1. 전체집합 $U = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 에 대하여 조건 $x^2 - 2 > 0$ 의 진리집합은?

① $\varnothing$　② $\{0,\ 1\}$　③ $\{3,\ 4,\ 5\}$
④ $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$　⑤ U

해설

주어진 조건 $x^2 - 2 > 0$ 에
$x = 0$ 을 대입하면 $0 - 2 > 0$ (거짓)
$x = 1$ 을 대입하면 $1 - 2 > 0$ (거짓)
$x = 2$ 를 대입하면 $4 - 2 > 0$ (참)
$x = 3$ 을 대입하면 $9 - 2 > 0$ (참)
$x = 4$ 를 대입하면 $16 - 2 > 0$ (참)
$x = 5$ 를 대입하면 $25 - 2 > 0$ (참)
따라서 구하는 진리집합은 $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

2. 다음 중 거짓인 명제를 모두 고른 것은?

① $xy > x + y > 4$ 이면 $x > 2, y > 2$ 이다.

② $x > 1$ 이면 $x^2 > 1$ 이다.

③ $x + y = 0$ 이면 $x = 0$ 이고 $y = 0$ 이다.

④ $x = 1$ 이면 $x^2 = 1$ 이다.

⑤ $2x + 4 > 0$ 이면 $x > -2$ 이다.

해설

① (반례) $x = 1.5,\ y = 10$ 이면 $xy > x + y > 4$ 이지만 $x < 2$, $y > 2$ 이므로 거짓이다.

③ (반례) $x = -1, y = 1$ 이면 $x + y = 0$ 이지만 $x \neq 0,\ y \neq 0$ 이므로 거짓이다.

3. n 이 100보다 작은 자연수일 때, 다음 명제가 거짓임을 보여주는 반례는 모두 몇 가지인가?

'n^2 이 12의 배수이면 n 은 12의 배수이다.'

▶ **답 :** 가지

▷ **정답 :** 8가지

해설

명제가 거짓임을 보이는 반례는 n^2 이 12의 배수이면서 n 이 12의 배수가 아닌 수를 찾으면 된다. 즉, n 은 6의 배수이면서 12의 배수가 아닌 수를 찾으면 된다.

$n \in \{6 \times 1,\ 6 \times 3,\ 6 \times 5,\ 6 \times 7,\ 6 \times 9,\ 6 \times 11,\ 6 \times 13,\ 6 \times 15\}$

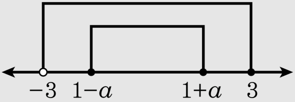
4. 명제 '$|x-1| \le a$이면 $|x| < 3$ 이다.'가 참이 되기 위한 a의 값의 범위는? (단, x, y는 실수이고, $a > 0$)

① $0 < a \le 2$　② $0 < a < 2$　③ $0 < a \le 4$

④ $0 < a < 4$　⑤ $0 < a < 5$

해설

$|x-1| \le a$에서 $-a \le x-1 \le a$ ∴ $1-a \le x \le 1+a$ $|x| < 3$에서 $-3 < x < 3$ 따라서 주어진 명제가 참이 되려면,



위의 그림에서 $1-a > -3$ 그리고 $1+a < 3$ ∴ $a < 4$ 그리고 $a < 2$
∴ $a < 2$ 그런데 $0 < a$ 이므로, $0 < a < 2$

5. 명제 '$x-2=0$ 이면 $x^2-ax+6=0$ 이다.' 가 참이 되도록 하는 상수 a 의 값은?

① 1　　② 3　　③ 5　　④ 7　　⑤ 9

해설

명제 '$x-2=0$ 이면 $x^2-ax+6=0$ 이다.' 가 참이 되려면 $2^2-2a+6=0$ 을 만족해야 한다.

$2^2-2a+6=0$, $2a=10$

$\therefore a=5$

6. 다음 중 거짓인 명제는?

① 자연수 n 에 대하여 n^2 이 짝수이면 n 도 짝수이다.

② 자연수 n 에 대하여 n^2 이 홀수이면 n 도 홀수이다.

③ 자연수 n 에 대하여 n^2 이 3의 배수이면 n 도 3의 배수이다.

