1. 다항식 $8x^3-1$을 $4x^2+2x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 할 때 $Q(x)$의 상수항의 계수는?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$8x^3-1=(2x)^3-1^3=(2x-1)\left(4x^2+2x+1\right)$

$\therefore Q(x)=2x-1$

$\therefore$ 상수항은 -1

2. $a^2b+b^2c-b^3-a^2c$을 인수분해하면?

① $(a+b)(a-b)(b+c)$
② $(a-b)(b-c)(c+a)$
③ $(a-b)(a+b)(b-c)$
④ $(a-b)(a+b)(c-a)$
⑤ $(a-b)(b+c)(c-a)$

해설

$a^2b+b^2c-b^3-a^2c$
$=a^2(b-c)-b^2(b-c)$
$=(a-b)(a+b)(b-c)$

3. $(x^2+x)(x^2+x+1)-6$을 인수분해하면?

① $(x-1)(x+2)(x^2+x+3)$ ② $(x-1)(x+2)(x^2+x-3)$

③ $(x-2)(x+1)(x^2+x+3)$ ④ $(x-1)(x+2)(x^2-x+3)$

⑤ $(x+1)(x-2)(x^2-x+3)$

해설

$x^2+x=X$라 하자.

(준식) $=X(X+1)-6$

$=X^2+X-6$

$=(X+3)(X-2)$

$=(x^2+x+3)(x^2+x-2)$

$=(x-1)(x+2)(x^2+x+3)$

4. $x^4+4x^3-2x^2+ax+b$가 이차식의 완전제곱식이 될 때, 상수 a, b의 값은?

① $a=12,\ b=9$ ② $a=-12,\ b=9$

③ $a=12,\ b=-9$ ④ $a=-12,\ b=-9$

⑤ $a=9,\ b=12$

해설

$x^4+4x^3-2x^2+ax+b=(x^2+px+q)^2$ 으로 놓으면

이 식의 우변은

$x^4+2x^2(px+q)+(px+q)^2$

$=x^4+2px^3+(p^2+2q)x^2+2pqx+q^2$

좌변과 계수를 비교하면

$2p=4,\ p^2+2q=-2$

$p=2,\ q=-3$에서

$a=2pq=-12,\ b=q^2=9$

5. $x^3-6x^2+11x-6$을 인수분해 하면?

① $(x+1)(x-2)(x+3)$　② $(x-1)(x+2)(x+3)$

③ $(x-1)(x-2)(x-3)$　④ $(x+1)(x+2)(x-3)$

⑤ $(x-1)(x-2)(x+3)$

해설

인수정리를 이용하면

$f(1)=0$, $f(2)=0$, $f(3)=0$이므로

(준식)$=(x-1)(x-2)(x-3)$

6. 세 개의 다항식 x^3+ax+b, x^3+cx^2+a, cx^2+bx+4, 의 공약수 중 하나가 $x-1$일 때, $a+b+c$의 값은?

① 2　　② −2　　③ 3　　④ −3　　⑤ 4

해설

$f(x)=x^3+ax+b \to \ f(1)=1+a+b=0 \cdots$ ㉠
$g(x)=x^3+cx^2+a \to \ g(1)=1+c+a=0 \cdots$ ㉡
$h(x)=cx^2+bx+4 \to \ h(1)=c+b+4=0 \cdots$ ㉢
㉠ + ㉡ + ㉢에서 $2(a+b+c)+6=0$
$\therefore \ a+b+c=-3$

7. 두 다항식 $x^2-4x+3a+b$와 x^2+bx-6의 최대공약수가 $x-2$일 때, $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 8

해설

$f(x)=x^2-4x+3a+b$,
$g(x)=x^2+bx-6$이라 하면
$f(x)$와 $g(x)$는 모두 $x-2$로 나누어떨어지므로
$f(2)=g(2)=0$에서
$f(2)=4-8+3a+b=0,\ g(2)=4+2b-6=0$
$\therefore\ a=1,\ b=1\ \therefore\ a+b=2$

8. 두 다항식 x^2+ax+b, $x^2+3bx+2a$의 최대공약수가 $x-1$일 때, $a+b$의 값을 구하면?

① 2　② 1　③ 0　④ -1　⑤ -2

해설

최대공약수가 $x-1$이므로
x^2+ax+b와 $x^2+3bx+2a$는
모두 $x-1$로 나누어 떨어져야 한다.
$\therefore\ 1+a+b=0$이고 $1+3b+2a=0$
따라서, $a=-2,\ b=1$
$\therefore\ a+b=-1$

9. x^6+1을 계수가 실수인 범위 내에서 인수분해 할 때, 다음 중 인수인 것은?

① x^2+x+1　② x^2-x+1　③ $x^2+\sqrt{3}x+1$

④ $x^2+\sqrt{3}x-1$　⑤ x^2-1

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (x^2)^3+1\\ &= (x^2+1)(x^4-x^2+1)\\ &= (x^2+1)\{(x^2+1)^2-3x^2\}\\ &= (x^2+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)\end{aligned}$$

10. 다음<보기>중 다항식 $x^4 - 7x^2 + 9$을 인수분해 할 때, 그 인수로 알맞은 것을 모두 고르면?

