1. 집합 S가 다음 조건을 만족할 때 집합 S 의 원소를 모두 곱한 값은 ?

㉠ $1 \notin S$	㉡ $a \in s$ 이면 $\dfrac{1}{1-a} \in S$
㉢ $4 \in S$	

① 1 ② -1 ③ $\dfrac{16}{9}$ ④ $-\dfrac{16}{9}$ ⑤ $-\dfrac{3}{2}$

해설

$4 \in S$ 이므로 $\dfrac{1}{1-4} \in S$

$\therefore\ -\dfrac{1}{3} \in S$

$-\dfrac{1}{3} \in S$ 이므로 $\dfrac{1}{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)} \in S$

$\therefore\ \dfrac{3}{4} \in S$

$\dfrac{3}{4} \in S$ 이므로 $\dfrac{1}{1-\dfrac{3}{4}} \in S$

$\therefore\ 4 \in S$

$\therefore\ S = \left\{4,\ -\dfrac{1}{3},\ \dfrac{3}{4}\right\}$

S 의 모든 원소의 곱은

$4 \times \left(-\dfrac{1}{3}\right) \times \dfrac{3}{4} = -1$

2. 집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 에 대하여 $X \subset U$ 이고, $\{1, 2\} \cap X = \varnothing$ 을 만족하는 집합 X 의 개수를 구하시오.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 16 개

해설

$\{1, 2\}$ 를 포함하지 않아야 하므로 $\{3, 4, 6, 12\}$ 의 부분집합의 개수와 같다.

$\therefore 2^4 = 16$(개)

3. 두 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{0, 1, 2\}$에 대하여 두 함수 $f : X \to Y$, $f(x) = x^3 + 1$, $g : X \to Y$, $g(x) = ax + b$가 $f = g$일 때, ab의 값을 구하면?

① 0　② 1　③ 2　④ -1　⑤ -2

해설

f와 g의 정의역이 같으므로

$f(-1) = g(-1)$, $f(0) = g(0)$, $f(1) = g(1)$이면 $f = g$가 된다

$f(-1) = 0 = g(-1) = -a + b \cdots$ ㉠

$f(0) = 1 = g(0) = b \cdots$ ㉡

$f(1) = 2 = g(1) = a + b \cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$a = 1$, $b = 1$

따라서 $ab = 1$

4. 함수 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ 에 대하여 방정식 $(f\circ f)(x)=x^3$ 의 해의 합을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

$$=\frac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x}{x-1}-1}=\frac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x-x+1}{x-1}}=x$$

$\therefore\ x^3=x,\ x^3-x=0,\ x(x-1)(x+1)=0$

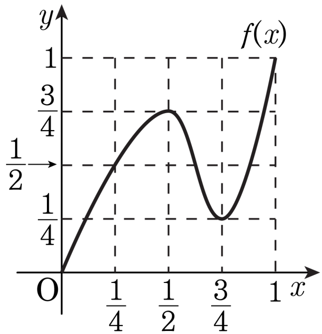
$\therefore\ x=-1\ or\ 0\ or\ 1$

그런데 $x\neq 1$ 이므로 $x=-1\ or\ 0$

$\therefore\ -1+0=-1$

5. $R = \{x|0 \leq x \leq 1\}$이라 할 때, R에서 R로의 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같다.(단, $f^n(x) = (f \circ f \circ ... \circ f)(x)$: f 개수 n개)

〈그래프〉



이 때, $f\left(\frac{1}{4}\right) + f^2\left(\frac{1}{4}\right) + f^3\left(\frac{1}{4}\right) + \cdots + f^{99}\left(\frac{1}{4}\right)$ 의 값을 구하면?

(단, $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$, $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}$)

① $\frac{99}{2}$ ② $\frac{95}{2}$ ③ $\frac{93}{2}$ ④ $\frac{91}{2}$ ⑤ $\frac{89}{2}$

해설

그래프에서 $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$, $f^2\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$, $f^3\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}$, $\cdots$ 이므로

$f^{3k+1}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$, $f^{3k+2}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$, $f^{3k+3}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$ $(k = 0,\ 1,\ 2, \cdots)$

$\therefore\ f\left(\frac{1}{4}\right) + f^2\left(\frac{1}{4}\right) + f^3\left(\frac{1}{4}\right) + \cdots + f^{99}\left(\frac{1}{4}\right) = 33 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{99}{2}$

6. $A = \{x \mid x \geq a\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 $f(x) = x^2 - 2$ 가 역함수를 갖게 되는 실수 a 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 2 ⑤ 3

해설

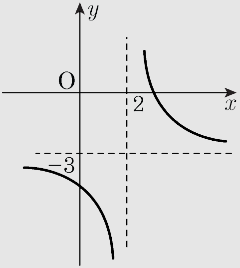
역함수를 가지려면 함수가 일대일 대응이 되어야 한다.
따라서 $f(x) \geq x$ 를 만족해야한다.
$\Rightarrow x^2 - 2 \geq x$
$\Rightarrow x \leq -1$ 또는 $x \geq 2$
$A = \{x \mid x \geq a\}$ 이므로 $a = 2$

7. 다음 중 함수 $y = \dfrac{-3x+8}{x-2}$ 의 그래프는 제a사분면을 지나지 않고, 점 $(0,\ b)$를 지난다고 할 때, $a-b$의 값은?

