1. 다항식 $x^3 + ax^2 + bx - 1$ 이 $x^2 - 3x + 2$ 로 나누어 떨어지도록 상수 $a + b$ 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 1$ 로 놓으면
$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ 이므로 $f(x)$ 는 $x-1$, $x-2$ 로 나누어 떨어진다.
$f(1) = 1 + a + b - 1 = 0$ 즉, $a + b = 0 \cdots$ ㉠
$f(2) = 8 + 4a + 2b - 1 = 0$ 즉, $4a + 2b = -7 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡으로부터 $a = -\frac{7}{2}$, $b = \frac{7}{2}$
$\therefore a + b = 0$

2. 연립부등식 $\begin{cases} 0.2x+1 \geq 0.7x \\ \frac{x}{2}-1 > \frac{x}{6}+\frac{1}{3} \end{cases}$ 을 만족시키는 정수 x의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 없다.

해설

(ⅰ) $0.2x+1 \geq 0.7x$, $x \leq 2$

(ⅱ) $\frac{x}{2}-1 > \frac{x}{6}+\frac{1}{3}$, $3x-6 > x+2$

$\therefore$ $x > 4$

따라서 연립부등식을 만족시키는 정수는 없다.

3. 부등식 $|2x-a|>7$의 해가 $x<-1$ 또는 $x>b$일 때, 상수 a, b의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$|2x-a|>7$에서

$2x-a<-7$ 또는 $2x-a>7$

$\therefore x<\frac{a-7}{2}$ 또는 $x>\frac{a+7}{2}$

그런데 주어진 부등식의 해가

$x<-1$ 또는 $x>b$이므로

$\frac{a-7}{2}=-1$, $\frac{a+7}{2}=b$

$\therefore a=5$, $b=6$

$\therefore a+b=11$

4. 점 $(-1, -2)$ 를 x 축의 방향으로 6 만큼 평행이동한 다음 직선 $x = a$ 에 대하여 대칭이동하면 처음 위치로 돌아온다. 이 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답：

▷ 정답： 2

해설

먼저 점 $(-1, -2)$ 를 x 축의 방향으로 6 만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(-1 + 6, -2)$, 즉 $(5, -2)$
점 $(5, -2)$ 를 다시 직선 $x = a$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
$(2a - 5, -2)$
이 때, 이것이 $(-1, -2)$ 와 같으므로 $2a - 5 = -1$
$\therefore a = 2$

5. 서로 다른 세 실수 $x,\ y,\ z$에 대하여 $x^3+y^3+z^3=3xyz$ 를 만족할 때, $x+y+z$ 의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0$

$(x+y+z)=0$ 또는 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$

$\therefore\ x+y+z=0$ 또는 $\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}=0$

그런데 $x,\ y,\ z$ 가 서로 다른 세 실수$(x\neq y\neq z)$ 이므로

$x+y+z=0$

6. 다음 중 사차방정식 $x^4 + x^2 + 1 = 0$의 근에 해당하는 것을 모두 고르면?

① $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ② $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ ③ $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

④ $1+\sqrt{3}i$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$

해설

$x^4 + x^2 + 1 = 0$을 변형하면

$x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = 0,$

$(x^2+1)^2 - x^2 = 0$

$(x^2+1+x)(x^2+1-x) = 0,$

$x^2 + x + 1 = 0$ 또는 $x^2 - x + 1 = 0$

$\therefore\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

7. x에 대한 두 이차방정식 $x^2-ax+10=0$, $x^2+x+b=0$이 공통근 2를 가질 때, 두 이차방정식의 공통근이 아닌 나머지 두 근의 합은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$x^2-ax+10=0$, $x^2+x+b=0$의 공통근이 2이므로 $x=2$를 두 이차방정식에 각각 대입하면 성립한다.
$2^2-2a+10=0$, $2^2+2+b=0$
$\therefore\ a=7,\ b=-6$
이 때, $x^2-7x+10=0$에서
$(x-2)(x-5)=0$이므로 $x=2,\ 5$
또, $x^2+x-6=0$에서
$(x-2)(x+3)=0$이므로 $x=2,\ -3$
따라서 공통근이 아닌 나머지 두 근은
$5,\ -3$이므로 두 근의 합은 2이다.

