

1. 다항식 $x^3 + ax^2 + bx - 1$ 이 $x^2 - 3x + 2$ 로 나누어 떨어지도록 상수 $a + b$ 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 1$ 로 놓으면

$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ 이므로 $f(x)$ 는 $x-1$, $x-2$ 로 나누어 떨어진다.

$$f(1) = 1 + a + b - 1 = 0 \text{ 즉, } a + b = 0 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$f(2) = 8 + 4a + 2b - 1 = 0 \text{ 즉, } 4a + 2b = -7 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{으로부터 } a = -\frac{7}{2}, b = \frac{7}{2}$$

$$\therefore a + b = 0$$

2. 연립부등식 $\begin{cases} 0.2x + 1 \geq 0.7x \\ \frac{x}{2} - 1 > \frac{x}{6} + \frac{1}{3} \end{cases}$ 을 만족시키는 정수 x 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 없다.

해설

$$(i) \ 0.2x + 1 \geq 0.7x, \ x \leq 2$$

$$(ii) \ \frac{x}{2} - 1 > \frac{x}{6} + \frac{1}{3}, \ 3x - 6 > x + 2$$

$$\therefore x > 4$$

따라서 연립부등식을 만족시키는 정수는 없다.

3. 부등식 $|2x - a| > 7$ 의 해가 $x < -1$ 또는 $x > b$ 일 때, 상수 a, b 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$|2x - a| > 7$ 에서

$$2x - a < -7 \text{ 또는 } 2x - a > 7$$

$$\therefore x < \frac{a-7}{2} \text{ 또는 } x > \frac{a+7}{2}$$

그런데 주어진 부등식의 해가

$x < -1$ 또는 $x > b$ 이므로

$$\frac{a-7}{2} = -1, \frac{a+7}{2} = b$$

$$\therefore a = 5, b = 6$$

$$\therefore a + b = 11$$

4. 점 $(-1, -2)$ 를 x 축의 방향으로 6 만큼 평행이동한 다음 직선 $x = a$ 에 대하여 대칭이동하면 처음 위치로 돌아온다. 이 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

먼저 점 $(-1, -2)$ 를 x 축의 방향으로 6 만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(-1 + 6, -2)$, 즉 $(5, -2)$

점 $(5, -2)$ 를 다시 직선 $x = a$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(2a - 5, -2)$

이 때, 이것이 $(-1, -2)$ 와 같으므로 $2a - 5 = -1$

$\therefore a = 2$

5. 서로 다른 세 실수 x, y, z 에 대하여 $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ 를 만족할 때, $x + y + z$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

$$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0$$

$$(x + y + z) = 0 \text{ 또는 } x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$$

$$\therefore x + y + z = 0 \text{ 또는 } \frac{1}{2}\{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\} = 0$$

그런데 x, y, z 가 서로 다른 세 실수($x \neq y \neq z$)이므로

$$x + y + z = 0$$

6. 다음 중 사차방정식 $x^4 + x^2 + 1 = 0$ 의 근에 해당하는 것을 모두 고르면?

① $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$

② $\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$

③ $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$

④ $1 + \sqrt{3}i$

⑤ $\frac{\sqrt{3} - i}{2}$

해설

$x^4 + x^2 + 1 = 0$ 을 변형하면

$$x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = 0,$$

$$(x^2 + 1)^2 - x^2 = 0$$

$$(x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x) = 0,$$

$$x^2 + x + 1 = 0 \text{ 또는 } x^2 - x + 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \text{ 또는 } x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

7. x 에 대한 두 이차방정식 $x^2 - ax + 10 = 0$, $x^2 + x + b = 0$ 이 공통근 2를 가질 때, 두 이차방정식의 공통근이 아닌 나머지 두 근의 합은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$x^2 - ax + 10 = 0$, $x^2 + x + b = 0$ 의 공통근이 2이므로 $x = 2$ 를 두 이차방정식에 각각 대입하면 성립한다.

$$2^2 - 2a + 10 = 0, 2^2 + 2 + b = 0$$

$$\therefore a = 7, b = -6$$

이 때, $x^2 - 7x + 10 = 0$ 에서

$$(x - 2)(x - 5) = 0 \text{이므로 } x = 2, 5$$

또, $x^2 + x - 6 = 0$ 에서

$$(x - 2)(x + 3) = 0 \text{이므로 } x = 2, -3$$

따라서 공통근이 아닌 나머지 두 근은 5, -3이므로 두 근의 합은 2이다.