④ 자연수에 대하여 두 수가 모두 짝수이면 두 수의 합도 짝수이다.

⑤ 자연수에 대하여 두 수의 합이 짝수이면 두 수는 모두 짝수이다.

해설

주어진 명제의 참, 거짓에 대한 직접적인 판단이 어려울 때는 그 명제의 대우가 참인지 확인한다.

①,② 생략

③ $n = 3k + 1$ $n^2 = (3n + 1)^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1 \neq 3m$(참)
(대우가 참 → 참인 명제)

④ 두 수의 합이 홀수이면 두 수 중 적어도 하나는 홀수이다. (참)

⑤ 반례 : 두 수 모두 홀수인 경우(거짓)

7. 두 명제 $p \to q$, $\sim r \to \sim q$가 모두 참일 때 다음 명제 중에서 반드시 참이라고 할 수 <u>없는</u> 것은?

① $q \to r$ ② $p \to r$ ③ $\sim q \to \sim p$

④ $r \to p$ ⑤ $\sim r \to \sim p$

해설

$p \to q(T) \Rightarrow \sim q \to \sim p\,(T)$, $\sim r \to \sim q\,(T) \Rightarrow q \to r\,(T)$

$\therefore\ p \to q \to r\,(T) \Rightarrow p \to r\,(T)$

$\therefore \sim r \to \sim p\,(T)$

8. $x \le -1$은 $x \le a$이기 위한 필요조건이고, $x \ge b$는 $x \ge 3$이기 위한 충분조건일 때, a의 최댓값과 b의 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x \le -1$은 $x \le a$이기 위한 필요조건이므로

「$x \le a$ 이면 $x \le -1$ 이다.」가 참이어야 한다.

$\therefore\ a \le -1$

또, $x \ge b$는 $x \ge 3$이기 위한 충분조건이므로

「$x \ge b$ 이면 $x \ge 3$ 이다.」가 참이어야 한다.

$\therefore\ b \ge 3$

따라서, a의 최댓값은 -1, b의 최솟값은 3이므로

구하는 값은 $-1 + 3 = 2$이다.

9. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라고 하자. 이때, 다음 식을 만족시키는 조건 p 는 q 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

$$\{(P \cap Q) \cup (P \cap Q^c)\} \cap Q = P$$

▶ 답 : ______조건

▷ 정답 : 충분조건

해설

$\{(P \cap Q) \cup (P \cap Q^c)\} \cap Q = P$
$\{P \cap (Q \cup Q^c)\} \cap Q = P$
$(P \cap U) \cap Q = P$
$P \cap Q = P$
$P \subset Q$
$\therefore\ p \Rightarrow q$
따라서, p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

10. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 r 이기 위한 충분조건, q 는 r 이기 위한 충분조건, s 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이 때, q는 p이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ **답 :** ______조건

▷ **정답 :** 필요조건

해설

$P \subset R \subset S \subset Q \therefore \; P \subset Q$이므로 $P \subset Q$

$\therefore q$ 는 p 이기 위한 필요조건

11. 두 실수 a, b 에 대하여 $0 < a < b$, $a + b = 1$ 일 때, 다음 중 대소를 비교한 것으로 옳지 않은 것은?

① $\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b-a}$

② $\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

③ $\sqrt{a} + \sqrt{b} < 1$

④ $\sqrt{b-a} < 1$

⑤ $\sqrt{b-a} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

해설

$$\begin{aligned}(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - 1^2 &= a + b + 2\sqrt{ab} - 1 \\ &= 2\sqrt{ab}\ (\because a + b = 1) > 0\end{aligned}$$

$\therefore \sqrt{a} + \sqrt{b} > 1$

12. 두 수 $2^{30}, 3^{30}$ 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $2^{30} > 3^{20}$ ② $2^{30} \leq 3^{20}$ ③ $2^{60} > 3^{20}$

④ $2^{60} \geq 3^{20}$ ⑤ $2^{30} < 3^{20}$

해설

$$\frac{2^{30}}{3^{20}} = \frac{(2^3)^{10}}{(3^2)^{10}} = \left(\frac{8}{9}\right)^{10} < 1$$

