1. 다항식 $8x^3-1$을 $4x^2+2x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 할 때 $Q(x)$의 상수항의 계수는?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$8x^3-1=(2x)^3-1^3=(2x-1)\left(4x^2+2x+1\right)$

$\therefore Q(x)=2x-1$

$\therefore$ 상수항은 -1

2. 다음 중 $a^3 - b^2c - ab^2 + a^2c$ 의 인수인 것은?

① $a - b + c$ ② $c - a$ ③ $b + c$
④ $a - b$ ⑤ $c - b + a$

해설

$$\begin{aligned} a^3 - b^2c - ab^2 + a^2c &= a^3 - ab^2 + a^2c - b^2c \\ &= a(a^2 - b^2) + (a^2 - b^2)c \\ &= (a - b)(a + b)(a + c) \end{aligned}$$

3. x^2-2x-y^2+2y를 인수분해하였더니, $(x+ay)(x-by+c)$가 되었다. 이 때, $a,\ b,\ c$를 순서대로 쓴 것은?

① $-1,\ 0,\ 1$ ② $-1,\ 1,\ 2$ ③ $-2,\ -1,\ 1$
④ $-1,\ -1,\ -2$ ⑤ $-1,\ 2$

해설

$$x^2-2x-y^2+2y=(x+y)(x-y)-2(x-y)$$
$$=(x-y)(x+y-2)$$
$\therefore\ a=-1,\ b=-1,\ c=-2$

4. $(a-b+c)(a+b-c)$를 전개한 식은?

① $a^2+b^2+c^2-2bc$ ② $a^2-b^2+c^2-2bc$
③ $a^2-b^2-c^2+2bc$ ④ $a^2+b^2-c^2-2bc$
⑤ $a^2+b^2+c^2+2bc$

해설

$(a-b+c)(a+b-c)$
$=\{a-(b-c)\}\{a+(b-c)\}$
$=a^2-(b-c)^2$
$=a^2-b^2-c^2+2bc$

5. $(x^4 - 8x^2 - 9) \div (x^2 - 9)$ 를 계산하여라.

① $x^2 + 1$ ② $x^2 - 1$ ③ $x^2 + 2$
④ $x^2 - 2$ ⑤ $x^2 + 3$

해설
$x^4 - 8x^2 - 9 = (x^2 - 9)(x^2 + 1)$
$\therefore$ (준식)$= x^2 + 1$

6. 다항식 $(x-1)^3+27$을 바르게 인수분해한 것은?

① $(x-1)(x^2+3)$
② $(x-1)(x^2-x-2)$
③ $(x-1)(x^2+3x+3)$
④ $(x+2)(x^2+x+7)$
⑤ $(x+2)(x^2-5x+13)$

해설

$x-1$을 A로 치환하면
준 식 $=A^3+27=(A+3)(A^2-3A+9)$
다시 $x-1$을 대입하면 $(x+2)(x^2-5x+13)$

7. $x^4+3x^2+4=(x^2+x+2)(x^2+ax+b)$ 일 때, 상수 a, b 의 곱을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

(좌 변) $=(x^2+2)^2-x^2$

$=(x^2+x+2)(x^2-x+2)$

$\therefore\ a=-1,\ b=2$

$\therefore ab=-1\times 2=-2$

8. 다음 중 다항식 x^4-8x^2-9의 인수가 아닌 것은?

① $x-3$　② $x+3$
③ x^2+1　④ x^2+9
⑤ x^3+3x^2+x+3

해설

준 식을 인수분해 하면

$$x^4-8x^2-9=(x^2+1)(x^2-9)$$
$$=(x^2+1)(x+3)(x-3)$$

⑤ $x^2(x+3)+x+3=(x^2+1)(x+3)$

9. 등식 $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x+a)(x+b)(x+c)$ 일 때, $a+b+c$ 의 값은?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

해설

조립제법을 사용한다

$$
\begin{array}{r|rrrr}
1 & 1 & 4 & 1 & -6 \\
 & & 1 & 5 & 6 \\
\hline
-2 & 1 & 5 & 6 & \boxed{0} \\
 & & -2 & -6 & \\
\hline
-3 & 1 & 3 & \boxed{0} & \\
 & & -3 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}
$$

