1. 다항식 $2x^2+5ax-a^2$을 다항식 $P(x)$로 나눈 몫이 $x+3a$, 나머지가 $2a^2$일 때, 다항식 $(x+a)P(x)$를 나타낸 것은?

① $x^2+2ax-2a^2$　　② x^2-a^2

③ $2x^2+3ax+a^2$　　④ $2x^2-3ax-a^2$

⑤ $2x^2+ax-a^2$

해설

$2x^2+5ax-a^2=P(x)(x+3a)+2a^2$이므로

$P(x)(x+3a)=2x^2+5ax-3a^2$

따라서, 다항식 $P(x)$는 $2x^2+5ax-3a^2$을 $x+3a$로 나눈 몫이므로

$P(x)=2x-a$

$$\begin{aligned}\therefore\ (x+a)P(x)&=(x+a)(2x-a)\\&=2x^2+ax-a^2\end{aligned}$$

2. 다항식 $f(x)$를 $x-1$, $x-2$로 나눈 나머지는 각각 1, 2이다. 다항식 $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$일 때, $f(x)$를 $x-3$으로 나눈 나머지는?

① $Q(3)+3$　② $Q(3)+4$　③ $2Q(3)+3$
④ $2Q(3)+4$　⑤ $Q(3)$

해설

주어진 조건에서 $f(1)=1$, $f(2)=2$이다.
$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$라 놓으면
$f(1)=a+b=1$, $f(2)=2a+b=2$
$\therefore\ a=1,\ b=0$
즉 $f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+x$
$\therefore\ f(3)=2Q(3)+3$

3. x의 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나눌 때, 나머지가 2이다. 이 때, $(x^2-x+3)f(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지를 구하면?

① 10　　② 6　　③ 0　　④ 30　　⑤ 12

해설

$f(-1)=2$

$(x^2-x+3)f(x)=(x+1)Q(x)+R$

$x=-1$ 대입

$\therefore R=5f(-1)=5\times 2=10$

4. 다항식 x^3+ax^2+bx+c 를 $x+2$로 나누면 3이 남고, x^2-1로 나누면 떨어진다. 이 때, abc의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$x^3+ax^2+bx+c=(x+2)Q_{1(}x)+3$

$=(x+1)(x-1)Q_{2(}x)$

$f(-2)=3 \quad f(1)=0 \quad f(-1)=0$

$x=-2$ 대입, $-8+4a-2b+c=3$

$x=-1$ 대입, $-1+a-b+c=0$

$x=1$ 대입, $1+a+b+c=0$

세 식을 연립해서 구하면

$a=3, b=-1, c=-3$

$\therefore\ abc=9$

5. 등식 $3x^3 - x + 2 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$ 가 x 에 관한 항등식이 되도록 상수 $a,\ b,\ c,\ d$ 의 값을 정하면?

① $a = 3\ b = 7\ ,\ c = -4\ ,\ d = 4$

② $a = 3\ b = 9\ ,\ c = 8\ ,\ d = 4$

③ $a = 2\ b = 9\ ,\ c = 6\ ,\ d = 4$

④ $a = 1\ b = 3\ ,\ c = 8\ ,\ d = 4$

⑤ $a = 2\ b = -9\ ,\ c = 6\ ,\ d = 4$

해설

$$
\begin{array}{c|cccccl}
1 & 3 & 0 & -1 & 2 & & \\
 & & 3 & 3 & 2 & & \\
\hline
1 & 3 & 3 & 2 & \boxed{4} & \leftarrow & \mathrm{d} \\
 & & 3 & 6 & & & \\
\hline
1 & 3 & 6 & \boxed{8} & \leftarrow & \mathrm{c} & \\
 & & 3 & & & & \\
\hline
 & 3 & \boxed{9} & \leftarrow \mathrm{b} & & & \\
 & \uparrow & & & & & \\
 & \mathrm{a} & & & & &
\end{array}
$$