8. $|x+1|+|y-2|=0$을 만족하는 실수 $x,\ y$의 곱 xy의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$|x+1|\geq 0,\ |y-2|\geq 0$이므로 $x+1=0,\ y-2=0$

$\therefore\ x=-1,\ y=2$

따라서, 구하는 값은 $xy=-1\cdot 2=-2$

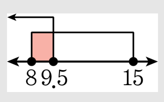
9. 300 원짜리 사과와 200 원짜리 귤을 합하여 15 개를 사는데 금액을 3950 원 이하로 귤보다 사과를 많이 사려고 한다. 이 조건을 만족하여 살 수 있는 사과의 개수는 최대 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 9 개

해설

사과의 개수 : x 개, 귤의 개수 : $(15-x)$ 개



$$\begin{cases} 300x + 200(15-x) \le 3950 \cdots ㉠ \\ 8 \le x \le 15 \end{cases}$$

㉠ : $300x + 3000 - 200x \le 3950$

$100x \le 3950 - 3000$

$100x \le 950$

$\therefore\ x \le 9.5$

$\therefore 8 \le x \le 9.5$ 따라서 살 수 있는 사과의 최대 개수는 9 개이다.

10. $ax+8y=4,\ x+(a+2)y=-7$에 대하여 두 식을 동시에 만족하는 $(x,\ y)$가 하나도 없을 때, 실수 a의 값은?

① $a=-4,\ b=-2$　　② $a=-4,\ b=2$

③ $a=4,\ b=-2$　　④ $a=4,\ b=2$

⑤ $a=1,\ b=-2$

해설

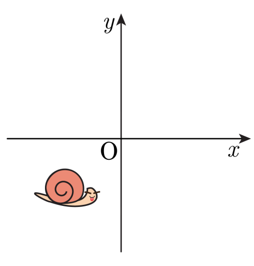
두 직선 $ax+8y-4=0,\ x+(a+2)y+7=0$이 평행해야 한다.

그러므로 $\dfrac{a}{1}=\dfrac{8}{a+2}\neq-\dfrac{4}{7}$

$a(a+2)=8\ \left(a\neq-\dfrac{4}{7},\ a\neq-16\right)$

$\therefore\ a=-4,\ 2$

11. 직교좌표계를 사용했을 때, 달팽이의 현재 위치는 $(-10, -10)$ 이다. 이 달팽이는 x 축 방향으로 2 , y 축 방향으로 2 만큼 평행이동하는데 1 분이 걸린다고 한다. 이 달팽이가 원점에 도달하는데 걸린 시간은 몇 분인지 구하여라.



▶ 답: ______ 분

▷ 정답: 5분

해설

달팽이가 x 축 방향으로 2 , y 축 방향으로 2 만큼 평행이동하는데 1 분이 걸린다.
즉, $(-10, -10)$ 에서 $(-8, -8)$ 까지 가는데 1 분, $(-6, -6)$ 까지 가는데 2 분, 같은 식으로 하면 원점에 도달하는데 총 5 분이 걸린다.

12. n이 짝수일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1}$ 의 값은?

① -2　② $-\sqrt{2}$　③ 0　④ 2　⑤ $\sqrt{2}$

해설

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1}$$

$$=\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2}\right\}^{2n}\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}}+\left\{\left(\frac{1-\pi}{\sqrt{2}}\right)^{2}\right\}^{2n}\cdot\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=(\pi^2)^{2n}\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}}+\{(-\pi)^2\}^{2n}-\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=\frac{1+i}{\sqrt{2}}+\frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

13. $x^2+xy+ay^2+x+y-2$가 $x,\ y$의 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 상수 a의 값을 구하면 ?

① $\frac{2}{9}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{4}{9}$　④ $\frac{5}{9}$　⑤ $\frac{2}{3}$

해설

$x^2+xy+ay^2+x+y-2$

$=x^2+(y+1)x+ay^2+y-2$가

$x,\ y$의 두 일차식의 곱으로 나타내어지려면

$D=(y+1)^2-4(ay^2+y-2)$

$=y^2+2y+1-4ay^2-4y+8$

$=(1-4a)y^2-2y+9$에서

$\frac{D}{4}=1-9(1-4a)=0$

$\therefore\ 1-9+36a=0$

$\therefore\ a=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$

14. 세 부등식 A가 $3(x-1) > 12 + 4(2x-5)$, B가 $2(3-2x) < -x+10$, C가 $2x+1 > a$이다. A와 B의 공통해에서 C를 제외한 수는 존재하지 않을 때, a 의 값 중에서 가장 큰 정수는?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$3(x-1) > 12 + 4(2x-5)$ 를 풀면 $x < 1$

