

1. 전체집합 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 조건 $x^2 - 2 > 0$ 의 진리집합은?
- ① $\emptyset$ ② $\{0, 1\}$ ③ $\{3, 4, 5\}$
④ $\{2, 3, 4, 5\}$ ⑤ U

해설

주어진 조건 $x^2 - 2 > 0$ 에
 $x = 0$ 을 대입하면 $0 - 2 > 0$ (거짓)
 $x = 1$ 을 대입하면 $1 - 2 > 0$ (거짓)
 $x = 2$ 를 대입하면 $4 - 2 > 0$ (참)
 $x = 3$ 을 대입하면 $9 - 2 > 0$ (참)
 $x = 4$ 를 대입하면 $16 - 2 > 0$ (참)
 $x = 5$ 를 대입하면 $25 - 2 > 0$ (참)
따라서 구하는 진리집합은 $\{2, 3, 4, 5\}$

2. 다음 중 거짓인 명제를 모두 고른 것은?

㉠ $xy > x + y > 4$ 이면 $x > 2, y > 2$ 이다.

㉡ $x > 1$ 이면 $x^2 > 1$ 이다.

㉢ $x + y = 0$ 이면 $x = 0$ 이고 $y = 0$ 이다.

㉣ $x = 1$ 이면 $x^2 = 1$ 이다.

㉤ $2x + 4 > 0$ 이면 $x > -2$ 이다.

해설

㉠ (반례) $x = 1.5, y = 10$ 이면 $xy > x + y > 4$ 이지만 $x < 2, y > 2$ 이므로 거짓이다.

㉢ (반례) $x = -1, y = 1$ 이면 $x + y = 0$ 이지만 $x \neq 0, y \neq 0$ 이므로 거짓이다.

3. n 이 100보다 작은 자연수일 때, 다음 명제가 거짓임을 보여주는 반례는 모두 몇 가지인가?

‘ n^2 이 12의 배수이면 n 은 12의 배수이다.’

▶ 답 : 8 가지

▷ 정답 : 8 가 지

해설

명제가 거짓임을 보이는 반례는 n^2 이 12의 배수이면서 n 이 12의 배수가 아닌 수를 찾으면 된다. 즉, n 은 6의 배수이면서 12의 배수가 아닌 수를 찾으면 된다.

$n \in \{6 \times 1, 6 \times 3, 6 \times 5, 6 \times 7, 6 \times 9, 6 \times 11, 6 \times 13, 6 \times 15\}$

4. 명제 ' $|x-1| \leq a$ 이면 $|x| < 3$ 이다.'가 참이 되기 위한 a 의 값의 범위는?
(단, x, y 는 실수이고, $a > 0$)

① $0 < a \leq 2$

② $0 < a < 2$

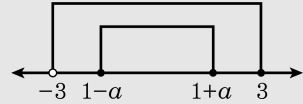
③ $0 < a \leq 4$

④ $0 < a < 4$

⑤ $0 < a < 5$

해설

$|x-1| \leq a$ 에서 $-a \leq x-1 \leq a \therefore 1-a \leq x \leq 1+a$ $|x| < 3$ 에서 $-3 < x < 3$ 따라서 주어진 명제가 참이 되려면,



위의 그림에서 $1-a > -3$ 그리고 $1+a < 3 \therefore a < 4$ 그리고 $a < 2 \therefore a < 2$ 그런데 $0 < a$ 이므로, $0 < a < 2$

5. 명제 ' $x-2=0$ 이면 $x^2-ax+6=0$ 이다.' 가 참이 되도록 하는 상수 a 의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

명제 ' $x-2=0$ 이면 $x^2-ax+6=0$ 이다.' 가 참이 되려면
 $2^2-2a+6=0$ 을 만족해야 한다.
 $2^2-2a+6=0$, $2a=10$
 $\therefore a=5$

6. 다음 중 거짓인 명제는?

- ① 자연수 n 에 대하여 n^2 이 짝수이면 n 도 짝수이다.
- ② 자연수 n 에 대하여 n^2 이 홀수이면 n 도 홀수이다.
- ③ 자연수 n 에 대하여 n^2 이 3의 배수이면 n 도 3의 배수이다.
- ④ 자연수에 대하여 두 수가 모두 짝수이면 두 수의 합도 짝수이다.
- ⑤ 자연수에 대하여 두 수의 합이 짝수이면 두 수는 모두 짝수이다.

해설

주어진 명제의 참, 거짓에 대한 직접적인 판단이 어려울 때는 그 명제의 대우가 참인지 확인한다.