$\therefore 2^{30} < 3^{20}$

13. $a>0$, $b>0$, $c>0$일 때, $\dfrac{2b}{a}+\dfrac{2c}{b}+\dfrac{2a}{c}$의 최소값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

산술-기하평균 부등식에 의해,

$$\frac{2b}{a}+\frac{2c}{b}+\frac{2a}{c} \geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{2b}{a}\times\frac{2c}{b}\times\frac{2a}{c}} = 3\times 2 = 6$$

$$\therefore \ \frac{2b}{a}+\frac{2c}{b}+\frac{2a}{c} \geq 6$$

14. 세 조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R라고 하면 $P \cup Q = P, Q \cap R = R$ 인 관계가 성립한다. 이 때, 다음 중 반드시 참인 명제가 <u>아닌</u> 것은?

① $r \to p$ ② $\sim p \to \sim q$ ③ $\sim p \to \sim r$

④ $\sim r \to \sim p$ ⑤ $\sim q \to \sim r$

해설

$P \cup Q = P, Q \cap R = R$ 이면

$Q \subset P, R \subset Q$ 이므로 $q \to p$, $r \to q$ 가 참

$R \subset Q \subset P$ 이므로 $r \to p$ 가 참

$Q \subset P, R \subset Q$ 이면 $Q^c \supset P^c, R^c \supset Q^c$ 이므로 $\sim p \to \sim q$, $\sim q \to \sim r$ 이 참

해설

'주어진 명제가 참일 때, 그 대우도 참'을 이용하여 $q \to p$, $r \to q$ 가 참이면 $\sim p \to \sim q$, $\sim q \to \sim r$ 가 참임을 쉽게 판단할 수 있다.

15. 다음 중 명제와 그 역이 <u>모두</u> 참인 것은?

① $xy \geq 0$ 이면 $x \geq 0$ 또는 $y \geq 0$

② $x+y \geq 0$ 이면 $x \geq 0$ 이고 $y \geq 0$

③ $x \geq y$ 이면 $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$

④ $x \leq 2$ 이면 $|x-1| \leq |x-3|$

⑤ $a>0$ 이고 $b>0$ 이면 $a^2+b^2>0$

해설

① 거짓 : (반례) $x=-2,\ y=-1$ 일 때,
$xy=2 \geq 0$ 이지만 $-2<0$ 이고 $-1<0$ 이다.
② 거짓 : (반례) $x=-2,\ y=3$ 일 때,
$x+y=-2+3 \geq 0$ 이지만 $-2<0$ 이고 $3>0$ 이다.
③ 거짓 : (반례) $x=2,\ y=-2$ 일 때,
$2 \geq -2$ 이지만 $\frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$ 이다.
④ $|x-1| \leq |x-3|$ 의 양변을 제곱하면
$x^2-2x+1 \leq x^2-6x+9$ 에서 $x \leq 2$ 이므로 원래의 명제와 그 역이 모두 참이다.
⑤ 명제 '$a>0$ 이고 $b>0$ 이면 $a^2+b^2>0$' 은 참이지만, 그의 역 '$a^2+b^2>0$ 이면 $a>0$ 이고 $b>0$'은 거짓이다.

16. 다음 중 p는 q이기 위한 충분조건인 것은?

① $p : x = 1$ 이고 $y = 1$, $q : x + y = 2$ 이고 $xy = 1$

② $p : |x - 1| = 2$, $q : x^2 - 2x + 3 = 0$

③ $p : a > 3$, $q : a^2 > 9$

④ $p : a^2 = ab$, $q : a = b$

⑤ $p : |a| < |b|$, $q : a < b$

해설

$p \rightarrow q$ 이면 (진리집합 P)$\subset$ (진리집합 Q)
① $P : x = 1,\ y = 1$, $Q : x = 1\ \ y = 1 \Rightarrow$ 필요충분조건
② $P : x = 3$ 또는 $x = -1$, $Q : x = 1 \pm \sqrt{2}i \Rightarrow$ 서로소
③ $P : a > 3$, $Q : a < -3$ 또는 $a > 3 \Rightarrow$ 충분조건
④ $P : a = 0$ 또는 $a = b$, $Q : a = b \Rightarrow$ 필요조건
⑤ $p \nrightarrow q$, $q \rightarrow p$ (반례 : $a = 2$, $b = -3$)

17. $a>0,\ b>0$일 때, 다음 네모 속에서 옳은 것은 모두 몇 개인가?