$2(3-2x) < -x+10$ 을 풀면 $-\frac{4}{3} < x$

A와 B의 공통해는 $-\frac{4}{3} < x < 1$

$2x+1 > a$ 를 풀면 $x > \frac{a-1}{2}$

C를 제외한 수는 $x \le \frac{a-1}{2}$ 이므로

A와 B의 공통해에서 C를 제외한 수가 존재하지 않기 위해서

$\frac{a-1}{2} \le -\frac{4}{3}$, $a \le -\frac{5}{3}$가 되어야 한다.

$\therefore$ (가장 큰 정수)$= -2$

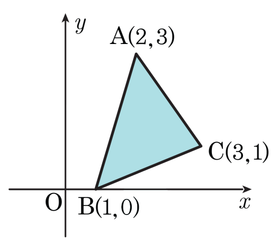
15. 함수 $f(x)=(x^2+2ax+3)^2+(x^2+2ax+3)-6$일 때, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge 0$ 이 성립하는 실수 a의 값의 범위는?

① $-1\le a\le 1$　② $-1<a\le 0$　③ $-1<a<0$
④ $0\le a<1$　⑤ $0<a\le 1$

해설

$x^2+2ax+3=t$로 놓으면
$t^2+t-6\ge 0,\ (t+3)(t-2)\ge 0$
$\therefore\ t\le -3$ 또는 $t\ge 2$
(i) $t\le -3$, 즉 $g(x)\le -3$ 일 때
$x^2+2ax+3\le -3$ 에서 $x^2+2ax+6\le 0$
$y=x^2+2ax+6$ 의 그래프는
아래로 볼록한 포물선이므로
모든 실수 x 에 대하여 성립하지 않는다.
(ii) $t\ge 2$, 즉 $g(x)\ge 2$ 일 때
$x^2+2ax+3\ge 2$ 에서 $x^2+2ax+1\ge 0$
이 부등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식
$x^2+2ax+1=0$ 의 판별식을 D 라 하면
$\frac{D}{4}=a^2-1\le 0\quad\therefore\ -1\le a\le 1$
(i), (ii) 에서 $-1\le a\le 1$

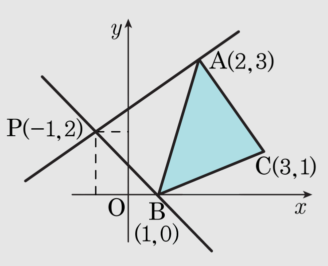
16. 직선 $y=-mx-m+2$ 가 아래 그림의 삼각형 ABC 를 지나기 위한 m 의 범위는?



① $-1 \le m \le 3$　② $-1 \le m \le \frac{1}{3}$
③ $-\frac{1}{3} \le m \le 1$　④ $-\frac{1}{3} \le m \le 3$
⑤ $1 \le m \le 3$

해설

직선 $y=-mx-m+2$ 에서 $mx+y+m-2=0$
$m(x+1)+y-2=0$ 이므로
점 P$(-1,\ 2)$ 를 반드시 지난다.
따라서 직선 $y=-mx-m+2$ 가 $\triangle$ABC 를 지나기 위한 기울기 $-m$ 의 범위는



(직선 PB 의 기울기) $\le -m \le$ (직선 PA 의 기울기)
직선 PB 의 기울기는 $\frac{2-0}{-1-1}=-1$
직선 PA 의 기울기는 $\frac{2-3}{-1-2}=\frac{1}{3}$
$-1 \le -m \le \frac{1}{3}$
$\therefore\ -\frac{1}{3} \le m \le 1$

17. 점 $(1,\ -1)$ 에서 직선 $ax+by=0(a \neq 0,\ b \neq 0)$ 까지의 거리가 $\sqrt{2}$ 일 때, 상수 $a,\ b$ 의 관계를 바르게 설명한 것은?