<보기>

㉠ $x^2 - 1$　　㉡ $x^2 - x - 1$

㉢ $x^2 - x - 3$　　㉣ $x^2 + x - 3$

① ㉠, ㉡　　② ㉡, ㉢　　③ ㉢, ㉣

④ ㉠, ㉡, ㉢　　⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

$$\begin{aligned} x^4 - 7x^2 + 9 &= x^4 - 6x^2 + 9 - x^2 \\ &= (x^2 - 3)^2 - x^2 \\ &= (x^2 - x - 3)(x^2 + x - 3) \end{aligned}$$

$\therefore$ 인수 : $(x^2 - x - 3)$, $(x^2 + x - 3)$

11. 다음 중 $(a^2+b^2)^2-4a^2b^2$을 옳게 인수분해 한 것은?

① $(a-b)^2(a+b)^2$ ② $(a^2-b^2)(a^2+b^2)$
③ $(a-b)^2(a^2+b^2)$ ④ $(a^2-b^2)(a+b)^2$
⑤ $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)^2$

해설

$(a^2+b^2)^2-4a^2b^2$
$=(a^2+b^2-2ab)(a^2+b^2+2ab)$
$=(a-b)^2(a+b)^2$

12. 다음 중 $x^4+x^3-11x^2-9x+18$의 인수가 아닌 것은?

① $x-1$ ② $x+1$ ③ $x-3$ ④ $x+3$ ⑤ $x+2$

해설

준식을 인수정리와 조립제법을 이용하여 정리하면
$(x-1)(x-3)(x+2)(x+3)=0$
※ 최고차항의 계수가 1 인 다항식에서 인수정리를 사용할 때, 상수항의 약수 중에서 대입하여 0이 되는 정수를 찾아본다.

13. $(2^{48}-1)$은 60 과 70 사이의 어떤 두 수로 나누어 떨어진다. 이 두 수는?

① 61, 63　　② 61, 65　　③ 63, 65

④ 63, 67　　⑤ 67, 69

해설

$$2^{48}-1 = (2^6-1)(2^6+1)(2^{12}+1)(2^{24}+1)$$
$$= 63 \cdot 65 \cdot (2^{12}+1)(2^{24}+1)$$

따라서 $2^{48}-1$은 63과 65로 나누어 떨어진다.

14. $\dfrac{2012^3+1}{2012\times 2011+1}$ 의 값을 a 라 할 때, $\dfrac{a+1}{a-1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $\dfrac{1007}{1006}$

해설

$a=\dfrac{(2012+1)(2012^2-2012+1)}{(2012^2-2012+1)}$

$=2013$ 이므로

$\therefore \dfrac{a+1}{a-1}=\dfrac{2013+1}{2013-1}=\dfrac{2014}{2012}=\dfrac{1007}{1006}$

15. $a+b-2c=1,\ a-b+3c=3$ 일 때, 다음 중 $a+ab+c^2$ 을 a 에 관한 식으로 나타낸 것은?

① $(a-8)(a-2)$　　② $(a+8)(a-2)$

③ $-(a-8)(a-2)$　　④ $-(a-8)(a+2)$

⑤ $-(a+8)(a-2)$

해설

$a+b-2c=1 \quad \cdots$ ㉠

$a-b+3c=3 \quad \cdots$ ㉡

㉠+㉡에서 $2a+c=4$

$\therefore c=-2a+4 \quad \cdots$ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $b=-5+9$

$$\begin{aligned}\therefore a+ab+c^2 &= a+a(-5a+9)+(-2a+4)^2 \\ &= -a^2-6a+16 \\ &= -(a^2+6a-16) \\ &= -(a+8)(a-2)\end{aligned}$$

16. 두 다항식 A, B에 대하여 $A \otimes B$를 $A \otimes B = \dfrac{B}{B-A}$ 라 할 때, $(x \otimes x^2) + (x^2 - x) \otimes (x-1)$을 간단히 하면? (단, $x \neq 0$, $x \neq 1$인 실수)

① -1　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$$(x \otimes x^2) = \frac{x^2}{x^2 - x} = \frac{x^2}{x(x-1)} = \frac{x}{x-1}$$

$$\begin{aligned}(x^2 - x) \otimes (x-1) &= \frac{x-1}{(x-1)-(x^2-x)} \\ &= \frac{x-1}{x-1-x^2+x} \\ &= \frac{(x-1)}{-(x^2-2x+1)} \\ &= \frac{(x-1)}{-(x-1)^2} \\ &= -\frac{1}{x-1}\end{aligned}$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = \frac{x}{x-1} - \frac{1}{(x-1)} = \frac{x-1}{x-1} = 1$$

17. x^2 항의 계수가 1 인 두 이차식의 최대공약수가 $x+3$, 최소공배수가 x^3+4x^2+x-6 일 때 두 이차식의 합은?

