

1. 다항식 $2x^2 + 5ax - a^2$ 을 다항식 $P(x)$ 로 나눈 몫이 $x + 3a$, 나머지가 $2a^2$ 일 때, 다항식 $(x + a)P(x)$ 를 나타낸 것은?

① $x^2 + 2ax - 2a^2$

② $x^2 - a^2$

③ $2x^2 + 3ax + a^2$

④ $2x^2 - 3ax - a^2$

⑤ $2x^2 + ax - a^2$

해설

$2x^2 + 5ax - a^2 = P(x)(x + 3a) + 2a^2$ 이므로

$$P(x)(x + 3a) = 2x^2 + 5ax - 3a^2$$

따라서, 다항식 $P(x)$ 는 $2x^2 + 5ax - 3a^2$ 을 $x + 3a$ 로 나눈 몫이므로

$$P(x) = 2x - a$$

$$\begin{aligned}\therefore (x + a)P(x) &= (x + a)(2x - a) \\ &= 2x^2 + ax - a^2\end{aligned}$$

2. 다항식 $f(x)$ 를 $x-1$, $x-2$ 로 나눈 나머지는 각각 1, 2이다. 다항식 $f(x)$ 를 $(x-1)(x-2)$ 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$ 일 때, $f(x)$ 를 $x-3$ 으로 나눈 나머지는?

① $Q(3) + 3$

② $Q(3) + 4$

③ $2Q(3) + 3$

④ $2Q(3) + 4$

⑤ $Q(3)$

해설

주어진 조건에서 $f(1) = 1$, $f(2) = 2$ 이다.

$f(x) = (x-1)(x-2)Q(x) + ax + b$ 라 놓으면

$$f(1) = a + b = 1, f(2) = 2a + b = 2$$

$$\therefore a = 1, b = 0$$

$$\text{즉 } f(x) = (x-1)(x-2)Q(x) + x$$

$$\therefore f(3) = 2Q(3) + 3$$

3. x 의 다항식 $f(x)$ 를 $x+1$ 로 나눌 때, 나머지가 2이다. 이 때, $(x^2 - x + 3)f(x)$ 를 $x+1$ 로 나눈 나머지를 구하면?

- ① 10 ② 6 ③ 0 ④ 30 ⑤ 12

해설

$$f(-1) = 2$$

$$(x^2 - x + 3)f(x) = (x+1)Q(x) + R$$

$x = -1$ 대입

$$\therefore R = 5f(-1) = 5 \times 2 = 10$$

4. 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + c$ 를 $x+2$ 로 나누면 3이 남고, $x^2 - 1$ 로 나누면 떨어진다. 이 때, abc 의 값을 구하면?

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$$\begin{aligned}x^3 + ax^2 + bx + c &= (x+2)Q_1(x) + 3 \\ &= (x+1)(x-1)Q_2(x)\end{aligned}$$

$$f(-2) = 3 \quad f(1) = 0 \quad f(-1) = 0$$

$$x = -2 \text{ 대입, } -8 + 4a - 2b + c = 3$$

$$x = -1 \text{ 대입, } -1 + a - b + c = 0$$

$$x = 1 \text{ 대입, } 1 + a + b + c = 0$$

세 식을 연립해서 구하면

$$a = 3, b = -1, c = -3$$

$$\therefore abc = 9$$

5. 등식 $3x^3 - x + 2 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$ 가 x 에 관한 항등식이 되도록 상수 a, b, c, d 의 값을 정하면?

① $a = 3, b = 7, c = -4, d = 4$

② $a = 3, b = 9, c = 8, d = 4$

③ $a = 2, b = 9, c = 6, d = 4$

④ $a = 1, b = 3, c = 8, d = 4$

⑤ $a = 2, b = -9, c = 6, d = 4$

해설

1	3	0	-1	2	
		3	3	2	
1	3	3	2	4	← d
		3	6		
1	3	6	8		← c
		3			
	3	9			← b
	↑				
	a				

$\therefore a = 3, b = 9, c = 8, d = 4$

해설

(i) $x - 1 = y$ 로 놓으면 $x = y + 1$ 이므로

$$3(y+1)^3 - (y+1) + 2 = ay^3 + by^2 + cy + d$$

$$\therefore 3y^3 + 9y^2 + 8y + 4 = ay^3 + by^2 + cy + d$$

$$\therefore a = 3, b = 9, c = 8, d = 4$$

(ii) x 대신 $-1, 0, 1, 2$ 를 대입하면,

$$x = 0 \text{ 대입 : } 2 = -a + b - c + d \cdots \textcircled{1}$$

$$x = -1 \text{ 대입 : } 0 = -8a + 4b - 2c + d \cdots \textcircled{2}$$

$$x = 1 \text{ 대입 : } 4 = d \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$x = 2 \text{ 대입 : } 24 = a + b + c + d \cdots \textcircled{4}$$