① $a-b=0$　② $a-b=\sqrt{2}$　③ $a+b=0$
④ $ab=0$　⑤ $ab=\sqrt{2}$

해설

$\dfrac{|a \times 1 + b \times (-1)|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{|a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{2}$

$|a-b| = \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}$

양변을 제곱하면 $a^2-2ab+b^2 = 2a^2+2b^2$

$a^2+2ab+b^2=0,\ (a+b)^2=0$

따라서 $a+b=0$

18. 두 원 $(x-a)^2+(y-1)^2=1$, $(x-2)^2+(y-a)^2=4$이 직교할 때 a의 값의 합은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

두 원의 중심이 각각 $(a,\ 1)$, $(2,\ a)$이므로
두 원의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{(a-2)^2+(1-a)^2}$이다.
두 원의 반지름은 각각 1, 2이므로
직교하기 위한 조건은
$(a-2)^2+(1-a)^2=1^2+2^2$
$\therefore\ a^2-3a=0$
근과 계수와의 관계로부터 두 근의 합은 3

19. 원 O : $x^2+(y-1)^2=1$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 원을 O'이라고 하자. 두 원 O, O' 의 교점을 각각 A, B 라 할 때, 점 $(6,\ 2)$ 를 직선 AB에 대하여 대칭이동한 점이 $(a,\ b)$ 이다. 이 때, ab의 값을 구하면?

① -8 ② -12 ③ 8 ④ 12 ⑤ 0

해설

원 O : $x^2+(y-1)^2=1$을 x축의 방향으로 -1만큼,
y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면
O' : $(x+1)^2+y^2=1$
두 원의 방정식을 일반형으로 변형하면
O : $x^2+y^2-2y=0$, O' : $x^2+y^2+2x=0$
이 때, 직선 AB의 방정식은 $2x+2y=0$,
즉 $y=-x$
따라서 점 $(6,\ 2)$를 직선 $y=-x$에 대하여
대칭이동한 점은 $(-2,\ -6)$이므로
$a=-2,\ b=-6\quad \therefore ab=12$

20. n이 자연수일 때, 다항식 $x^{2n}(x^2+ax+b)$를 $(x-3)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $9^n(x-3)$이 될 때, $a+b$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x^{2n}(x^2+ax+b)=(x-3)^2Q(x)+9^n(x-3)$

$x^{2n}(x-3)(x-\alpha)=(x-3)\,(x-3)Q(x)+9^n\}$ 라 놓으면,

$x^{2n}(x-\alpha)=(x-3)Q(x)+9^n$ 이고

양변에 $x=3$을 대입하면, $9^n(3-\alpha)=9^n$

$\therefore\ 3-\alpha=1,\quad \alpha=2$

그러므로 $a=-5,\ b=6$이 된다.

따라서 $a+b=1$

21. x^2의 계수가 1인 세 이차식 A, B, C가 다음 세 조건을 모두 만족할 때, 이차식 A는?

㉠ A, B의 최대공약수는 $x+1$이다.

㉡ B, C의 최대공약수는 $x-2$이다.

㉢ A, C의 최소공배수는 x^3+2x^2-5x-6이다.

① x^2+4x+3　② x^2-x-2　③ x^2+x-6

④ x^2+5x+6　⑤ x^2+2x-3

해설

A, B의 최대공약수는 $x+1$ 이므로
$A=a(x+1),\ B=b(x+1)$
B, C의 최대공약수는 $x-2$ 이므로
$B=(x-2)(x+1),\ C=c(x-2)$
A, C의 최소공배수는
$x^3+2x^2-5x-6=(x+3)(x-2)(x+1)$
따라서 A, C의 최대공약수는 $(x+3)$ 이고
$A=(x+3)(x+1)=x^2+4x+3$

22. 연립부등식 $5x-8<3x+8$, $x-5>-2a$ 를 만족하는 x 중 자연수들의 합이 22 일 때, 자연수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$5x-8<3x+8$ 을 풀면 $x<8$
$x-5>-2a$ 를 풀면 $x>-2a+5$
$\therefore\ -2a+5<x<8$
이 부등식을 만족하는 자연수 x 의 합이 22 이므로
$x=4,\ 5,\ 6,\ 7$
따라서 $3\le -2a+5<4$ 이어야 하므로
$\frac{1}{2}<a\le 1$
그런데 a 가 자연수이므로 $a=1$ 이다.