① $2x^2+7x+3$　② $2x^2-3x-9$　③ $2x^2+3x+9$
④ $2x^2+6x+4$　⑤ $2x^2-x-1$

해설

두 다항식을 각각 $(x+3)(x-\alpha), (x+3)(x-\beta)$ 라면,
최소공배수 $x^3+4x^2+x-6=(x+3)(x-\alpha)(x-\beta)$

$$\begin{aligned} x^3+4x^2+x-6 &= (x+3)\left(x^2+x-2\right) \\ &= (x+3)(x+2)(x-1) \end{aligned}$$

따라서 두 다항식은 $(x+3)(x+2), (x+3)(x-1)$
$\therefore$ 두 다항식의 합은 $2x^2+7x+3$

18. 이차항의 계수가 1인 두 이차다항식의 최대공약수가 $x-1$, 최소공배수가 x^3+2x^2-x-2이다. 두 다항식을 $f(x)$, $g(x)$라 할 때, $f(3)+g(3)$의 값은?

① 14　② 15　③ 16　④ 17　⑤ 18

해설

먼저 x^3+2x^2-x-2를 조립제법을 이용하여 인수분해 한다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ & & 1 & 3 & 2 \\ \hline -2 & 1 & 3 & 2 & \boxed{0} \\ & & -2 & -2 & \\ \hline & 1 & 1 & \boxed{0} & \\ : & & & & \end{array}$$

$\Rightarrow x^3+2x^2-x-2=(x-1)(x+2)(x+1)$

최대공약수가 $(x-1)$이므로

$f(x)=(x-1)(x+2), g(x)=(x-1)(x+1)\cdots$ ㉠

또는 $f(x)=(x-1)(x+1), g(x)=(x-1)(x+2)\cdots$ ㉡

㉠, ㉡ 두 경우 모두 $f(3)+g(3)=18$

19. 이차항의 계수가 1인 두 다항식의 최대공약수가 $x-1$이고 최소공배수가 x^3+x^2-2x일 때, 두 이차식의 합은?

① $2x^2-2x$　② $2x^2+2x$　③ $2x^2+x$
④ $2x^2-2$　⑤ $2x^2+4$

해설

$A=Ga,\quad B=Gb(a,b\text{는 서로소}),\ L=Gab$

$\therefore\ G=(x-1),\quad L=(x-1)x(x+2)$

$$\begin{aligned} A+B=G(a+b) &= (x-1)(x+x+2) \\ &= (x-1)(2x+2) \\ &= 2(x^2-1) \end{aligned}$$

20. 이차항의 계수가 1인 두 이차 다항식의 최대공약수가 $x+3$이고, 최소공배수가 x^3+4x^2+x-6일 때 두 이차식을 구하면?

① $\begin{cases} x^2+x-3 \\ x^2+5x+1 \end{cases}$

② $\begin{cases} x^2+x-6 \\ x^2+4x+3 \end{cases}$

③ $\begin{cases} x^2+x-2 \\ x^2-x+3 \end{cases}$

④ $\begin{cases} x^2+2x-3 \\ x^2+5x+6 \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} x^2+4x+3 \\ x^2-x-6 \end{cases}$

해설

$x^3+4x^2+x-6=(x-1)(x+2)(x+3)$

두 이차식은 $(x-1)(x+3),\ (x+2)(x+3)$에서

$x^2+2x-3,\ x^2+5x+6$

21. 두 이차식의 합이 $2x^2 - x - 6$ 이고, 최소공배수가 $x^3 + x^2 - 4x - 4$ 일 때, 두 이차식의 최대공약수는?

① $x-1$　② $x+1$　③ $x-2$　④ $x+2$　⑤ $x+3$

해설

최대공약수는 합과 최소공배수의 공통인수

$2x^2 - x - 6 = (x-2)(2x+3)$

$x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x-2)(x+2)(x+1)$

22. 최고차항의 계수가 1 인 두 이차식의 최대공약수가 $x+3$ 이고 최소공배수가 x^3+x^2-6x 일 때, 두 이차식의 합은?

① $(x+1)(x-2)$
② $(x+2)(x+4)$
③ $2(x-1)(x+3)$
④ $2(x-2)(x-4)$
⑤ $2(x+1)(x-4)$

해설

최대공약수가 $x+3$ 이므로 두 이차식을
$a(x+3)$, $b(x+3)$ ($a,\ b$ 는 서로소) 라 하고
최소공배수를 $f(x)=x^3+x^2-6x$ 라 하면
$f(x)=x(x^2+x-6)=x(x+3)(x-2)$
따라서 두 다항식은
$x(x+3)$, $(x-2)(x+3)$ 이므로
구하는 두 다항식의 합은

$$\begin{aligned} x(x+3)+(x-2)(x+3) &= (x+3)(2x-2) \\ &= 2(x-1)(x+3) \end{aligned}$$

23. $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3$을 바르게 인수분해 한 것을 찾으면?