$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x-1)(x+2)(x+3)$

$\therefore a+b+c = 4$

10. x에 대한 다항식 x^3-2x^2-x+2가 $(x+a)(x+b)(x+c)$로 인수분해 될 때, $a^2+b^2+c^2$의 값은? (단, a, b, c는 상수)

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$x^3-2x^2-x+2=(x+1)(x-1)(x-2)$

$a^2+b^2+c^2=(-1)^2+1^2+2^2=6$

11. 두 다항식 $2x^2+2x-4$와 $4x^3-4$에 관한 설명이다. 옳지 <u>않은</u> 것을 고르면?

① 두 다항식은 $(x-1)$로 나누어 떨어지므로, $(x-1)$은 두 다항식의 공약수이다.

② 두 다항식은 공약수가 있으므로 서로소가 아니다.

③ $4(x-1)^3(x+2)^2(x^2+x+1)$은 두 다항식의 공배수이다.

④ 두 다항식의 최대공약수는 $2(x-1)$이다.

⑤ 두 다항식의 최소공배수는 $(x+2)(x-1)^2(x^2+x+1)$이다.

해설

$2x^2+2x-4=2(x-1)(x+2)$
$4x^3-4=4(x-1)(x^2+x+1)$
최대공약수 : $2(x-1)$
최소공배수 : $4(x-1)(x+2)(x^2+x+1)$

12. 두 다항식 $3x^4-2x^3-9x^2+4$, $3x^3-3x^2-6x$의 최대공약수를 구하면?

① $(x-1)(x-2)$　② $(x+1)(x+2)$　③ $(x+1)(x-2)$
④ $(x-1)(x-2)$　⑤ $(x+1)(x-1)$

해설

$3x^4-2x^3-9x^2+4$
$=(x+1)(x-2)(x+1)(3x-2)$
$3x^3-3x^2-6x=3x(x-2)(x+1)$
$\therefore$ 최대공약수 : $(x-2)(x+1)$

13. 두 다항식 x^3-3x^2+2x, $x^4-4x^3+4x^2$ 의 최대공약수와 최소공배수를 각각 $f(x), g(x)$ 라 할 때, $f(3)+g(3)$ 의 값을 구하면?

① 18　② 19　③ 20　④ 21　⑤ 22

해설

$x^3-3x^2+2x = x(x-2)(x-1)$

$x^4-4x^3+4x^2 = x^2(x-2)^2$

$\therefore f(x) = x(x-2), g(x) = x^2(x-1)(x-2)^2$

$\therefore f(3)+g(3) = 3+18 = 21$

14. 두 다항식 $x^2-4x+3a+b$와 x^2+bx-6의 최대공약수가 $x-2$일 때, $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 8

해설

$f(x)=x^2-4x+3a+b$,
$g(x)=x^2+bx-6$이라 하면
$f(x)$와 $g(x)$는 모두 $x-2$로 나누어떨어지므로
$f(2)=g(2)=0$에서
$f(2)=4-8+3a+b=0$, $g(2)=4+2b-6=0$
$\therefore\ a=1,\ b=1 \therefore\ a+b=2$

15. 두 다항식 x^2+ax+b, $x^2+3bx+2a$의 최대공약수가 $x-1$일 때, $a+b$의 값을 구하면?

① 2 ② 1 ③ 0 ④ −1 ⑤ −2

해설

최대공약수가 $x-1$이므로
x^2+ax+b와 $x^2+3bx+2a$는
모두 $x-1$로 나누어 떨어져야 한다.
$\therefore\ 1+a+b=0$이고 $1+3b+2a=0$
따라서, $a=-2,\ b=1$
$\therefore\ a+b=-1$

16. 다음 중 $(x+y)^3-8y^3$ 의 인수인 것은?

① $x^2-2xy-4y^2$　② $x^2-2xy+4y^2$　③ $x^2+2xy+4y^2$
④ $x^2-4xy-7y^2$　⑤ $x^2+4xy+7y^2$

해설

(준식)$=(x+y)^3-(2y)^3$
$=\{(x+y)-2y\}\{(x+y)^2+(x+y)2y+(2y)^2\}$
$=(x-y)(x^2+2xy+y^2+2xy+2y^2+4y^2)$
$=(x-y)(x^2+4xy+7y^2)$

17. x에 대한 다항식 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+a$가 x에 대한 완전제곱식으로 인수분해 될 때, 정수 a의 값은?