$\therefore\ a = 3,\ b = 9,\ c = 8,\ d = 4$

해설

(i) $x - 1 = y$ 로 놓으면 $x = y + 1$ 이므로

$3(y+1)^3 - (y+1) + 2 = ay^3 + by^2 + cy + d$

$\therefore\ 3y^3 + 9y^2 + 8y + 4 = ay^3 + by^2 + cy + d$

$\therefore\ a = 3\ ,\ b = 9\ ,\ c = 8\ ,\ d = 4$

(ii) x 대신 $-1,\ 0,\ 1,\ 2$ 를 대입하면,

$x = 0$ 대입 : $2 = -a + b - c + d \cdots$ ①

$x = -1$ 대입 : $0 = -8a + 4b - 2c + d \cdots$ ②

$x = 1$ 대입 : $4 = d\ \ \cdots\cdots$ ③

$x = 2$ 대입 : $24 = a + b + c + d \cdots$ ④

①, ②, ③, ④를 연립하여 풀면,

$\therefore\ a = 3,\ b = 9,\ c = 8,\ d = 4$

6. $(x^2-x+1)(x^2-x-3)-5$를 인수분해하면 $(x^2+ax+b)(x^2+cx+2)$일 때, 상수 $a,\ b,\ c$의 합 $a+b+c$의 값은?

① -6　　② -3　　③ 0　　④ 3　　⑤ 6

해설

x^2-x를 X로 치환하면

$(x^2-x+1)(x^2-x-3)-5$

$=(X+1)(X-3)-5$

$=X^2-2X-3-5$

$=X^2-2X-8$

$=(X-4)(X+2)$

$=(x^2-x-4)(x^2-x+2)$

따라서, $a=-1,\ b=-4,\ c=-1$이므로

$a+b+c=-1-4-1=-6$

7. $\dfrac{2012^3+1}{2012\times2011+1}$ 의 값을 a라 할 때, $\dfrac{a+1}{a-1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{1007}{1006}$

해설

$a=\dfrac{(2012+1)(2012^2-2012+1)}{(2012^2-2012+1)}$

$=2013$ 이므로

$\therefore\ \dfrac{a+1}{a-1}=\dfrac{2013+1}{2013-1}=\dfrac{2014}{2012}=\dfrac{1007}{1006}$

8. $x = 1001$ 일 때, $\dfrac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1000

해설

$$\begin{aligned}\frac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1} &= \frac{(x^4+1)(x^2-1)}{(x^4+1)(x+1)} \\ &= x - 1 \\ &= 1001 - 1 \\ &= 1000\end{aligned}$$

9. 두 다항식 $x^3+2x^2-x-2, 2x^3+(a-2)x^2-2x$ 의 최대공약수가 이차식이 되도록 하는 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=2$

해설

$x^3+2x^2-x-3=x^2(x+2)-(x+2)$
$=(x+2)(x-1)(x-2)$
$2x^3+(a-2)x^2-2x=x(2x^2+(a-2)x-2)\cdots$ ①
두 식의 최대 공약수가 이차식이므로
$x=-2,-1,1$ 을 ①식에 대입하면
식의 값이 동시에 0이 되는 경우가 있어야 한다.
$x=-2$ 일 때, $8-2a+4-2=0,\ a=5$
$x=-1$ 일 때, $2-a+2-2=0,\ a=2$
$x=1$ 일 때, $2+a-2-2=0,\ a=2$
$x=-1,\ 1$ 일때, 일치함
최대 공약수는 $(x+1)(x-1)$
$\therefore\ a=2$

10. $x+y+z=4,\ xy+yz+zx=1,\ xyz=2$일 때, $(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$의 값을 구하면?

① 16　　② 8　　③ 4　　④ 2　　⑤ 1

해설

$(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$을
$xy+yz+zx=1$을 이용하여 변형하면
$(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$
$=(1-zx)(1-xy)(1-yz)$
$=1-(xy+yz+zx)+(x^2yz+xy^2z+xyz^2)-(xyz)^2$
$=1-(xy+yz+zx)+xyz(x+y+z)-(xyz)^2$
$=1-1+2\cdot 4-4$
$=4$
※ 위에서 아래의 전개식을 이용하였다.
$(x-a)(x-b)(x-c)$
$=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$

11. 실수 x가 $x^2-3x+1=0$을 만족할 때, $x^3+\frac{1}{x^3}$의 값을 구하면?