23. 명수, 우빈, 지원이는 각자 그림 1 점씩을 그려 교무실 앞에 나란히 전시해 놓고, 지나가시는 선생님들께 가장 마음에 드는 그림 1 개만 골라 그림 옆 종이에 스티커를 붙여달라고 하였다. 처음에 총 40 개의 스티커가 있었고, 중간 점검 결과 명수는 10 표, 우빈이는 8 표, 지원이는 7 표를 얻었을 때, 남은 스티커의 획득 여부에 관계없이 명수가 가장 많은 스티커를 받으려면 최소 몇 개의 스티커를 더 얻어야 하는지 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 7 개

해설

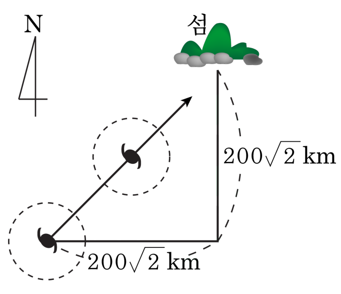
중간 점검 결과는 $10+8+7=25$(개) 이므로 남은 스티커 개수는 $40-25=15$ (개) 이다.
명수가 가장 많은 스티커를 얻기 위해 접전을 펼칠 때는 2 등인 우빈이와 경쟁할 때이고, 명수가 x 개의 스티커를 얻었다고 가정하면 그로부터 명수가 얻게 되는 스티커의 수의 합이 나머지 $(15-x)$ 개를 모두 우빈이가 얻는 결과보다도 많으면 무조건 명수는 가장 많은 스티커를 받게 된다. 즉,

$10+x>8+(15-x)$

$\therefore\ x>\frac{13}{2}$

따라서 명수가 가장 많은 스티커를 받는다는 사실이 확정되기 위해서는 최소 7 개의 스티커를 더 얻어야 한다.

24. 반지름의 길이가 10 km 인 원 모양의 섬이 있다. 현재 태풍의 중심은 이 섬의 중심으로부터 남쪽으로 $200\sqrt{2}$ km , 서쪽으로 $200\sqrt{2}$ km 떨어진 곳에서 시속 10 km 의 속력으로 북동쪽으로 진행하고 있다. 태풍의 중심에서 30 km 이내가 폭풍우권이라고 할 때, 처음으로 이 섬 전체가 폭풍우권에 들어가는데 걸리는 시간은 몇 시간인지 구하면?(단, 폭풍우권의 크기는 일정하다.)

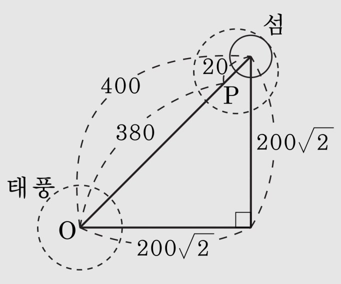


▶ 답 : ______ 시간

▷ 정답 : 38 시간

해설

태풍이 O 에서 출발하여 P 지점에 도착하면
섬 전체가 폭풍우권에 들어간다.
$\overline{OP} = 380(\text{km})$ 이므로 걸리는 시간은 38 시간



25. 점 $(1, 2)$ 에 대한 점 (a, b) 의 대칭점을 (a', b') 이라 하고, 점 (a, b) 가 직선 $y = 3x + 1$ 위를 움직일 때, 다음 중 점 (a', b') 이 움직이는 도형 위의 점은?

① $(-1, 2)$　② $(0, -1)$　③ $(1, 0)$
④ $(2, 1)$　⑤ $(3, 5)$

해설

$y = 3x + 1$ 위의 점 $(a,\ b)$ 와 대칭점
$(a',\ b')$ 의 중점이 $(1,\ 2)$ 이므로
$\dfrac{a' + a}{2} = 1,\ \dfrac{b' + b}{2} = 2$
$a' = 2 - a,$
$b' = 4 - b = 3 - 3a\ \ (\because\ \ b = 3a + 1)$
$\therefore\ \ (a',\ b') = (2 - a,\ 3 - 3a)$
$x = 2 - a, y = 3 - 3a$ 라 하고 a 를 소거하면
$y = 3 - 3(2 - x)\ ,\ \ y = 3x - 3$
즉 (a', b') 은 직선 $y = 3x - 3$ 위를 움직인다.
$\therefore\ \ (1,\ 0)$ 이 이 직선 위에 있다.