- ①, ② 생략
- ③ $n = 3k + 1$ $n^2 = (3n + 1)^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1 \neq 3m$ (참)
(대우가 참 $\rightarrow$ 참인 명제)
- ④ 두 수의 합이 홀수이면 두 수 중 적어도 하나는 홀수이다. (참)
- ⑤ 반례 : 두 수 모두 홀수인 경우(거짓)

7. 두 명제 $p \rightarrow q$, $\sim r \rightarrow \sim q$ 가 모두 참일 때 다음 명제 중에서 반드시 참이라고 할 수 없는 것은?

① $q \rightarrow r$

② $p \rightarrow r$

③ $\sim q \rightarrow \sim p$

④ $r \rightarrow p$

⑤ $\sim r \rightarrow \sim p$

해설

$$\begin{aligned} p \rightarrow q(T) &\Rightarrow \sim q \rightarrow \sim p(T), \sim r \rightarrow \sim q(T) \Rightarrow q \rightarrow r(T) \\ \therefore p \rightarrow q \rightarrow r(T) &\Rightarrow p \rightarrow r(T) \\ \therefore \sim r \rightarrow \sim p(T) \end{aligned}$$

8. $x \leq -1$ 은 $x \leq a$ 이기 위한 필요조건이고, $x \geq b$ 는 $x \geq 3$ 이기 위한 충분조건일 때, a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x \leq -1$ 은 $x \leq a$ 이기 위한 필요조건이므로
「 $x \leq a$ 이면 $x \leq -1$ 이다.」가 참이어야 한다.
 $\therefore a \leq -1$
또, $x \geq b$ 는 $x \geq 3$ 이기 위한 충분조건이므로
「 $x \geq b$ 이면 $x \geq 3$ 이다.」가 참이어야 한다.
 $\therefore b \geq 3$
따라서, a 의 최댓값은 -1 , b 의 최솟값은 3 이므로
구하는 값은 $-1 + 3 = 2$ 이다.

9. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라고 하자. 이때, 다음 식을 만족시키는 조건 p 는 q 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

$$\{(P \cap Q) \cup (P \cap Q^c)\} \cap Q = P$$

▶ 답: 조건

▷ 정답: 충분조건

해설

$$\begin{aligned} & \{(P \cap Q) \cup (P \cap Q^c)\} \cap Q = P \\ & \{P \cap (Q \cup Q^c)\} \cap Q = P \\ & (P \cap U) \cap Q = P \\ & P \cap Q = P \\ & P \subset Q \\ & \therefore p \Rightarrow q \\ & \text{따라서, } p \text{ 는 } q \text{ 이기 위한 충분조건이다.} \end{aligned}$$

10. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 r 이기 위한 충분조건, q 는 r 이기 위한 충분조건, s 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이 때, q 는 p 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답: 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

$$P \subset R \subset S \subset Q \therefore P \subset Q \text{ 이므로 } P \subset Q$$

$$\therefore q \text{ 는 } p \text{ 이기 위한 필요조건}$$

11. 두 실수 a, b 에 대하여 $0 < a < b$, $a + b = 1$ 일 때, 다음 중 대소를 비교한 것으로 옳지 않은 것은?

① $\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b-a}$

② $\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

③ $\sqrt{a} + \sqrt{b} < 1$

④ $\sqrt{b-a} < 1$

⑤ $\sqrt{b-a} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

해설

$$\begin{aligned}(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - 1^2 &= a + b + 2\sqrt{ab} - 1 \\ &= 2\sqrt{ab} \quad (\because a + b = 1) > 0\end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt{a} + \sqrt{b} > 1$$

12. 두 수 $2^{30}, 3^{20}$ 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $2^{30} > 3^{20}$

② $2^{30} \leq 3^{20}$

③ $2^{60} > 3^{20}$

④ $2^{60} \geq 3^{20}$

⑤ $2^{30} < 3^{20}$

해설

$$\frac{2^{30}}{3^{20}} = \frac{(2^3)^{10}}{(3^2)^{10}} = \left(\frac{8}{9}\right)^{10} < 1$$

$$\therefore 2^{30} < 3^{20}$$

13. $a > 0, b > 0, c > 0$ 일 때, $\frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c}$ 의 최소값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

산술-기하평균 부등식에 의해,

$$\frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{2b}{a} \times \frac{2c}{b} \times \frac{2a}{c}} = 3 \times 2 = 6$$

$$\therefore \frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c} \geq 6$$

14. 세 조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라고 하면 $P \cup Q = P, Q \cap R = R$ 인 관계가 성립한다. 이 때, 다음 중 반드시 참인 명제가 아닌 것은?