①, ②, ③, ④를 연립하여 풀면,

$$\therefore a = 3, b = 9, c = 8, d = 4$$

6. $(x^2 - x + 1)(x^2 - x - 3) - 5$ 를 인수분해하면 $(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + 2)$ 일 때, 상수 a, b, c 의 합 $a + b + c$ 의 값은?

①

-6

② -3

③ 0

④ 3

⑤ 6

해설

$x^2 - x$ 를 X 로 치환하면

$$(x^2 - x + 1)(x^2 - x - 3) - 5$$

$$= (X + 1)(X - 3) - 5$$

$$= X^2 - 2X - 3 - 5$$

$$= X^2 - 2X - 8$$

$$= (X - 4)(X + 2)$$

$$= (x^2 - x - 4)(x^2 - x + 2)$$

따라서, $a = -1, b = -4, c = -1$ 이므로

$$a + b + c = -1 - 4 - 1 = -6$$

7. $\frac{2012^3 + 1}{2012 \times 2011 + 1}$ 의 값을 a 라 할 때, $\frac{a+1}{a-1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1007}{1006}$

해설

$$a = \frac{(2012 + 1)(2012^2 - 2012 + 1)}{(2012^2 - 2012 + 1)}$$

= 2013 이므로

$$\therefore \frac{a+1}{a-1} = \frac{2013+1}{2013-1} = \frac{2014}{2012} = \frac{1007}{1006}$$

8. $x = 1001$ 일 때, $\frac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1000

해설

$$\begin{aligned}\frac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1} &= \frac{(x^4 + 1)(x^2 - 1)}{(x^4 + 1)(x + 1)} \\ &= x - 1 \\ &= 1001 - 1 \\ &= 1000\end{aligned}$$

9. 두 다항식 $x^3 + 2x^2 - x - 2, 2x^3 + (a - 2)x^2 - 2x$ 의 최대공약수가 이차식이 되도록 하는 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

해설

$$x^3 + 2x^2 - x - 3 = x^2(x + 2) - (x + 2)$$

$$= (x + 2)(x - 1)(x - 2)$$

$$2x^3 + (a - 2)x^2 - 2x = x(2x^2 + (a - 2)x - 2) \cdots \textcircled{1}$$

두 식의 최대 공약수가 이차식이므로

$x = -2, -1, 1$ 을 ①식에 대입하면

식의 값이 동시에 0이 되는 경우가 있어야 한다.

$$x = -2 \text{ 일 때, } 8 - 2a + 4 - 2 = 0, a = 5$$

$$x = -1 \text{ 일 때, } 2 - a + 2 - 2 = 0, a = 2$$

$$x = 1 \text{ 일 때, } 2 + a - 2 - 2 = 0, a = 2$$

$x = -1, 1$ 일때, 일치함

최대 공약수는 $(x + 1)(x - 1)$

$$\therefore a = 2$$

10. $x+y+z = 4$, $xy+yz+zx = 1$, $xyz = 2$ 일 때, $(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$ 의 값을 구하면?

① 16

② 8

③ 4

④ 2

⑤ 1

해설

$(xy + yz)(yz + zx)(zx + xy)$ 을

$xy + yz + zx = 1$ 을 이용하여 변형하면

$$(xy + yz)(yz + zx)(zx + xy)$$

$$= (1 - zx)(1 - xy)(1 - yz)$$

$$= 1 - (xy + yz + zx) + (x^2yz + xy^2z + xyz^2) - (xyz)^2$$

$$= 1 - (xy + yz + zx) + xyz(x + y + z) - (xyz)^2$$

$$= 1 - 1 + 2 \cdot 4 - 4$$

$$= 4$$

※ 위에서 아래의 전개식을 이용하였다.

$$(x - a)(x - b)(x - c)$$

$$= x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc$$

11. 실수 x 가 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 을 만족할 때, $x^3 + \frac{1}{x^3}$ 의 값을 구하면?



① 18

② 19

③ 20

④ 21

⑤ 22

해설

준식의 양변을 x 로 나누면

$$x + \frac{1}{x} = 3$$

$$\begin{aligned} x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= 3^3 - 3 \times 3 = 18 \end{aligned}$$

12. $a + b + c = 7$, $a^2 + b^2 + c^2 = 21$, $abc = 8$ 일 때, $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$ 의 값은?