① $(x^2+1)(x+3)(x+1)$ ② $(x^2+1)(x+3)(x-1)$

③ $(x^2+1)(x-3)(x-1)$ ④ $(x^2-3)(x-1)(x+1)$

⑤ $(x^2+3)(x-1)(x+1)$

해설

$$
\begin{aligned}
&x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3\\
&= (x^4 - 2x^2 - 3) + 2x^3 + 2x\\
&= (x^2-3)(x^2+1) + 2x(x^2+1)\\
&= (x^2+1)(x^2+2x-3)\\
&= (x^2+1)(x+3)(x-1)
\end{aligned}
$$

24. 다음 식을 인수분해 하면 $(x+py)(x+qy+r)^2$ 이다. 이 때, $p^2+q^2+r^2$ 의 값을 구하여라.

$[x^3 - y^3 + x^2y - xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + x - y]$

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^3 - y^3 + x^2y - xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + x - y$
$= (x-y)(x^2+xy+y^2) + xy(x-y) + 2(x+y)(x-y) + (x-y)$
$= (x-y)\{(x+y)^2 + 2(x+y) + 1\}$
$= (x-y)(x+y+1)^2$
$p = -1, q = 1, r = 1$
$\therefore\ p^2 + q^2 + r^2 = 3$

25. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-k$가 이차식의 완전제곱식으로 인수분해 될 때, 상수 k의 값을 정하면?

① -1　② 1　③ 0　④ 2　⑤ -2

해설

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-k$
$=(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)-k$
$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-k$
$x^2+5x=X$로 치환하면
(준식) $=(X+4)(X+6)-k$
$=X^2+10X+24-k$
완전제곱식이 되려면 $24-k=25$
$\therefore\ k=-1$

26. x^4-6x^2+1을 인수분해 하였더니 $(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$가 되었다. 이 때, $a+b+c+d$의 값을 구하면?

① -2　　② 2　　③ -1　　④ 1　　⑤ 4

해설

$x^4-6x^2+1=(x^4-2x^2+1)-4x^2$
$=(x^2-1)^2-(2x)^2$
$=(x^2+2x-1)(x^2-2x-1)$
$=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$
$\therefore\ a+b+c+d=-2$

27. x^4+3x^2+4를 바르게 인수분해한 것은?

① $(x^2+x+1)(x^2-2x+1)$ ② $(x^2+2x+2)(x^2-x+2)$

③ $(x^2-x+2)(x^2+x+2)$ ④ $(x^2+x-1)(x^2-2x+1)$

⑤ $(x^2+x-2)(x^2+x+2)$

해설

$$\begin{aligned} x^4+3x^2+4 &= (x^4+4x^2+4)-x^2 \\ &= (x^2+2)^2-x^2 \\ &= (x^2+x+2)(x^2-x+2) \end{aligned}$$

28. 0이 아닌 세 수가 있다. 이들의 합은 0, 역수의 합은 $\frac{3}{2}$, 제곱의 합은 1일 때, 이들 세 수의 세제곱의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

세 수를 x, y, z라 하면 주어진 조건으로부터

$x+y+z=0 \cdots\cdots ㉠$

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{2} \cdots\cdots ㉡$

$x^2+y^2+z^2=1 \cdots\cdots ㉢$

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$이므로

㉠, ㉢에서 $0^2=1+2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ xy+yz+zx=-\frac{1}{2} \cdots\cdots ㉣$

㉡에서 $\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{3}{2}$이므로

$3xyz=2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ xyz=-\frac{1}{3}$

또, $x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

㉠에서 $x+y+z=0$이므로

$x^3+y^3+z^3=3xyz=3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-1$

29. 삼각형의 세 변의 길이 $a,\ b,\ c$가 $b^3 - ac^2 + a^2b + ab^2 + a^3 - bc^2 = 0$ 인 관계를 만족할 때, 이 삼각형의 모양은?

① 정삼각형 ② 직각삼각형
③ 이등변삼각형 ④ 둔각삼각형
⑤ 직각이등변삼각형

해설

차수가 가장 낮은 c에 대한 내림차순으로 정리한 뒤 인수분해 한다.

$-(a+b)c^2 + a^3 + a^2b + b^3 + ab^2 = 0$

$-(a+b)c^2 + a^2(a+b) + b^2(a+b) = 0$

$-(a+b)(c^2 - a^2 - b^2) = 0$

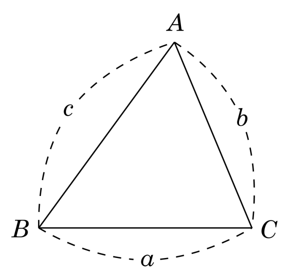
$(a+b \neq 0)$

$c^2 - a^2 - b^2 = 0$

$\therefore c^2 = a^2 + b^2$

$\therefore\ C = 90°$인 직각삼각형

30. 다음 그림과 같이 세 변의 길이가 a, b, c인 $\triangle$ABC에서 $a^3+b^3+c^3-ab(a+b)+bc(b+c)-ca(c+a)=0$이 성립할 때, $\triangle$ABC는 어떤 삼각형인가?