Ⅰ. $1+a > \sqrt{1+2a}$
Ⅱ. $\sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}$
Ⅲ. $a+\frac{1}{a} \geq 2$
Ⅳ. $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$
Ⅴ. $(a+b)\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{b}\right) \geq 4$
Ⅵ. $(2a+b)\left(\frac{8}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 25$

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

Ⅰ. $(1+a)^2-(\sqrt{1+2a})^2$
$= a^2 > 0\ (\because a>0)$

$\therefore (1+a) > \sqrt{1+2a}$ (○)
Ⅱ. $(\sqrt{2(a+b)})^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$
$= 2(a+b)-(a+b+2\sqrt{ab})$
$= (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$
$\therefore \sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}$ (○)

Ⅲ. $a+\frac{1}{a} \geq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}} = 2$ (○)

Ⅳ. $\frac{2ab}{a+b}-\sqrt{ab} = \frac{-\sqrt{ab}(a+b-2\sqrt{ab})}{a+b}$

$= \frac{-\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b} \leq 0$

$\therefore \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$ (○)

Ⅴ. $(a+b)\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{b}\right) = 4+\frac{2a}{b}+\frac{2b}{a}$

$\frac{2a}{b}+\frac{2b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{2a}{b}\times\frac{2b}{a}} = 4$

$\therefore 4+\frac{2a}{b}+\frac{2b}{a} \geq 8$ (×)

Ⅵ $(2a+b)\left(\frac{8}{a}+\frac{1}{b}\right) = 17+\frac{2a}{b}+\frac{8b}{a}$

$\frac{2a}{b}+\frac{8b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{2a}{b}\times\frac{8b}{a}} = 8$

$\therefore (2a+b)\left(\frac{8}{a}+\frac{1}{b}\right) = 17+\frac{2a}{b}+\frac{8b}{a} \geq 25$ (○)

18. $x > -1$ 일 때 $x + \dfrac{1}{x+1}$ 의 최솟값을 m, 그 때의 x의 값을 k라 할 때 $m + k$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x+1 > 0$ 이므로 $x + \dfrac{1}{x+1} = x+1+\dfrac{1}{x+1} - 1 \geq 2\sqrt{(x+1)\dfrac{1}{x+1}} - 1 = 1$

$\therefore m = 1$

이 때 등호는

$x+1 = \dfrac{1}{x+1}$ 에서 $x = 0, -2$

$x > -1$ 이므로 등호는 $x = 0$ 일 때만 성립한다.

$\therefore\ k = 0$

$\therefore\ m + k = 1$

19. 다음 중 두 조건 p, q에 대하여 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은 몇 개인가?

㉠ $p : xy = |xy|$, $q : x > 0,\ y > 0$

㉡ $p : xy + 1 > x + y > 2$, $q : x > 1,\ y > 1$

㉢ $p : xy = 0$, $q : |x - y| = |x + y|$

㉣ $p : |x| + |y| > |x + y|$, $q : x + y \geq 2$

㉤ $p : x \geq 1,\ y \geq 1$, $q : x + y \geq 2$

㉥ $p : x + y = 0,\ xy = 0$, $q : x = 0,\ y = 0$

㉦ $p : x + y\sqrt{2} = 0$, $q : x = y = 0$ (x, y는 유리수)

㉧ $p : |x| = |y|$, $q : x^2 = y^2$

① 2 개　　② 3 개　　③ 4 개　　④ 5 개　　⑤ 6 개

해설

㉡ ㉢ ㉥ ㉦ ㉧

20. 다음은 $a \ge 0, b \ge 0$인 두 실수 a, b에 대하여 $\dfrac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$임을 증명한 것이다. 물음에 답하여라.