- ① $r \rightarrow p$
- ② $\sim p \rightarrow \sim q$
- ③ $\sim p \rightarrow \sim r$
- ④ $\sim r \rightarrow \sim p$
- ⑤ $\sim q \rightarrow \sim r$

해설

$P \cup Q = P, Q \cap R = R$ 이면
 $Q \subset P, R \subset Q$ 이므로 $q \rightarrow p, r \rightarrow q$ 가 참
 $R \subset Q \subset P$ 이므로 $r \rightarrow p$ 가 참
 $Q \subset P, R \subset Q$ 이면 $Q^c \supset P^c, R^c \supset Q^c$ 이므로 $\sim p \rightarrow \sim q, \sim q \rightarrow \sim r$ 이 참

해설

’주어진 명제가 참일 때, 그 대우도 참’을 이용하여 $q \rightarrow p, r \rightarrow q$ 가 참이면 $\sim p \rightarrow \sim q, \sim q \rightarrow \sim r$ 가 참임을 쉽게 판단할 수 있다.

15. 다음 중 명제와 그 역이 모두 참인 것은?

- ① $xy \geq 0$ 이면 $x \geq 0$ 또는 $y \geq 0$
- ② $x + y \geq 0$ 이면 $x \geq 0$ 이고 $y \geq 0$
- ③ $x \geq y$ 이면 $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$
- ④ $x \leq 2$ 이면 $|x - 1| \leq |x - 3|$
- ⑤ $a > 0$ 이고 $b > 0$ 이면 $a^2 + b^2 > 0$

해설

- ① 거짓 : (반례) $x = -2, y = -1$ 일 때,
 $xy = 2 \geq 0$ 이지만 $-2 < 0$ 이고 $-1 < 0$ 이다.
- ② 거짓 : (반례) $x = -2, y = 3$ 일 때,
 $x + y = -2 + 3 \geq 0$ 이지만 $-2 < 0$ 이고 $3 > 0$ 이다.
- ③ 거짓 : (반례) $x = 2, y = -2$ 일 때,
 $2 \geq -2$ 이지만 $\frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$ 이다.
- ④ $|x - 1| \leq |x - 3|$ 의 양변을 제곱하면
 $x^2 - 2x + 1 \leq x^2 - 6x + 9$ 에서 $x \leq 2$ 이므로 원래의 명제와 그 역이 모두 참이다.
- ⑤ 명제 ‘ $a > 0$ 이고 $b > 0$ 이면 $a^2 + b^2 > 0$ ’ 은 참이지만, 그의 역 ‘ $a^2 + b^2 > 0$ 이면 $a > 0$ 이고 $b > 0$ ’은 거짓이다.

16. 다음 중 p 는 q 이기 위한 충분조건인 것은?

- ① $p : x = 1$ 이고 $y = 1, q : x + y = 2$ 이고 $xy = 1$
- ② $p : |x - 1| = 2, q : x^2 - 2x + 3 = 0$
- ③ $p : a > 3, q : a^2 > 9$
- ④ $p : a^2 = ab, q : a = b$
- ⑤ $p : |a| < |b|, q : a < b$

해설

- $p \rightarrow q$ 이면 (진리집합 $P \subset$ (진리집합 Q)
- ① $P : x = 1, y = 1, Q : x = 1 \ y = 1 \Rightarrow$ 필요충분조건
 - ② $P : x = 3$ 또는 $x = -1, Q : x = 1 \pm \sqrt{2}i \Rightarrow$ 서로소
 - ③ $P : a > 3, Q : a < -3$ 또는 $a > 3 \Rightarrow$ 충분조건
 - ④ $P : a = 0$ 또는 $a = b, Q : a = b \Rightarrow$ 필요조건
 - ⑤ $p \nrightarrow q, q \rightarrow p$ (반례 : $a = 2, b = -3$)

17. $a > 0, b > 0$ 일 때, 다음 네모 속에서 옳은 것은 모두 몇 개인가?

- I. $1 + a > \sqrt{1 + 2a}$
II. $\sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
III. $a + \frac{1}{a} \geq 2$
IV. $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$
V. $(a+b) \left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b} \right) \geq 4$
VI. $(2a+b) \left(\frac{8}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 25$