① $a=b$인 이등변삼각형
② $a=c$인 이등변삼각형
③ $\angle$A $=90°$인 직각삼각형
④ $\angle$B $=90°$인 직각삼각형
⑤ $\angle$C $=90°$인 직각삼각형

해설

$a^3+b^3+c^3-ab(a+b)+bc(b+c)-ca(c+a)$
$=a^3+b^3+c^3-a^2b-ab^2+b^2c+bc^2-c^2a-ca^2$
$=a^3-(b+c)a^2-(b^2+c^2)a+b^3+b^2c+bc^2+c^3$
$=a^3-(b+c)a^2-(b^2+c^2)a+b^2(b+c)+c^2(b+c)$
$=a^3-(b+c)a^2-(b^2+c^2)a+(b+c)(b^2+c^2)$
$=a^3-(b+c)a^2-(b^2+c^2)(a-b-c)$
$=(a-b-c)a^2-(b^2+c^2)(a-b-c)$
$=(a-b-c)(a^2-b^2-c^2)$
$=0$
이 때, a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로 $a \neq b+c$
$\therefore\ a^2-b^2-c^2=0$,
즉 $a^2=b^2+c^2$
따라서, $\triangle$ABC는 a를 빗변으로 하는 직각삼각형,
즉 $\angle$A $=90°$인 직각삼각형이다.

31. 삼각형의 세 변의 길이 $a,\ b,\ c$에 대하여 $(a+b-c)(a-b+c) = b(b+2c)+(c+a)(c-a)$가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 직각삼각형　　② 이등변삼각형　　③ 정삼각형
④ 예각삼각형　　⑤ 둔각삼각형

해설

$(a+b-c)(a-b+c)$
$= b(b+2c)+(c+a)(c-a)$에서
$\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\} = b^2+2bc+c^2-a^2$
$a^2-b^2+2bc-c^2 = -a^2+b^2+c^2+2bc$
$2a^2 = 2b^2+2c^2$
$\therefore\ a^2 = b^2+c^2$
따라서, 이 삼각형은 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이다.

32. $x^4+4y^4=(x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+2y^2)$ 을 이용하여 다음 식의 값을 구하면?

$$\frac{(11^4+324)(23^4+324)(35^4+324)(47^4+324)}{(5^4+324)(17^4+324)(29^4+324)(41^4+324)}$$

① 192　② 193　③ 194　④ 195　⑤ 196

해설

$x^4+4y^4=(x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+2y^2)$

$=\{(x-y)^2+y^2\}\{(x+y)^2+y^2\}$ 이고,

$324=4\times3^4$ 이므로

$11^4+324=(11^2-2\times11\times3+2\times3^2)(11^2+2\times11\times3+2\times3^2)$

$=\{(11-3)^2+3^2\}\{(11+3)^2+3^2\}$

$=(8^2+3^2)(14^2+3^2)$

따라서 차례대로 모두 정리해 보면 주어진 식은

$$\frac{\{(8^2+3^2)(14^2+3^2)\}\{(20^2+3^2)(26^2+3^2)\}}{\{(2^2+3^2)(8^2+3^2)\}\{(14^2+3^2)(20^2+3^2)\}}$$

$$\frac{\{(32^2+3^2)(38^2+3^2)\}\{(44^2+3^2)(50^2+3^2)\}}{\{(26^2+3^2)(32^2+3^2)\}\{(38^2+3^2)(44^2+3^2)\}}$$

$$=\frac{50^2+3^2}{2^2+3^2}=\frac{2509}{13}=193$$

33. 자연수 $N = 5 \cdot 29^3 + 15 \cdot 29^2 + 15 \cdot 29 + 5$의 양의 약수의 개수는?

① 20 개　② 40 개　③ 60 개　④ 80 개　⑤ 100 개

해설

주어진 N 의 값을 직접 계산하여 다시 소인수분해 하기는 너무 복잡하므로,
주어진 수들을 하나의 문자로 생각하여 5로 묶으면
$N = 5(29^3 + 3 \cdot 29^2 + 3 \cdot 29 + 1)$
$= 5(29+1)^3$
$= 5 \cdot 30^3$
$= 5 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5)^3$
$= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^4$
따라서 N 의 양의 약수의 개수는
$(3+1)(3+1)(4+1) = 80$

34. 두 다항식 x^3-2x^2-5x+6과 $3x^3+(a-9)x^2-ax-6a$의 최대공약수가 이차식일 때, a의 값은?

① 1　② -1　③ 2　④ -2　⑤ 3

해설

$x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x-3)(x+2)$
$3x^3+(a-9)x^2-ax-6a$에
$x=3$ 대입, $81+9a-81-3a-6a=0$
$x=-2$ 대입, $-24+4a-36+2a-6a\neq 0$이므로
$x-1$을 인수로 가져야 한다.
$x=1$ 대입 $3+a-9-a-6a=0$, $a=-1$

35. $f(x) = x^2 + ax + b,\ g(x) = x^2 + cx + d$가 다음 조건을 만족할 때, $ab - c + d$의 값은?