8. $|x + 1| + |y - 2| = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 의 곱 xy 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$|x + 1| \geq 0, |y - 2| \geq 0$ 이므로 $x + 1 = 0, y - 2 = 0$

$\therefore x = -1, y = 2$

따라서, 구하는 값은 $xy = -1 \cdot 2 = -2$

9. 300 원짜리 사과와 200 원짜리 귤을 합하여 15 개를 사는데 금액을 3950 원 이하로 귤보다 사과를 많이 사려고 한다. 이 조건을 만족하여 살 수 있는 사과의 개수는 최대 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : 개

▶ 정답 : 9 개

해설

사과의 개수 : x 개, 귤의 개수 : $(15 - x)$ 개

$$\begin{cases} 300x + 200(15 - x) \leq 3950 \cdots \textcircled{7} \\ 8 \leq x \leq 15 \end{cases}$$

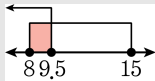
$$\textcircled{7} : 300x + 3000 - 200x \leq 3950$$

$$100x \leq 3950 - 3000$$

$$100x \leq 950$$

$$\therefore x \leq 9.5$$

$\therefore 8 \leq x \leq 9.5$ 따라서 살 수 있는 사과의 최대 개수는 9 개이다.



10. $ax + 8y = 4$, $x + (a + 2)y = -7$ 에 대하여 두 식을 동시에 만족하는 (x, y) 가 하나도 없을 때, 실수 a 의 값은?

① $a = -4$, $b = -2$

② $a = -4$, $b = 2$

③ $a = 4$, $b = -2$

④ $a = 4$, $b = 2$

⑤ $a = 1$, $b = -2$

해설

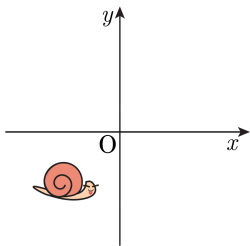
두 직선 $ax + 8y - 4 = 0$, $x + (a + 2)y + 7 = 0$ 이 평행해야 한다.

$$\text{그러므로 } \frac{a}{1} = \frac{8}{a+2} \neq -\frac{4}{7}$$

$$a(a+2) = 8 \quad \left(a \neq -\frac{4}{7}, a \neq -16 \right)$$

$$\therefore a = -4, 2$$

11. 직교좌표계를 사용했을 때, 달팽이의 현재 위치는 $(-10, -10)$ 이다. 이 달팽이는 x 축 방향으로 2, y 축 방향으로 2 만큼 평행이동하는데 1 분이 걸린다고 한다. 이 달팽이가 원점에 도달하는데 걸린 시간은 몇 분인지 구하여라.



답 :

분



정답 : 5 분

해설

달팽이가 x 축 방향으로 2, y 축 방향으로 2 만큼 평행이동하는데 1 분이 걸린다.

즉, $(-10, -10)$ 에서 $(-8, -8)$ 까지 가는데 1 분,
 $(-6, -6)$ 까지 가는데 2 분, 같은 식으로 하면
원점에 도달하는데 총 5 분이 걸린다.

12. n 이 짝수일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1} + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1}$ 의 값은?

① -2

② $-\sqrt{2}$

③ 0

④ 2

⑤ $\sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1} + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1} \\ &= \left\{ \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 \right\}^{2n} \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}} + \left\{ \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2 \right\}^{2n} \cdot \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \\ &= (\pi^2)^{2n} \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}} + \{(-\pi)^2\}^{2n} - \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{1+i}{\sqrt{2}} + \frac{1-i}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

13. $x^2 + xy + ay^2 + x + y - 2$ 가 x, y 의 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 상수 a 의 값을 구하면 ?

① $\frac{2}{9}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{4}{9}$

④ $\frac{5}{9}$

⑤ $\frac{2}{3}$

해설

$$x^2 + xy + ay^2 + x + y - 2$$

$$= x^2 + (y+1)x + ay^2 + y - 2 \text{가}$$

x, y 의 두 일차식의 곱으로 나타내어지려면

$$D = (y+1)^2 - 4(ay^2 + y - 2)$$

$$= y^2 + 2y + 1 - 4ay^2 - 4y + 8$$

$$= (1-4a)y^2 - 2y + 9 \text{에서}$$

$$\frac{D}{4} = 1 - 9(1-4a) = 0$$

$$\therefore 1 - 9 + 36a = 0$$

$$\therefore a = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

14. 세 부등식 A 가 $3(x-1) > 12 + 4(2x-5)$, B 가 $2(3-2x) < -x+10$, C 가 $2x+1 > a$ 이다. A 와 B 의 공통해에서 C 를 제외한 수는 존재하지 않을 때, a 의 값 중에서 가장 큰 정수는?