① 26

② 48

③ 84

④ 96

⑤ 112

해설

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$49 = 21 + 2(ab + bc + ca)$$

$$\therefore ab + bc + ca = 14$$

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = (ab + bc + ca)^2 - 2abc(a + b + c)$$

$$= (14)^2 - 2(8 \times 7)$$

$$= 84$$

13. $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = x^2 + cx + d$ 가 다음 조건을 만족할 때, $ab - c + d$ 의 값은?

㉠ $f(x)$, $g(x)$ 의 최소공배수는 $x^3 + 3x^2 - 13x - 15$ 이다.

㉡ $f(1) = -4$, $g(0) = 5$

① -31

② -11

③ 5

④ 13

⑤ 29

해설

두 다항식의 최소공배수

$x^3 + 3x^2 - 13x - 15 = (x+1)(x+5)(x-3)$ 에서

인수들 중 적당한 두 인수들로 $f(1) = -4$,

$g(0) = 5$ 이 되도록 $f(x), g(x)$ 를 만들면

$f(x) = (x+1)(x-3) = x^2 - 2x - 3$

$g(x) = (x+1)(x+5) = x^2 + 6x + 5$

$a = -2, b = -3, c = 6, d = 5$

$\therefore ab - c + d = 5$

14. x^2 의 계수가 1인 두 이차 다항식 $f(x)$, $g(x)$ 의 합이 $2x^2 + 5x - 3$ 이고
최소공배수가 $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ 이다. $f(0) = 3$, $g(0) = -6$ 일 때,
 $f(2) + g(-1)$ 의 값은?

① 9

② 11

③ 13

④ 14

⑤ 15

해설

$$f(x) + g(x) = 2x^2 + 5x - 3$$

$$f(x) = Ga, g(x) = Gb \quad (a, b \text{는 서로소})$$

$$G(a+b) = (2x-1)(x+3)$$

$$\text{최소공배수 } Gab = (x+3)(x-2)(x+1)$$

$$f(x) = (x+3)(x+1) \quad (\Leftarrow f(0) = 3)$$

$$g(x) = (x+3)(x-2) \quad (\Leftarrow g(0) = -6)$$

$$\therefore f(2) + g(-1) = 15 + (-6) = 9$$

15. 이차 이상의 다항식 $f(x)$ 를 $(x-a)(x-b)$ 로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $R(a+b)$ 는? (단, a, b 는 서로 다른 실수)

① $af(a) + bf(b)$

② $-af(a) + bf(b)$

③ $\frac{af(a) - bf(b)}{a - b}$

④ $\frac{bf(a) - af(b)}{a - b}$

⑤ $bf(a) - af(b)$

해설

$R(x) = cx + d$ 라 하면

$$f(a) = ac + d, f(b) = bc + d$$

$$\therefore f(a) - f(b) = (a - b)c$$

$$\therefore c = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

$$\text{또 } f(a) + f(b) = (a + b)c + 2d$$

$$= \frac{(a + b) \{f(a) - f(b)\}}{a - b} + 2d$$

$$\therefore 2d = f(a) + f(b) - \frac{(a + b) \{f(a) - f(b)\}}{a - b}$$

$$= \frac{(a - b) \{f(a) + f(b)\}}{a - b} - \frac{(a + b) \{f(a) - f(b)\}}{a - b}$$

$$= \frac{1}{a - b} [af(a) + af(b) - bf(a) - bf(b) - \{af(a) - af(b) + bf(a) - bf(b)\}]$$

$$= \frac{1}{a - b} \{af(a) + af(b) - bf(a) - bf(b) - af(a) + af(b) - bf(a) + bf(b)\} = \frac{2af(b) - 2bf(a)}{a - b}$$

$$\therefore d = \frac{af(b) - bf(a)}{a - b}$$

$$\text{따라서 } R(a + b) = (a + b)c + d$$

$$= (a + b) \times \frac{f(a) - f(b)}{a - b} + \frac{af(b) - bf(a)}{a - b}$$

$$= \frac{(a + b) \{f(a) - f(b)\}}{a - b} + \frac{af(b) - bf(a)}{a - b}$$

$$= \frac{af(a) - af(b) + bf(a) - bf(b) + af(b) - bf(a)}{a - b}$$

$$= \frac{af(a) - bf(b)}{a - b}$$