① -5　② -3　③ -1　④ 1　⑤ 3

해설

(준식) $= (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+a$

$\quad = (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+a$

$x^2+5x+4 = Y$로 치환하면

(준식) $= Y(Y+2)+a$

$\quad = Y^2+2Y+a$

$\therefore$ 완전제곱식이 되려면 $a=1$

18. x^4-3x^2+1을 인수분해 하면?

① $(x^2+x-1)(x^2-x-1)$　② $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$
③ $(x^2+2x-1)(x^2-x-1)$　④ $(x^2+x-1)(x^2-2x-1)$
⑤ $(x^2+x+1)(x^2-2x+1)$

해설

$$\begin{aligned} x^4-3x^2+1 &= x^4-2x^2+1-x^2 \\ &= (x^2-1)^2-x^2 \\ &= (x^2+x-1)(x^2-x-1) \end{aligned}$$

19. x^4+4y^4 의 인수인 것은?

① x^2+y^2 ② x^2+2y^2 ③ $x^2+xy+2y^2$
④ $x^2-xy+2y^2$ ⑤ $x^2+2xy+2y^2$

해설

$$\begin{aligned} x^4+4y^4 &= x^4+4x^2y^2+4y^4-4x^2y^2 \\ &= (x^2+2y^2)^2-(2xy)^2 \\ &= (x^2+2xy+2y^2)(x^2-2xy+2y^2) \end{aligned}$$

20. $1-4x^2-y^2+4xy=(1+ax+by)(1+cx+dy)$ 일 때, $ac+bd$ 의 값을 구하면?

① -6　　② -5　　③ -4　　④ -3　　⑤ -2

해설

(준식) $= 1-(4x^2-4xy+y^2)$

$= 1^2-(2x-y)^2$

$= (1+2x-y)(1-2x+y)$

$\therefore\ a=2,\ b=-1,\ c=-2,\ d=1$

$\therefore\ ac+bd=2\times(-2)+(-1)\times 1=-5$

21. 다음 중 $2x^2 - xy - y^2 - 4x + y + 2$의 인수인 것은?

① $2x + y - 2$ ② $2x - y + 2$ ③ $x - y + 1$

④ $x + y - 1$ ⑤ $x - 2y - 1$

해설

x에 대한 내림차순으로 정리하면

$2x^2 - (y+4)x - y^2 + y + 2$

$= 2x^2 - (y+4)x - (y+1)(y-2)$

$= \{2x + (y-2)\}\{x - (y+1)\}$

$= (2x + y - 2)(x - y - 1)$

22. $2x^2+xy-3y^2+5x+5y+2$를 인수분해 하면$(x+ay+b)(2x+cy+d)$이다. 이 때, $a+b+c+d$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$2x^2+xy-3y^2+5x+5y+2$

$=2x^2+(y+5)x-3y^2+5y+2$

$=2x^2+(y+5)x-(y-2)(3y+1)$

$=\{x-(y-2)\}\{2x+(3y+1)\}$

$=(x-y+2)(2x+3y+1)$

$\therefore\ a=-1, b=2, c=3, d=1$

23. 다항식 $P(x) = x^4 + 2x^3 + kx^2 - 2x + 8$가 $x - 1$로 나누어 떨어지도록 상수 k의 값을 정할 때 다음 중 $P(x)$의 인수가 아닌 것은?

① $x - 1$　② $x + 1$　③ $x - 2$　④ $x + 2$　⑤ $x + 4$

해설

$P(x) = (x-1)Q(x)$

$\therefore\ P(1) = 1 + 2 + k - 2 + 8 = 0$

$\therefore\ k = -9$

$$\begin{aligned}\therefore\ P(x) &= x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 2x + 8 \\ &= (x-1)(x-2)(x+1)(x+4)\end{aligned}$$

24. $(2^{48}-1)$ 은 60 과 70 사이의 어떤 두 수로 나누어 떨어진다. 이 두 수는?