㉠ $f(x),\ g(x)$의 최소공배수는 $x^3 + 3x^2 - 13x - 15$이다.
㉡ $f(1) = -4,\ g(0) = 5$

① -31　② -11　③ 5　④ 13　⑤ 29

해설

두 다항식의 최소공배수
$x^3 + 3x^2 - 13x - 15 = (x+1)(x+5)(x-3)$에서
인수들 중 적당한 두 인수들로 $f(1) = -4$,
$g(0) = 5$이 되도록 $f(x), g(x)$를 만들면
$f(x) = (x+1)(x-3) = x^2 - 2x - 3$
$g(x) = (x+1)(x+5) = x^2 + 6x + 5$
$a = -2, b = -3, c = 6, d = 5$
$\therefore\ ab - c + d = 5$

36. 두 다항식 $f(x) = x^3+x^2+ax-3$,$g(x) = x^3-x^2+bx+3$ 의 최대공약수 $G(x)$ 가 x 의 이차식일 때, ab 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$f(x) = x^3 + x^2 + ax - 3$

$g(x) = x^3 - x^2 + bx + 3$

$f(x) - g(x) = 2x^2 + (a-b)x - 6$

$f(x) + g(x) = 2x^3 + (a+b)x$

$= x\{2x^2 + (a+b)\}$

$G(x)$ 는 $f(x) - g(x), f(x) + g(x)$ 의 공약수이다.

$\therefore\ 2x^2 + (a-b)x - 6 = 2x^2 + (a+b)$

$a - b = 0,\ a + b = -6$

$\therefore\ a = -3, b = -3$, $ab = 9$

37. 다음은 다항식 A 를 다항식 B 로 나누었을 때, 몫이 Q 이고 나머지가 R 이면, A, B 의 최대공약수는 B, R 의 최대공약수임을 보이는 과정을 나타낸 것이다.

> $A = BQ + R$ 이 성립한다. A, B 의 공약수를 g 라 하면
> $A = ag$, $B = bg$ (a, b, g 는 다항식)$\cdots$㉠로 쓸 수 있다.
> 이 때, $R = A - BQ = (a - bQ)g$ 에서 g 는 R 의 약수이다.
> $\therefore g$ 는 B, R 의 공약수이다. $\cdots$㉡
> 역으로, B, R 의 공약수를 g' 이라 하면
> $B = b'g', R = r'g'$ (b', r', g' 은 다항식)$\cdots$㉠′ 으로 쓸 수 있다.
> 이 때, $A = BQ + R = (b'Q + r')g'$ 에서 g' 은 A 의 약수이다.
> $\therefore g'$ 은 A, B 의 공약수이다. $\cdots$ ㉡′
> 이상에서 $\{g \mid g$ 는 A, B 의 공약수$\} = \{g' \mid g'$ 은 B, R 의 공약수$\}\cdots$ ㉢
> $\therefore$ A, B 의 최대공약수는 B, R 의 최대공약수이다. $\cdots$ ㉣

위 과정에서 옳지 <u>않은</u> 것은?

① ㉠, ㉠′ ② ㉡, ㉡′ ③ ㉢
④ ㉣ ⑤ 없다.

해설

유클리드의 호제법의 원리를 설명한 것으로 옳지 않은 과정은 없다.

38. $(a+b)(b+c)(c+a)+abc$를 인수분해 하면?

① $(a+b)(ab+bc+ca)$ ② $(b+c)(ab+bc+ca)$

③ $(a+b)(a+b+c)$ ④ $(a+b+c)(ab+bc+ca)$

⑤ $(b+c)(a+b+c)$

해설

$a+b+c=k$ 라 하면

(준식)$=(k-a)(k-b)(k-c)+abc$

$=k^3-(a+b+c)k^2+(ab+bc+ca)k-abc+abc$

$=k\left\{k^2-(a+b+c)k+(ab+bc+ca)\right\}$

$=(a+b+c)(ab+bc+ca)$ $(\because a+b+c=k)$

39. 다음 식 $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$의 인수가 아닌 것은?

① $a+b$ ② $b+c$ ③ $c+a$

④ $b-a$ ⑤ $-b-c$

해설

전개하여 a에 대한 내림차순으로 정리하면

$(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$

$=(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+bc(b+c)$

$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$

$=(b+c)(a+b)(a+c)$

$\therefore$ ④ $b-a$는 인수가 아니다

40. $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$ 을 인수분해 할 때, 다음 중 인수가 아닌 것은?

① $a+b$　　② $b+c$

③ $a+c$　　④ $a^2+ab+bc+ca$

⑤ $a^2+2ab+b^2$

해설

(준 식) $=\{(a+b+c)^3-a^3\}-(b^3+c^3)$

$=(a+b+c-a)\{(a+b+c)^2+(a+b+c)a+a^2\}$

$-(b+c)(b^2-bc+c^2)$

$=(b+c)(3a^2+3ab+3bc+3ca)$

$=3(b+c)(a^2+ab+bc+ca)$

$=3(b+c)\{a(a+b)+c(a+b)\}$

$=3(a+b)(b+c)(c+a)$

41. 다음 중에서 $2x^3-(4a+3)x^2+2(3a-1)x+4a$의 인수인 것은?

