리의 수는 3, 9, 7, 1 로 반복되고

$$2008 = 4 \times 502 \text{ 이므로 } m = 1$$

$$\therefore n + m = 21$$

24. 3^x 의 일의 자리의 숫자가 1, 3^y 의 일의 자리의 숫자가 3일 때, $81^x \div 9^y$ 의 일의 자리의 숫자를 구하면? (단, x, y 는 $x > y$ 인 자연수)

① 1

② 3

③ 9

④ 7

⑤ 2

해설

3^k (k 는 자연수)의 일의 자리는

3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, ...

$$\therefore x = 4k_1, y = 4k_2 - 3$$

(단, $k_2 \leq k_1$, k_1, k_2 는 자연수이다.)

$$\begin{aligned}81^x \div 9^y &= 3^{4x-2y} \\ &= 3^{16k_1-8k_2+6} \\ &= 3^{2(8k_1-4k_2+3)} \\ &= 9^{8k_1-4k_2+3}\end{aligned}$$

9^k (k 는 자연수)의 일의 자리는 9, 1, 9, 1, ...

k_1, k_2 가 자연수이므로 $8k_1, 4k_2$ 는 짝수이다.

따라서 $8k_1 - 4k_2 + 3$ 은 홀수이므로

$81^x \div 9^y$ 의 일의 자리는 9이다.

25. $\frac{3^x}{9^{-x+y}} = 27$, $\frac{25^{x+y}}{5^{3y}} = 625$ 일 때, $64^x \times 625^y$ 의 자리의 수를 구하면?

① 10 자리

② 12 자리

③ 17 자리

④ 20 자리

⑤ 26 자리

해설

$$3^x = 27 \times 9^{-x+y} = 3^3 \times 3^{-2x+2y} = 3^{-2x+2y+3}$$

$$\therefore x = -2x + 2y + 3$$

$$25^{x+y} = 625 \times 5^{3y} = 5^4 \times 5^{3y} = 5^{3y+4}$$

$$\therefore 2x + 2y = 3y + 4$$

두 식을 연립하면

$$x = 5, y = 6$$

$$64^x \times 625^y = (2^6)^5 \times (5^4)^6 = 2^{30} \times 5^{24}$$

$$= (10)^{24} \times 2^6 = 64 \times 10^{24}$$

따라서 26 자리의 수이다.

26. $\frac{4^x}{16^{-x+y}} = 64$, $\frac{25^{x+y}}{5^{3y}} = 125$ 일 때, $32^x \times 125^y$ 의 자리의 수를 구하여라.

▶ **답:** 자리의 수

▷ **정답:** 11자리의 수

해설

$$4^x = 64 \times 16^{-x+y} = 4^{3-2x+2y} = 4^{-2x+2y+3}$$

$$\therefore x = -2x + 2y + 3$$

$$25^{x+y} = 125 \times 5^{3y} = 5^3 \cdot 5^{3y} = 5^{3y+3}$$

$$\therefore 2x + 2y = 3y + 3$$

두 식을 연립하면

$$x = 3, y = 3$$

$$32^x \times 125^y = (2^5)^3 \times (5^3)^3$$

$$= 2^{15} \times 5^9$$

$$= (10)^9 \times 2^6$$

$$= 64 \times 10^9$$

따라서 11 자리의 수이다.

27. $58^{2009} \times 35^{2009}$ 의 일의 자리의 숫자를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

58 의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자는 8 의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자와 같으므로, 8, 4, 2, 6 이 반복된다.

따라서 58^{2009} 의 일의 자리의 숫자는 8

35 의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자는 5 의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자와 같으므로

35^{2009} 의 일의 자리의 숫자는 5

$\therefore 58^{2009} \times 35^{2009}$ 의 일의 자리의 숫자는 8×5 의 일의 자리의 숫자인 0이다.

28. 3^{2009} 의 일의 자리의 숫자를 a 라 하고, $x = 3^{10}$ 일 때, 3^x 의 일의 자리의 숫자를 b 라 한다. 이 때, 13^{ab} 의 일의 자리의 숫자를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

3 의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자는 3, 9, 7, 1 이 순서대로 반복된다.

따라서 3^{2009} 의 일의 자리의 숫자는 $2009 = 4 \times 502 + 1$ 이므로 3 이다. $\therefore a = 3$

또, $10 = 4 \times 2 + 2$ 이므로 3^{10} 의 일의 자리의 숫자는 9 이다.

즉, $x = 3^{10}$ 일 때, 3^x 의 일의 자리의 숫자는 3^9 의 일의 자리의 숫자와 같으므로 3 이다. $\therefore b = 3$

13^{ab} 즉, 13^9 의 일의 자리의 숫자는 3^9 의 일의 자리의 숫자와 같고

$9 = 4 \times 2 + 1$ 이므로 일의 자리의 숫자는 3 이다.