① 61, 63 ② 61, 65 ③ 63, 65
④ 63, 67 ⑤ 67, 69

해설

$$2^{48}-1=(2^6-1)(2^6+1)(2^{12}+1)(2^{24}+1)$$
$$=63\cdot 65\cdot(2^{12}+1)(2^{24}+1)$$

따라서 $2^{48}-1$ 은 63 과 65 로 나누어 떨어진다.

25. $\dfrac{100^3-1}{101\times100+1}$ 의 값을 구하면?

① 99　　② 100　　③ 101　　④ 102　　⑤ 103

해설

$a=100$ 이라 하면

$$\frac{a^3-1}{(a+1)a+1}=\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{(a^2+a+1)}$$
$$=a-1=99$$

26. $\dfrac{2012^3+1}{2012\times2011+1}$ 의 값을 a라 할 때, $\dfrac{a+1}{a-1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{1007}{1006}$

해설

$a=\dfrac{(2012+1)(2012^2-2012+1)}{(2012^2-2012+1)}$

$=2013$ 이므로

$\therefore\ \dfrac{a+1}{a-1}=\dfrac{2013+1}{2013-1}=\dfrac{2014}{2012}=\dfrac{1007}{1006}$

27. $a+b+c=4$, $ab+bc+ca=3$, $abc=1$ 일 때, $a^3+b^3+c^3$ 의 값을 구하면?

① 30 ② 31 ③ 32 ④ 33 ⑤ 34

해설

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$
위 식에 따라 $a^2+b^2+c^2+6=16$
$\therefore\ a^2+b^2+c^2=10$
$a^3+b^3+c^3$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$
$=4\times(10-3)+3\times 1$
$=31$

28. $x+y+z=1$, $xy+yz+zx=2$, $xyz=3$일 때, $(x+y)(y+z)(z+x)$의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$x+y+z=1$을 변형하면

(준식) $=(1-z)(1-x)(1-y)$

$=1-(x+y+z)+(xy+yz+zx)-xyz$

$=1-1+2-3=-1$

29. $x^4+2x^2+9=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$로 인수분해될 때, $|ab-cd|$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 12

해설

(준식) $=(x^2+3)^2-(2x)^2$

$=(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$

여기서 계수를 비교하면

$a=2,\ b=3,\ c=-2,\ d=3$

$\therefore |ab-cd|=|2\times3-(-2)\times3|=12$

30. 두 이차 다항식 $f(x)$, $g(x)$의 최대공약수가 $x+2$, 최소공배수가 x^3+2x^2-x-2일 때, $f(x)+g(x)$를 구하면?

① $2x^2+5x+2$　② $2x^2+3x-2$　③ $2x^2+4x$
④ $2x^2+2x-4$　⑤ $2x^2+6x+4$

해설

$x^3+2x^2-x-2=(x-1)(x+1)(x+2)$
$f(x)=(x+1)(x+2)$, $g(x)=(x-1)(x+2)$ 또는 $f(x)=(x-1)(x+2)$, $g(x)=(x+1)(x+2)$

$$\begin{aligned} f(x)+g(x) &= x^2+3x+2+x^2+x-2 \\ &= 2x^2+4x \end{aligned}$$

31. 이차항의 계수가 1인 두 다항식의 최대공약수가 $x-1$이고, 최소공배수가 x^3+x^2-2x일 때, 두 이차식의 합을 구하면?

① $2x^2-1$　　② $2x^2-2$　　③ $2x^2-3$

④ $2x^2+1$　　⑤ $2x^2+2$

해설

두 다항식은 $(x-1)a, (x-1)b$ (a, b는 서로소)

$x^3+x^2-2x=(x-1)ab=x(x+2)(x-1)$

두 다항식은 $x(x-1), (x+2)(x-1)$

$\therefore$두식의 합은 $2x^2-2$

32. 두 다항식 A, B에 대하여 $A = x^2 + ax + 2,\ B = x^2 + bx + c$이고 A, B의 최대공약수가 $x+1$, 최소공배수가 $x^3 + 2x^2 - x - 2$일 때, $a+b+c$의 값은 ?