① -6 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 6

해설

$$y = \frac{-3(x-2)+2}{x-2} = -3 + \frac{2}{x-2}$$



따라서 제2사분면을 지나지 않는다. $\therefore\ a = 2$

$x = 0$일 때 $y = -3 + \dfrac{2}{-2} = -4$, $\therefore\ b = -4$

$\therefore\ a - b = 2 - (-4) = 6$

8. 두 함수 $y = \sqrt{x+1}+2, y = mx$ 의 그래프가 서로 만나지 않도록 하는 실수 m 의 값의 범위는 $a < m \le b$ 이다. 이 때 $a+b$의 값은?

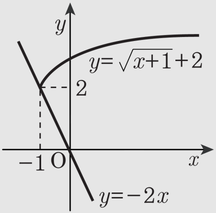
① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

해설

다음 그림에서 두 함수의 그래프가 만나지 않으려면 m의 값의 범위는 $-2 < m \le 0$ 이어야 한다.

$\therefore a = -2, b = 0$

$\therefore a + b = -2$



9. 역함수가 존재하는 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = 4x + 1$ 에 대하여 $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ g)(9)$ 의 값은?

① 1　　② 3　　③ 5　　④ 7　　⑤ 9

해설

$(g \cdot f)^{-1}(x) = (f^{-1} \cdot g^{-1})(x)$ 이므로

$$\begin{aligned}(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ g)(9) &= (f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ g)(9) \\ &= (\mathrm{I} \circ \mathrm{I})(9) \\ &= 9\end{aligned}$$

10. $2 \le x \le 4$일 때, 함수 $y = \dfrac{3x-4}{x-1}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 한다. Mm의 값은?

① $\dfrac{2}{3}$ ② $\dfrac{4}{3}$ ③ $\dfrac{8}{3}$ ④ $\dfrac{16}{3}$ ⑤ $\dfrac{20}{3}$

해설

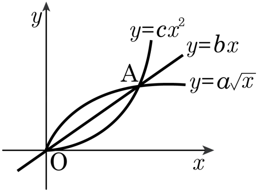
$$y = \frac{3x-4}{x-1} = \frac{-1}{x-1} + 3$$

$x = 2$일 때 최소이므로, $M = \dfrac{-1}{2-1} + 3 = 2$

$x = 4$일 때 최대이므로, $m = \dfrac{-1}{4-1} + 3 = \dfrac{8}{3}$

$\therefore \quad Mm = 2 \times \dfrac{8}{3} = \dfrac{16}{3}$

11. 양의 상수 a, b, c에 대하여 세 함수 $y = a\sqrt{x}$, $y = bx$, $y = cx^2$의 그래프가 그림과 같이 원점 O와 다른 점 A에서 동시에 만날 때, a, b, c의 관계로 옳은 것은?



① $a^3 = b^2c$ ② $a^3 = bc^2$ ③ $b^3 = a^2c$

④ $b^3 = ac^2$ ⑤ $c^3 = a^2b$

해설

곡선 $y = cx^2$과 $y = bx$의 교점의 x좌표 (단, $x \neq 0$)는 $cx^2 = bx$

$\therefore\ x = \frac{b}{c}$

곡선 $y = a\sqrt{x}$와 $y = bx$의 교점의 x좌표(단, $x \neq 0$)는

$a\sqrt{x} = bx \therefore\ x = \frac{a^2}{b^2}$

두 점이 일치하므로 $\frac{b}{c} = \frac{a^2}{b^2}$

$\therefore\ b^3 = a^2c$

12. 함수 $y = \dfrac{ax+8}{x+b}$ 의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=6$, $y=-1$ 일 때, 함수 $y=\sqrt{bx-a}$ 의 정의역에 속하는 정수의 최댓값은? (단, a, b 는 상수이다.)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$y = \dfrac{ax+8}{x+b} = \dfrac{8-ab}{x+b} + a$ 이고

점근선의 방정식이 $x=-b=6$, $y=a=-1$ 이므로 $a=-1$, $b=-6$

함수 $y=\sqrt{-6x+1}$ 의 정의역은 $\left\{x \mid x \leq \dfrac{1}{6}\right\}$ 이므로 구하는 정수의 최댓값은 0 이다.