① $2x+1$ ② $x+2$ ③ $x+2a$
④ $x+a$ ⑤ $2x-1$

해설

$2x^3-(4a+3)x^2+2(3a-1)x+4a$
$=2x^3-4ax^2-3x^2+6ax-2x+4a$
$=(2x^3-3x^2-2x)-2a(2x^2-3x-2)$
$=x(2x^2-3x-2)-2a(2x^2-3x-2)$
$=(2x^3-3x-2)(x-2a)$
$=(x-2a)(2x+1)(x-2)$

42. $a+b+c=0,\ abc \neq 0$ 일 때, $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a^3+b^3+c^3}+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=0(\because\ a+b+c=0\ )$

$\therefore\ a^3+b^3+c^3=3abc$

$\therefore(\text{준식})=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3abc}+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{bc+ca+ab}{abc}\right)$

$=\dfrac{(a+b+c)^2}{3abc}=0$

43. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 에 대하여 $\frac{a-b+c}{a+b+c}=\frac{-a-b+c}{a-b-c}$ 일 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

㉠ 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형 ㉡ 빗변의 길이가 b 인 직각삼각형 ㉢ 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형 ㉣ $a=b$ 인 이등변삼각형 ㉤ $b=c$ 인 이등변삼각형

① 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형

② 빗변의 길이가 b 인 직각삼각형

③ 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형

④ $a=b$ 인 이등변삼각형

⑤ $b=c$ 인 이등변삼각형

해설

$\frac{a-b+c}{a+b+c}=\frac{-a-b+c}{a-b-c}$ 에서

$(a-b+c)(a-b-c)=(a+b+c)(-a-b+c)$

$(a-b+c)(a-b-c)+(a+b+c)(a+b-c)=0$

$\{(a-b)+c\}\{(a-b)-c\}+\{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}=0$

$(a-b)^2-c^2+(a+b)^2-c^2=0$

$a^2-2ab+b^2-c^2+a^2+2ab+b^2-c^2$

$=2a^2+2b^2-2c^2$

$=2(a^2+b^2-c^2)=0$

$\therefore a^2+b^2-c^2=0$

그러므로 이 삼각형은 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형이다.

44. $10^{20}-4$ 과 $10^{30}-8$ 의 최대공약수는 몇 자리의 자연수인가?

① 10자리　② 11자리　③ 12자리　④ 13자리　⑤ 14자리

해설

$$10^{20}-4=(10^{10})^2-2^2$$
$$=\left(10^{10}-2\right)\left(10^{10}+2\right)$$
$$10^{30}-8=(10^{10})^3-2^3$$
$$=\left(10^{10}-2\right)\left(10^{20}+10^{10}\times 2+4\right)$$

$\therefore$ 최대 공약수는 $2\left(10^{10}-2\right)=2\cdot 10^{10}-4$

$\therefore$ 11자리수

45. 실수 a, b, c에 대하여 $a+b=-\sqrt{2}$, $b+c=\sqrt{2}$일 때, $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3-3(a-b)(b-c)(c-a)$의 값은?

① 0　　② $\sqrt{2}$　　③ $-\sqrt{2}$　　④ 2　　⑤ -2

해설

$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3-3(a-b)(b-c)(c-a)$

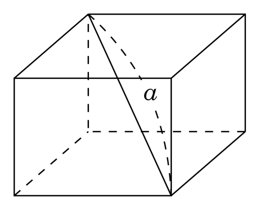
$=\left\{(a-b)+(b-c)+(c-a)\right\}$

$\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

$-(a-b)(b-c)-(b-c)(c-a)-(c-a)(a-b)\}$

$=0$

46. 다음 그림과 같은 직육면체에서 대각선의 길이가 a이고, 모든 모서리의 길이의 합이 b일 때, 이 직육면체의 겉넓이는?



① $\frac{1}{16}b^2 - a^2$　② $\frac{1}{8}b^2 - a^2$　③ $\frac{1}{4}b^2 - a^2$
④ $\frac{1}{8}b^2 + a^2$　⑤ $\frac{1}{16}b^2 + a^2$

해설

가로, 세로의 길이와 높이를 각각 $x,\ y,\ z$라 하면
$4(x+y+z) = b,\ \sqrt{x^2+y^2+z^2} = a$
$\therefore\ x+y+z = \frac{1}{4}b,\ x^2+y^2+z^2 = a^2$
따라서, 구하는 직육면체의 겉넓이는

$$\begin{aligned}2(xy+yz+zx) &= (x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2)\\ &= \left(\frac{1}{4}b\right)^2 - a^2\\ &= \frac{1}{16}b^2 - a^2\end{aligned}$$

47. 어느 회사의 A 공장과 B 공장에서는 각각 모니터와 스피커를 만들고 있다. 하루에 A 공장에서는 모니터를 400 대, B 공장에서는 스피커를 10000 대 만든다. 모니터는 20000 대, 스피커는 80000 대가 만들어지면 본사 창고로 운반한다. 두 제품이 같은 날 창고에 운반되면 인력이 부족하여 용역회사에서 인력을 구하여야 한다. 이 때, 용역회사에서 평일은 50,000 원, 주말에는 70,000 원을 지불한다. 2008 년 4 월 1 일 목요일 처음으로 모니터를, 다음날 스피커를 운반하였다. 2008 년 연말까지 용역회사에서 지불할 금액을 구하여라.