① -1　　② 0　　③ 2　　④ -2　　⑤ 3

해설

$A = m(x+1),\ B = n(x+1)$이라 놓으면

$mn(x+1) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

$\therefore\ mn = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$

$\therefore\ m = x+2,\ n = x-1$ 또는 $m = x-1,\ n = x+2$

$A = (x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2$

$B = (x+1)(x-1) = x^2 - 1$

여기서, $a = 3,\ b = 0,\ c = -1$

$\therefore\ a+b+c = 2$

33. 두 이차식의 합이 $2x^2 - x - 6$이고, 최소공배수가 $x^3 + x^2 - 4x - 4$일 때, 두 이차식의 최대공약수는?

① $x-1$ ② $x+1$ ③ $x-2$ ④ $x+2$ ⑤ $x+3$

해설

최대공약수는 합과 최소공배수의 공통인수
$2x^2 - x - 6 = (x-2)(2x+3)$
$x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x-2)(x+2)(x+1)$

34. 최고차항의 계수가 1 인 두 다항식 $f(x), g(x)$ 의 곱이 $x^3 + x^2 - 5x + 3$ 이고, 최소공배수가 $x^2 + 2x - 3$ 일 때, $f(2) + g(2)$ 의 값을 구하면?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$f(x)g(x) = (x-1)^2(x+3)$,
$L = (x-1)(x+3)$ 이므로
$f(x) = (x-1),\ g(x) = (x-1)(x+3)$
(또는 그 반대일 수 있으나 문제 의도상 상관없음)
$\therefore\ f(2) + g(2) = 1 + 5 = 6$

35. 두 다항식 A, B의 최대공약수 G를 $A * B$, 최소공배수 L을 $A \bigstar B$로 나타내기로 할 때, $(A^2 * B^2) \bigstar (A^2 * AB)$와 같은 것은?

① AG ② A ③ AL ④ AB ⑤ I

해설

$A = Ga,\ B = Gb$(a, b는 서로소)로 놓으면

$(A^2 * B^2) \bigstar (A^2 * AB)$

$= (G^2a^2 * G^2b^2) \bigstar (G^2a^2 * G^2ab)$

$= G^2 \bigstar G^2a$

$= G^2a$

$= AG$

36. 1999 개의 다항식 x^2-2x-1, x^2-2x-2, $\cdots$, $x^2-2x-1999$ 중에서 계수가 정수인 일차식의 곱으로 인수분해 되는 것은 모두 몇 개인가?

① 43 개 ② 44 개 ③ 45 개 ④ 46 개 ⑤ 47 개

해설

$x^2-2x-n=(x+a)(x-b)$ (a, b 는 자연수) 라 하면 ($1 \le n \le 1999$ 인 자연수)

$ab=n$, $a=b-2$

$\therefore n=1\cdot 3,\ 2\cdot 4,\ 3\cdot 5,\ \cdots,\ 43\cdot 45(=1935)$ 의 43 개

37. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-k$가 이차식의 완전제곱식으로 인수분해될 때, 상수 k의 값을 정하면?

① -1　② 1　③ 0　④ 2　⑤ -2

해설

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-k$
$=(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)-k$
$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-k$
$x^2+5x=X$로 치환하면
(준식) $=(X+4)(X+6)-k$
$=X^2+10X+24-k$
완전제곱식이 되려면 $24-k=25$
$\therefore\ k=-1$

38. x^4+3x^2+4를 바르게 인수분해한 것은?

① $(x^2+x+1)(x^2-2x+1)$ ② $(x^2+2x+2)(x^2-x+2)$
③ $(x^2-x+2)(x^2+x+2)$ ④ $(x^2+x-1)(x^2-2x+1)$
⑤ $(x^2+x-2)(x^2+x+2)$

해설

$$\begin{aligned} x^4+3x^2+4 &= (x^4+4x^2+4)-x^2 \\ &= (x^2+2)^2-x^2 \\ &= (x^2+x+2)(x^2-x+2) \end{aligned}$$

39. 0이 아닌 세 수가 있다. 이들의 합은 0, 역수의 합은 $\frac{3}{2}$, 제곱의 합은 1일 때, 이들 세 수의 세제곱의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