① 18　　② 19　　③ 20　　④ 21　　⑤ 22

해설

준식의 양변을 x로 나누면

$x+\frac{1}{x}=3$

$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$=3^3-3\times3=18$

12. $a+b+c=7$, $a^2+b^2+c^2=21$, $abc=8$일 때, $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$의 값은?

① 26　② 48　③ 84　④ 96　⑤ 112

해설

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^c+2(ab+bc+ca)$
$49=21+2(ab+bc+ca)$
$\therefore\ ab+bc+ca=14$
$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$
$=(14)^2-2(8\times7)$
$=84$

13. $f(x) = x^2 + ax + b,\ g(x) = x^2 + cx + d$가 다음 조건을 만족할 때, $ab - c + d$의 값은?

㉠ $f(x),\ g(x)$의 최소공배수는 $x^3 + 3x^2 - 13x - 15$이다.
㉡ $f(1) = -4,\ g(0) = 5$

① -31　② -11　③ 5　④ 13　⑤ 29

해설

두 다항식의 최소공배수
$x^3 + 3x^2 - 13x - 15 = (x+1)(x+5)(x-3)$에서
인수들 중 적당한 두 인수들로 $f(1) = -4$,
$g(0) = 5$이 되도록 $f(x), g(x)$를 만들면
$f(x) = (x+1)(x-3) = x^2 - 2x - 3$
$g(x) = (x+1)(x+5) = x^2 + 6x + 5$
$a = -2, b = -3, c = 6, d = 5$
$\therefore\ ab - c + d = 5$

14. x^2 의 계수가 1 인 두 이차 다항식 $f(x)$, $g(x)$ 의 합이 $2x^2+5x-3$ 이고 최소공배수가 x^3+2x^2-5x-6 이다. $f(0)=3$, $g(0)=-6$ 일 때, $f(2)+g(-1)$ 의 값은?

① 9　　② 11　　③ 13　　④ 14　　⑤ 15

해설

$f(x)+g(x)=2x^2+5x-3$

$f(x)=Ga, g(x)=Gb$ (a, b는 서로소)

$G(a+b)=(2x-1)(x+3)$

최소공배수 $Gab=(x+3)(x-2)(x+1)$

$f(x)=(x+3)(x+1)$　$(\Leftarrow f(0)=3)$

$g(x)=(x+3)(x-2)$　$(\Leftarrow g(0)=-6)$

$\therefore f(2)+g(-1)=15+(-6)=9$

15. 이차 이상의 다항식 $f(x)$를 $(x-a)(x-b)$로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(a+b)$는? (단, a, b는 서로 다른 실수)

① $af(a)+bf(b)$
② $-af(a)+bf(b)$
③ $\dfrac{af(a)-bf(b)}{a-b}$
④ $\dfrac{bf(a)-af(b)}{a-b}$
⑤ $bf(a)-af(b)$

해설

$R(x)=cx+d$라 하면

$f(a)=ac+d,\ f(d)=bc+d$

$\therefore\ f(a)-f(b)=(a-b)c$

$\therefore\ c=\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$

또 $f(a)+f(b)=(a+c)c+2d$

$=\dfrac{(a+b)\{f(a)-f(b)\}}{a-b}+2d$

$\therefore\ 2d=f(a)+f(b)-\dfrac{(a+b)\{f(a)-f(b)\}}{a-b}$

$=\dfrac{(a-b)\{f(a)+f(b)\}}{a-b}-\dfrac{(a+b)\{f(a)-f(b)\}}{a-b}$

$=\dfrac{1}{a-b}\Big[af(a)+af(b)-bf(a)-bf(b)-\{af(a)-af(b)+bf(a)-bf(b)\}\Big]$

$=\dfrac{1}{a-b}\{af(a)+af(b)-bf(a)-bf(b)-af(a)+af(b)-bf(a)+bf(b)\}=\dfrac{2af(b)-2bf(b)}{a-b}$

$\therefore\ d=\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}$

따라서 $R(a+b)=(a+b)c+d$

$=(a+b)\times\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}+\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}$

$=\dfrac{(a+b)\{f(a)-f(b)\}}{a-b}+\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}$

$=\dfrac{af(a)-af(b)+bf(a)-bf(b)+af(b)-bf(a)}{a-b}$

$=\dfrac{af(a)-bf(b)}{a-b}$