▶ 답: ______ 원

▷ 정답: 390000 원

해설

4 월 1 일, 4 월 2 일 $\cdots$ 을 각각 1, 2$\cdots$ 라 하면
12 월 31 일은 275 이다.
모니터가 운반되는 날이 $5a+1$ 이고
스피커가 운반되는 날이 $8b+2$ 이면,
같은 날 창고에 운반 $\rightarrow 5a+1=8b+2$
$b=5k+1,\ 5k+2,\ 5k+3,\ 5k+4$ 를 대입하면
$b=5k+3$ 일 때, 성립한다.
그러므로 같은날 운반되는 경우
$\rightarrow 40k+26\ (k=0,\ 1,\ 2\cdots)$ 이다.
금년에 같은 날 운반
26, 66, 106, 146, 186, 226, 266 이고,
이들 중 평일은 5 일, 주말은 2 일 이므로
$(50000\times 5)+(70000\times 2)\ =\ 250000+140000\ =\ 390000$

48. x에 대한 두 다항식 $A = x(x-a-4)(x+a^2-1)$, $B = (x+3)(x+a)(x+a^2-5)$의 최대공약수가 x에 대한 이차식이 되도록 하는 정수 a에 대하여 a^2+a의 값을 구하면?

① 20　② 16　③ 10　④ 5　⑤ 2

해설

i) A의 인수 x를 최대공약수의 인수라고 하면
B에서 $x=0$을 대입하면
$3a(a^2-5)=0$, $a=0$($\because a$가 정수)
$\Rightarrow$두 식의 최대공약수는 이차가 아니다.
ii) B의 인수 $x+3$이 최대공약수의 인수라고 하면
A에서 $x=-3$을 대입하면
$-3(-a-7)(a^2-4)=0$, $a=-7, 2, -2$
$a=-7, 2$일 때 A, B의 최대공약수는 일차식
$a=-2$일 때
즉, $(x+3)(x-2)$가 최대공약수가 이차식이다.
$\therefore\ a=-2,\ a^2+a=2$

49. 두 다항식 $x^3 - ax^2 - bx + 1$, $x^3 + bx^2 + ax + 1$의 최대공약수가 x에 대한 일차식일 때, 상수 a, b에 대하여 $a - b$의 값은?

① -2 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

최대공약수를 $(x-\alpha)$라 하자. 인수정리에 의해

$\alpha^3 - a\alpha^2 - b\alpha + 1 = 0 \quad \cdots$ ①

$\alpha^3 + b\alpha^2 + a\alpha + 1 = 0 \quad \cdots$ ②

②–① $= (b+a)\alpha^2 + (a+b)\alpha$

$\qquad = (a+b)\alpha(\alpha+1) \cdots\cdots$ ③

$a + b = 0$이면 두 다항식이 같아지므로 조건에 맞지 않는다

③에서 $\alpha(\alpha+1) = 0 \quad \therefore \quad \alpha = 0$ 또는 -1

i) $\alpha = 0$ 을 ①에 대입 : $1 = 0 \Rightarrow$ 성립하지 않는다.

ii) $\alpha = -1$ 을 ①에 대입 : $-1 - a + b + 1 = 0$

$\therefore \quad a - b = 0$

50. 다항식 $A(x) = x^3 + px^2 + 3x + 1$을 다항식 $B(x) = x^2 + qx + 3$으로 나눈 나머지를 $R(x)$라 하자. $B(x)$와 $R(x)$ 의 최대공약수가 $x - 1$일 때, $R(2)$ 의 값은?

① -6　② -4　③ 4　④ 6　⑤ 8

해설

$A = BQ + R$에서 $A,\ B$ 의 $G.C.M.$과 $B,\ R$의 $G.C.M.$은 일치한다.
($\Leftarrow$ *Euclid* 호제법)
그러므로 $x - 1$은 $A(x),\ B(x)$의 공약수이다.
$\therefore\ A(1) = 0$ 에서 $p = -5$,
$B(1) = 0$에서 $q = -4$
$x^3 - 5x^2 + 3x + 1 = (x^2 - 4x + 3)Q(x) + a(x - 1)$
양변에 $x = 3$을 대입하면 $-8 = 2a\ \ \therefore\ a = -4$
$\therefore\ R(x) = -4(x - 1)\quad \therefore\ R(2) = -4$