세 수를 x, y, z라 하면 주어진 조건으로부터

$x+y+z=0 \cdots\cdots$ ㉠

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{2} \cdots\cdots$ ㉡

$x^2+y^2+z^2=1 \cdots\cdots$ ㉢

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$이므로

㉠, ㉢에서 $0^2=1+2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ xy+yz+zx=-\frac{1}{2} \cdots\cdots$ ㉣

㉡에서 $\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{3}{2}$이므로

$3xyz=2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ xyz=-\frac{1}{3}$

또, $x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

㉠에서 $x+y+z=0$이므로

$x^3+y^3+z^3=3xyz=3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-1$

40. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여 $(a+b-c)(a-b+c) = b(b+2c)+(c+a)(c-a)$가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 직각삼각형 ② 이등변삼각형 ③ 정삼각형
④ 예각삼각형 ⑤ 둔각삼각형

해설

$(a+b-c)(a-b+c)$
$= b(b+2c)+(c+a)(c-a)$ 에서
$\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\} = b^2+2bc+c^2-a^2$
$a^2-b^2+2bc-c^2 = -a^2+b^2+c^2+2bc$
$2a^2 = 2b^2+2c^2$
$\therefore\ a^2 = b^2+c^2$
따라서, 이 삼각형은 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이다.

41. 자연수 $N = 5 \cdot 29^3 + 15 \cdot 29^2 + 15 \cdot 29 + 5$ 의 양의 약수의 개수는?

① 20 개 ② 40 개 ③ 60 개

④ 80 개 ⑤ 100 개

해설

주어진 N 의 값을 직접 계산하여 다시 소인수분해 하기는 너무 복잡하므로,
주어진 수들을 하나의 문자로 생각하여 5로 묶으면

$N = 5(29^3 + 3 \cdot 29^2 + 3 \cdot 29 + 1)$

$= 5(29+1)^3$

$= 5 \cdot 30^3$

$= 5 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5)^3$

$= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^4$

따라서 N 의 양의 약수의 개수는

$(3+1)(3+1)(4+1) = 80$

42. 모든 모서리의 길이의 합이 60이고, 대각선의 길이가 $\sqrt{77}$인 직육면체의 겉넓이는?

① 88 ② 100 ③ 124 ④ 148 ⑤ 160

해설

직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 x, y, z라고 하면

$4(x+y+z)=60$에서 $x+y+z=15$

또, 대각선의 길이는

$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{77}$이므로

$x^2+y^2+z^2=77$

이 때, 직육면체의 겉넓이는 $2(xy+yz+zx)$이고

$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$이므로

$77=15^2-2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ 2(xy+yz+zx)=225-77=148$

따라서, 직육면체의 겉넓이는 148이다.

43. 두 실수 a, b에 대하여 $[a, b] = a^2 - b^2$라 할 때, $[x^2,\ x-1] + [2x+1,\ 3] + [0,\ 1]$을 인수분해하면 $(x-a)(x^3+x^2+bx+c)$이다. 이 때, 상수 a, b, c의 합 $a+b+c$의 값은?

① 5　② 10　③ 15　④ 20　⑤ 25

해설

$[x^2,\ x-1] + [2x+1,\ 3] + [0,\ 1]$
$= x^4 - (x-1)^2 + (2x+1)^2 - 9 + 0 - 1$
$= x^4 - x^2 + 2x - 1 + 4x^2 + 4x + 1 - 10$
$= x^4 + 3x^2 + 6x - 10$
$= (x-1)(x^3 + x^2 + 4x + 10)$
$= (x-a)(x^3 + x^2 + bx + c)$
따라서, $a = 1,\ b = 4,\ c = 10$이므로
$a + b + c = 15$

44. $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = x^2 + cx + d$가 다음 조건을 만족할 때, $ab - c + d$의 값은?