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

- I. $(1+a)^2 - (\sqrt{1+2a})^2$
 $= a^2 > 0 \quad (\because a > 0)$
 $\therefore (1+a) > \sqrt{1+2a} \quad (\bigcirc)$
II. $(\sqrt{2(a+b)})^2 - (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$
 $= 2(a+b) - (a+b+2\sqrt{ab})$
 $= (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$
 $\therefore \sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad (\bigcirc)$
III. $a + \frac{1}{a} \geq 2 \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 2 \quad (\bigcirc)$
IV. $\frac{2ab}{a+b} - \sqrt{ab} = \frac{-\sqrt{ab}(a+b-2\sqrt{ab})}{a+b}$
 $= \frac{-\sqrt{ab}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{a+b} \leq 0$
 $\therefore \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \quad (\bigcirc)$
V. $(a+b) \left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b} \right) = 4 + \frac{2a}{b} + \frac{2b}{a}$
 $\frac{2a}{b} + \frac{2b}{a} \geq 2 \sqrt{\frac{2a}{b} \times \frac{2b}{a}} = 4$
 $\therefore 4 + \frac{2a}{b} + \frac{2b}{a} \geq 8 \quad (\times)$
VI. $(2a+b) \left(\frac{8}{a} + \frac{1}{b} \right) = 17 + \frac{2a}{b} + \frac{8b}{a}$
 $\frac{2a}{b} + \frac{8b}{a} \geq 2 \sqrt{\frac{2a}{b} \times \frac{8b}{a}} = 8$
 $\therefore (2a+b) \left(\frac{8}{a} + \frac{1}{b} \right) = 17 + \frac{2a}{b} + \frac{8b}{a} \geq 25 \quad (\bigcirc)$

18. $x > -1$ 일 때 $x + \frac{1}{x+1}$ 의 최솟값을 m , 그 때의 x 의 값을 k 라 할 때 $m+k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$x+1 > 0 \text{ 이므로 } x + \frac{1}{x+1} = x+1 + \frac{1}{x+1} - 1 \geq$$

$$2\sqrt{(x+1)\frac{1}{x+1}} - 1 = 1$$

$$\therefore m = 1$$

이 때 등호는

$$x+1 = \frac{1}{x+1} \text{ 에서 } x = 0, -2$$

$x > -1$ 이므로 등호는 $x = 0$ 일 때만 성립한다.

$$\therefore k = 0$$

$$\therefore m+k = 1$$

19. 다음 중 두 조건 p, q 에 대하여 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것은 몇 개인가?

- ㉠

$p : xy = |xy|, q : x > 0, y > 0$
- ㉡

$p : xy + 1 > x + y > 2, q : x > 1, y > 1$
- ㉢

$p : xy = 0, q : |x - y| = |x + y|$
- ㉣

$p : |x| + |y| > |x + y|, q : x + y \geq 2$
- ㉤

$p : x \geq 1, y \geq 1, q : x + y \geq 2$
- ㉥

$p : x + y = 0, xy = 0, q : x = 0, y = 0$
- ㉦

$p : x + y\sqrt{2} = 0, q : x = y = 0$ (x, y 는 유리수)
- ㉧

$p : |x| = |y|, q : x^2 = y^2$

- ① 2 개
- ② 3 개
- ③ 4 개
- ④ 5 개
- ⑤ 6 개

해설

㉠

㉢

㉣

㉤

㉥

㉦

㉧

20. 다음은 $a \geq 0, b \geq 0$ 인 두 실수 a, b 에 대하여 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 임을 증명한 것이다. 물음에 답하여라.

$$\begin{aligned} & \left[\frac{a+b}{2} \right] - \left[\sqrt{ab} \right] \\ &= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \end{aligned}$$

따라서, $\left[\frac{a+b}{2} \right] \geq \left[\sqrt{ab} \right]$
한편, 등호는 $\left[\frac{a+b}{2} \right] = \left[\sqrt{ab} \right]$ 일 때 성립한다.

위의 증명에서 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

- ①

㉠

$a+b$

㉡

$\sqrt{ab}$

㉢

≥ 0

㉣

$a=0, b=0$
- ②

㉠

$\frac{a+b}{2}$

㉡

$2\sqrt{ab}$

㉢

≤ 0

㉣

$a=0, b=0$
- ③

㉠

$\frac{a+b}{2}$

㉡

$\sqrt{ab}$

㉢

≥ 0

㉣

$a=b$
- ④

㉠

$\sqrt{ab}$

㉡

$a+b$

㉢

≥ 0

㉣

$a=b$
- ⑤

㉠

$2\sqrt{ab}$

㉡

$\frac{a+b}{2}$

㉢

≤ 0

㉣

$a=0, b=0$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \\ &= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0 \\ \therefore \frac{a+b}{2} &\geq \sqrt{ab} \end{aligned}$$

한편, 등호는 $a=b$ 일 때 성립한다.

25. 집합 $A = \{1, 2, 3, \{2, 3\}, \{4\}\}$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $1 \in A$

② $3 \notin A$

③ $4 \notin A$

④ $\{4\} \in A$

⑤ $\{2, 3\} \in A$

해설

집합 A 의 원소들은 1, 2, 3, $\{2, 3\}$, $\{4\}$ 이다.

옳은 것은 ①,③,④,⑤ 이다.

② $3 \notin A$ 은 $3 \in A$ 가 맞다.