> [(가)] - [(나)]
> $= \dfrac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$
> $= (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b}$
> $= \dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$ [(다)]
> 따라서, [(가)] ≥ [(나)]
> 한편, 등호는 [(라)]일 때 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다), (라)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① (가) $a+b$ (나) $\sqrt{ab}$ (다) ≥ 0 (라) $a=0, b=0$

② (가) $\dfrac{a+b}{2}$ (나) $2\sqrt{ab}$ (다) ≤ 0 (라) $a=0, b=0$

③ (가) $\dfrac{a+b}{2}$ (나) $\sqrt{ab}$ (다) ≥ 0 (라) $a=b$

④ (가) $\sqrt{ab}$ (나) $a+b$ (다) ≥ 0 (라) $a=b$

⑤ (가) $2\sqrt{ab}$ (나) $\dfrac{a+b}{2}$ (다) ≤ 0 (라) $a=0, b=0$

해설

$\dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$

$= \dfrac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$

$= \dfrac{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2}$

$= \dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \ge 0$

$\therefore \dfrac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$

한편, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.

21. 실수 x, y가 $x^2+y^2=5$를 만족할 때, $x+2y$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 한다. 이 때, $M-m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

코시-슈바르쯔의 부등식에 의해

$(1^2+2^2)(x^2+y^2) \geq (x+2y)^2$

$x^2+y^2=5$이므로

$25 \geq (x+2y)^2$

$\therefore\ -5 \leq x+2y \leq 5$

$\therefore\ M=5,\ m=-5$

$\therefore\ M-m=5-(-5)=10$

22. 자연수 n에 대하여 'n^2이 짝수이면 n도 짝수이다.'를 증명하는 과정이다. 이 때 괄호 안에 들어갈 알맞은 논리 중 틀린 것을 아래의 보기에서 고르면?

증명

주어진 명제의 (①)를 구하여 보면 n이 (②)이면 n^2 도 (②)이다. 이 때 n이 (②)이므로 $n =$ (③) (k 는 0 또는 자연수)
이 때 $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
$\therefore n^2$은 (②)이다. 따라서, (①)가 (④)이므로 주어진 명제는 (⑤)이다.

① 대우　② 홀수　③ $2k + 1$
④ 거짓　⑤ 참

해설

대우가 참이면 주어진 명제도 참이다.

23. 두 명제 $p \rightarrow q$와 $\sim r \rightarrow \sim q$가 모두 참일 때, 다음 중 '반드시 참이다'라고 말할 수 없는 명제는?

① $q \rightarrow r$
② $p \rightarrow r$
③ $\sim p \rightarrow \sim r$
④ $\sim r \rightarrow \sim p$
⑤ $\sim q \rightarrow \sim p$

해설

$p \rightarrow q \leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$ $\sim r \rightarrow \sim q \leftrightarrow q \rightarrow r$ $p \rightarrow q$, $q \rightarrow r$
이므로

$p \rightarrow r \leftrightarrow r \rightarrow \sim p$

24. 다음 중 명제 'x, y 가 유리수이면 xy 는 유리수이다.'의 이가 거짓임을 밝히기 위한 반례로 옳은 것은?

① $x = 0,\ y = 2$ ② $x = 1,\ y = 2$

③ $x = 0,\ y = \sqrt{2}$ ④ $x = 1,\ y = \sqrt{2}$

⑤ $x = \sqrt{2},\ y = \sqrt{3}$

해설

'x, y 가 유리수이면 xy 는 유리수이다.'의 이는 'x또는y 가 유리수가 아니면 xy 는 유리수가 아니다.' 여기에서 가정을 성립시키면서 결론을 성립시키지 않는 것을 찾으면 된다.
즉, ③ $x = 0, y = \sqrt{2}$ 가 반례로 적당하다.

25. 집합 $A=\{1,2,3,\{2,3\},\{4\}\}$ 일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $1 \in A$ ② $3 \notin A$ ③ $4 \notin A$

④ $\{4\} \in A$ ⑤ $\{2,3\} \in A$

해설

집합 A 의 원소들은 1, 2, 3, $\{2,3\}$, $\{4\}$ 이다.

옳은 것은 ①,③,④,⑤ 이다.

② $3 \notin A$ 은 $3 \in A$ 가 맞다.