29. 10^9 이 n 자리 자연수일 때, $\frac{3^n \times (2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}) \times 25^n}{(3^{n+2} - 6 \cdot 3^{n-1}) \times 5^n}$ 은 몇 자리 자연수인지 구하여라.

▶ **답:** 자리

▷ **정답:** 11 자리

해설

$$\frac{3^n \times (2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}) \times 25^n}{(3^{n+2} - 6 \cdot 3^{n-1}) \times 5^n} = \frac{3^n \times 2^n(1 + 2 + 2^2) \times (5^n)^2}{3^n(3^2 - 6 \cdot 3^{-1}) \times 5^n}$$

$$\frac{3^n \times 2^n \times 7 \times (5^n)^2}{3^n \times 7 \times 5^n} = 2^n 5^n = 10^n$$

10^9 은 10 자리의 자연수이므로 $\therefore n = 10$
따라서 $10^n = 10^{10}$ 은 11 자리의 자연수이다.

30. $2^{10} \cong 10^3$ 일 때, 25^{10} 은 몇 자리 자연수인지 구하여라.

▶ 답: 자리

▷ 정답: 15자리

해설

$2^{10} \cong 10^3$ 이므로

$$\begin{aligned} 25^{10} &= (5^2)^{10} = 5^{20} = \left(\frac{10}{2}\right)^{20} = \frac{10^{20}}{2^{20}} = \frac{10^{20}}{(2^{10})^2} \\ &\cong \frac{10^{20}}{(10^3)^2} = \frac{10^{20}}{10^6} = 10^{14} \end{aligned}$$

따라서 $25^{10} = 10^{14}$ 은 15 자리의 자연수이다.

31. 0.8^{10} 을 소수로 나타내어라. (단, $2^{10} \approx 1000$ 으로 계산한다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{10}$

해설

$$0.8^{10} = \left(\frac{8}{10}\right)^{10} = \left(\frac{2^3}{10}\right)^{10} = \frac{(2^{10})^3}{10^{10}}$$

$2^{10} \approx 10^3$ 이므로

$$(\text{준식}) = \frac{(2^{10})^3}{10^{10}} = \frac{(10^3)^3}{10^{10}} = \frac{10^9}{10^{10}} = \frac{1}{10}$$

따라서 주어진 식을 소수로 나타내면 0.1 이다.

32. 자연수 n 에 대하여 $2^n, 3^n, 4^n, 5^n$ 각각의 일의 자리 숫자의 합을 $f(n)$ 이라 정의하고, $g(n) = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ 이라 정의할 때, $f(g(1)) + f(g(2)) + f(g(3)) + \cdots + f(g(100))$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1808

해설

2^n 의 일의 자리 숫자는 2, 4, 8, 6 이 반복되고

3^n 의 일의 자리 숫자는 3, 9, 7, 1 이 반복되고

4^n 의 일의 자리 숫자는 4, 6 이 반복되고

5^n 의 일의 자리 숫자는 5 이다.

$g(1), g(2), g(3), \cdots$ 는 각각 1, 2, 6, 24, 120, 720, \cdots 에서 보듯이 $g(4)$ 부터는 모두 4 의 배수이다.

따라서

$$f(g(1)) = 2 + 3 + 4 + 5 = 14$$

$$f(g(2)) = 4 + 9 + 6 + 5 = 24$$

$$f(g(3)) = 4 + 9 + 6 + 5 = 24$$

$$f(g(4)) = f(g(5)) = f(g(6)) = \cdots = f(g(100))$$

$$= 6 + 1 + 6 + 5 = 18$$

$$\therefore f(g(1)) + f(g(2)) + f(g(3)) + \cdots + f(g(100))$$

$$= 14 + 24 + 24 + 18 \times 97 = 1808$$

33. 자연수 n 을 7 로 나눈 나머지를 $f(n)$ 이라 정의할 때, $f(8^{12} \times 25^{18})$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$$8^{12} \times 25^{18} = (2^3)^{12} \times (5^2)^{18} = 2^{36} \times 5^{36} = 10^{36} \text{ 이므로 } f(8^{12} \times 25^{18}) = f(10^{36})$$

10 을 7 로 나눈 나머지는 3 이므로 10^{36} 를 7 로 나눈 나머지는 $3^{36} = (3^2)^{18} = 9^{18}$ 을 7 로 나눈 나머지와 같다.

또, 9 를 7 로 나눈 나머지는 2 이므로 9^{18} 을 7 로 나눈 나머지는 $2^{18} = (2^3)^6 = 8^6$ 을 7 로 나눈 나머지와 같다.

또, 8 을 7 로 나눈 나머지는 1 이므로 8^6 을 7 로 나눈 나머지는 1^6 을 7 로 나눈 나머지와 같다.

따라서 10^{36} 를 7 로 나눈 나머지는 1,

$$\text{즉 } f(10^{36}) = 1$$