① -3

② -2

③ -1

④ 0

⑤ 1

해설

$3(x-1) > 12 + 4(2x-5)$ 를 풀면 $x < 1$

$2(3-2x) < -x+10$ 을 풀면 $-\frac{4}{3} < x$

A 와 B 의 공통해는 $-\frac{4}{3} < x < 1$

$2x+1 > a$ 를 풀면 $x > \frac{a-1}{2}$

C 를 제외한 수는 $x \leq \frac{a-1}{2}$ 이므로

A 와 B 의 공통해에서 C 를 제외한 수가 존재하지 않기 위해서

$\frac{a-1}{2} \leq -\frac{4}{3}$, $a \leq -\frac{5}{3}$ 가 되어야 한다.

$\therefore$ (가장 큰 정수) = -2

15. 함수 $f(x) = (x^2 + 2ax + 3)^2 + (x^2 + 2ax + 3) - 6$ 일 때, 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이 성립하는 실수 a 의 값의 범위는?

- ① $-1 \leq a \leq 1$ ② $-1 < a \leq 0$ ③ $-1 < a < 0$
 ④ $0 \leq a < 1$ ⑤ $0 < a \leq 1$

해설

$x^2 + 2ax + 3 = t$ 로 놓으면

$$t^2 + t - 6 \geq 0, (t+3)(t-2) \geq 0$$

$$\therefore t \leq -3 \text{ 또는 } t \geq 2$$

(i) $t \leq -3$, 즉 $g(x) \leq -3$ 일 때

$$x^2 + 2ax + 3 \leq -3 \text{ 에서 } x^2 + 2ax + 6 \leq 0$$

$y = x^2 + 2ax + 6$ 의 그래프는

아래로 볼록한 포물선이므로

모든 실수 x 에 대하여 성립하지 않는다.

(ii) $t \geq 2$, 즉 $g(x) \geq 2$ 일 때

$$x^2 + 2ax + 3 \geq 2 \text{ 에서 } x^2 + 2ax + 1 \geq 0$$

이 부등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식

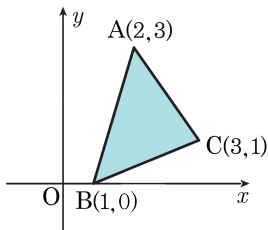
$$x^2 + 2ax + 1 = 0 \text{ 의 판별식을 } D \text{ 라 하면}$$

$$\frac{D}{4} = a^2 - 1 \leq 0 \quad \therefore -1 \leq a \leq 1$$

(i), (ii)에서 $-1 \leq a \leq 1$

16. 직선 $y = -mx - m + 2$ 가 아래 그림의 삼각형 ABC 를 지나기 위한 m 의 범위는?

- ① $-1 \leq m \leq 3$ ② $-1 \leq m \leq \frac{1}{3}$
 ③ $-\frac{1}{3} \leq m \leq 1$ ④ $-\frac{1}{3} \leq m \leq 3$
 ⑤ $1 \leq m \leq 3$



해설

직선 $y = -mx - m + 2$ 에서 $mx + y + m - 2 = 0$

$m(x + 1) + y - 2 = 0$ 이므로
 점 P(-1, 2) 를 반드시 지난다.

따라서 직선 $y = -mx - m + 2$ 가
 $\triangle ABC$ 를 지나기 위한 기울기 $-m$
 의 범위는

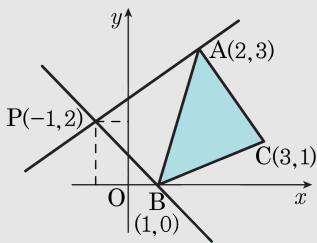
(직선 PB 의 기울기) $\leq -m \leq$ (직선 PA 의 기울기)

직선 PB 의 기울기는 $\frac{2-0}{-1-1} = -1$

직선 PA 의 기울기는 $\frac{2-3}{-1-2} = \frac{1}{3}$

$-1 \leq -m \leq \frac{1}{3}$

$\therefore -\frac{1}{3} \leq m \leq 1$



17. 점 $(1, -1)$ 에서 직선 $ax + by = 0 (a \neq 0, b \neq 0)$ 까지의 거리가 $\sqrt{2}$ 일 때, 상수 a, b 의 관계를 바르게 설명한 것은?

① $a - b = 0$

② $a - b = \sqrt{2}$

③ $a + b = 0$

④ $ab = 0$

⑤ $ab = \sqrt{2}$

해설

$$\frac{|a \times 1 + b \times (-1)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a - b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{2}$$

$$|a - b| = \sqrt{2} \sqrt{a^2 + b^2}$$

양변을 제곱하면 $a^2 - 2ab + b^2 = 2a^2 + 2b^2$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 0, (a + b)^2 = 0$$

따라서 $a + b = 0$

18. 두 원 $(x-a)^2 + (y-1)^2 = 1$, $(x-2)^2 + (y-a)^2 = 4$ 이 직교할 때 a 의 값의 합은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

두 원의 중심이 각각 $(a, 1)$, $(2, a)$ 이므로

두 원의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{(a-2)^2 + (1-a)^2}$ 이다.

두 원의 반지름은 각각 1, 2이므로

직교하기 위한 조건은

$$(a-2)^2 + (1-a)^2 = 1^2 + 2^2$$

$$\therefore a^2 - 3a = 0$$

근과 계수와의 관계로부터 두 근의 합은 3

19. 원 $O : x^2 + (y-1)^2 = 1$ 을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 원을 O' 이라고 하자. 두 원 O, O' 의 교점을 각각 A, B 라 할 때, 점 $(6, 2)$ 를 직선 AB 에 대하여 대칭이동한 점이 (a, b) 이다. 이 때, ab 의 값을 구하면?

① -8

② -12

③ 8

④ 12

⑤ 0

해설

원 $O : x^2 + (y-1)^2 = 1$ 을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면

$$O' : (x+1)^2 + y^2 = 1$$

두 원의 방정식을 일반형으로 변형하면

$$O : x^2 + y^2 - 2y = 0, O' : x^2 + y^2 + 2x = 0$$

이 때, 직선 AB 의 방정식은 $2x + 2y = 0$,

$$\text{즉 } y = -x$$

따라서 점 $(6, 2)$ 를 직선 $y = -x$ 에 대하여

대칭이동한 점은 $(-2, -6)$ 이므로

$$a = -2, b = -6 \therefore ab = 12$$

20. n 이 자연수일 때, 다항식 $x^{2n}(x^2 + ax + b)$ 를 $(x - 3)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지가 $9^n(x - 3)$ 이 될 때, $a + b$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$x^{2n}(x^2 + ax + b) = (x - 3)^2 Q(x) + 9^n(x - 3)$$

$$x^{2n}(x - 3)(x - \alpha) = (x - 3)(x - 3)Q(x) + 9^n \} \text{라 놓으면,}$$

$$x^{2n}(x - \alpha) = (x - 3)Q(x) + 9^n \text{이고}$$

$$\text{양변에 } x = 3 \text{을 대입하면, } 9^n(3 - \alpha) = 9^n$$

$$\therefore 3 - \alpha = 1, \alpha = 2$$

그러므로 $a = -5, b = 6$ 이 된다.

$$\text{따라서 } a + b = 1$$

21. x^2 의 계수가 1인 세 이차식 A, B, C 가 다음 세 조건을 모두 만족할 때, 이차식 A 는?

㉠ A, B 의 최대공약수는 $x+1$ 이다.

㉡ B, C 의 최대공약수는 $x-2$ 이다.

㉢ A, C 의 최소공배수는 $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ 이다.

① $x^2 + 4x + 3$

② $x^2 - x - 2$

③ $x^2 + x - 6$

④ $x^2 + 5x + 6$

⑤ $x^2 + 2x - 3$

해설

A, B 의 최대공약수는 $x+1$ 이므로

$$A = a(x+1), B = b(x+1)$$

B, C 의 최대공약수는 $x-2$ 이므로

$$B = (x-2)(x+1), C = c(x-2)$$

A, C 의 최소공배수는

$$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x+3)(x-2)(x+1)$$

따라서 A, C 의 최대공약수는 $(x+3)$ 이고

$$A = (x+3)(x+1) = x^2 + 4x + 3$$

22. 연립부등식 $5x - 8 < 3x + 8$, $x - 5 > -2a$ 를 만족하는 x 중 자연수들의 합이 22 일 때, 자연수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$5x - 8 < 3x + 8$ 을 풀면 $x < 8$

$x - 5 > -2a$ 를 풀면 $x > -2a + 5$

$\therefore -2a + 5 < x < 8$

이 부등식을 만족하는 자연수 x 의 합이 22 이므로

$x = 4, 5, 6, 7$

따라서 $3 \leq -2a + 5 < 4$ 이어야 하므로

$$\frac{1}{2} < a \leq 1$$

그런데 a 가 자연수이므로 $a = 1$ 이다.

23. 명수, 우빈, 지원이는 각자 그림 1 점씩을 그려 교무실 앞에 나란히 전시해 놓고, 지나가시는 선생님들께 가장 마음에 드는 그림 1 개만 골라 그림 옆 종이에 스티커를 붙여달라고 하였다. 처음에 총 40 개의 스티커가 있었고, 중간 점검 결과 명수는 10 표, 우빈이는 8 표, 지원이는 7 표를 얻었을 때, 남은 스티커의 획득 여부에 관계없이 명수가 가장 많은 스티커를 받으려면 최소 몇 개의 스티커를 더 얻어야 하는지 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 7 개

해설

중간 점검 결과는 $10+8+7=25$ (개) 이므로 남은 스티커 개수는 $40-25=15$ (개) 이다.

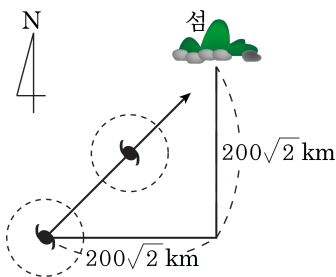
명수가 가장 많은 스티커를 얻기 위해 점전을 펼칠 때는 2 등인 우빈이와 경쟁할 때이고, 명수가 x 개의 스티커를 얻었다고 가정하면 그로부터 명수가 얻게 되는 스티커의 수의 합이 나머지 $(15-x)$ 개를 모두 우빈이가 얻는 결과보다도 많으면 무조건 명수는 가장 많은 스티커를 받게 된다. 즉,

$$10+x > 8+(15-x)$$

$$\therefore x > \frac{13}{2}$$

따라서 명수가 가장 많은 스티커를 받는다는 사실이 확정되기 위해서는 최소 7 개의 스티커를 더 얻어야 한다.

24. 반지름의 길이가 10km 인 원 모양의 섬이 있다. 현재 태풍의 중심은 이 섬의 중심으로부터 남쪽으로 $200\sqrt{2}$ km, 서쪽으로 $200\sqrt{2}$ km 떨어진 곳에서 시속 10km 의 속력으로 북동쪽으로 진행하고 있다. 태풍의 중심에서 30km 이내가 폭풍우권이라고 할 때, 처음으로 이 섬 전체가 폭풍우권에 들어가는데 걸리는 시간은 몇 시간인지 구하면?(단, 폭풍우권의 크기는 일정하다.)



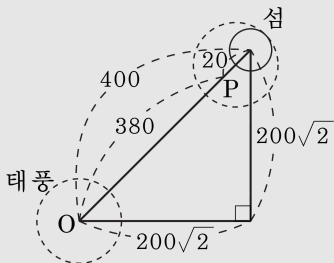
▶ 답 : 시간

▷ 정답 : 38 시간

해설

태풍이 O 에서 출발하여 P 지점에 도착하면
섬 전체가 폭풍우권에 들어간다.

$\overline{OP} = 380(\text{km})$ 이므로 걸리는 시간은 38 시간



25. 점 $(1, 2)$ 에 대한 점 (a, b) 의 대칭점을 (a', b') 이라 하고, 점 (a, b) 가 직선 $y = 3x + 1$ 위를 움직일 때, 다음 중 점 (a', b') 이 움직이는 도형 위의 점은?

① $(-1, 2)$

② $(0, -1)$

③ $(1, 0)$

④ $(2, 1)$

⑤ $(3, 5)$

해설

$y = 3x + 1$ 위의 점 (a, b) 와 대칭점 (a', b') 의 중점이 $(1, 2)$ 이므로

$$\frac{a' + a}{2} = 1, \quad \frac{b' + b}{2} = 2$$

$$a' = 2 - a,$$

$$b' = 4 - b = 3 - 3a \quad (\because b = 3a + 1)$$

$$\therefore (a', b') = (2 - a, 3 - 3a)$$

$x = 2 - a, y = 3 - 3a$ 라 하고 a 를 소거하면

$$y = 3 - 3(2 - x), \quad y = 3x - 3$$

즉 (a', b') 은 직선 $y = 3x - 3$ 위를 움직인다.

$\therefore (1, 0)$ 이 이 직선 위에 있다.