㉠ $f(x)$, $g(x)$의 최소공배수는 $x^3 + 3x^2 - 13x - 15$이다.
㉡ $f(1) = -4$, $g(0) = 5$

① -31 ② -11 ③ 5 ④ 13 ⑤ 29

해설

두 다항식의 최소공배수
$x^3 + 3x^2 - 13x - 15 = (x+1)(x+5)(x-3)$에서
인수들 중 적당한 두 인수들로 $f(1) = -4$,
$g(0) = 5$이 되도록 $f(x), g(x)$를 만들면
$f(x) = (x+1)(x-3) = x^2 - 2x - 3$
$g(x) = (x+1)(x+5) = x^2 + 6x + 5$
$a = -2, b = -3, c = 6, d = 5$
$\therefore\ ab - c + d = 5$

45. 다음은 유클리드 호제법 '두 다항식 A, B 에 대하여 A 를 B 로 나눈 나머지를 R 라 하면 A 와 B 의 최대공약수는 B 와 R 의 최대공약수와 같다.' 를 보이는 과정이다.

> A, B 의 최대공약수를 G 라 하면,
> $A = Ga$, $B = Gb$ (단, a, b 는 서로소) 로 나타낼 수 있다.
> A 를 B 로 나눈 몫을 Q 라 하면
> $A = BQ + R$ 에서 $Ga = GbQ + R$
> $\therefore\ R = G(a - bQ)$
> 즉, G 는 B 와 R 의 (가) 이다.
> 한편, b 와 $a - bQ$ 가 (나) 가 아니라면
> (가) m (일차이상의 다항식) 이 존재하여
> $b = mk$, $a - bQ = mk'$ 이 성립한다.
> $a = mk' + bQ = mk' + mkQ = m(k' + kQ)$
> 즉, a 와 b 의 (가) m 이 존재하므로
> a 와 b 가 서로소라는 가정에 모순이다.
> 따라서 b 와 $a - bQ$ 는 (나) 이다.
> $B = Gb$, $R = G(a - bQ)$ 에서
> b 와 $a - bQ$ 가 (나) 이므로 B 와 R 의 최대공약수는 A 와 B 의 최대공약수 G 와 같다.

(　) 안의 (가), (나) 에 알맞은 것은?

① 공약수, 공약수　　② 공약수, 서로소
③ 공약수, 공배수　　④ 공배수, 서로소
⑤ 공배수, 공약수

해설

A, B 의 최대공약수를 G 라 하면
$A = Ga$, $B = Gb$ (단, a, b 는 서로소) 이고,
A 를 B 로 나눈 몫을 Q 라 하면
$A = BQ + R$ 에서 $Ga = GbQ + R$
$\therefore\ R = (a - bQ)G$
즉, G 는 B 와 R 의 공약수이다.
한편, b 와 $a - bQ$ 가 서로소가 아니라면
공약수인 m 이 존재하여
$b = mk$, $a - bQ = mk'$
$a = mk' - kQ = mk' + mkQ = m(k' + kQ)$
즉, a 와 b 의 공약수 m 이 존재하므로 a 와 b 가 서로소라는 것에 모순된다.
따라서 b 와 $a - bQ$ 는 서로소이다.
$B = Gb$, $R = G(a - bQ)$ 에서 a 와 $a - bQ$ 가 서로소이므로 B 와 R 의 최대공약수는 A 와 B 의 최대공약수와 같다.

46. $\dfrac{bx(a^2x^2+2a^2y^2+b^2y^2)}{bx+ay}+\dfrac{ay(a^2x^2+2b^2x^2+b^2y^2)}{bx+ay}$ 을 간단히 하면?

① $a^2x^2+b^2y^2$
② $(ax+by)^2$
③ $(bx+ay)^2$
④ $2(a^2x^2+b^2y^2)$
⑤ $(ax+by)(bx+ay)$

해설

(분자)$= bx(a^2x^2+2a^2y^2+b^2y^2)+ay(a^2x^2+2b^2x^2+b^2y^2)$
$= bx(a^2x^2+b^2y^2)+2a^2bxy^2+ay(a^2x^2+b^2y^2)+2ab^2x^2y$
$= (a^2x^2+b^2y^2)(bx+ay)+2abxy(ay+bx)$
$= (bx+ay)(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)$
$= (bx+ay)(ax+by)^2$
따라서, (준 식)$= (ax+by)^2$

47. 다음 식 $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$의 인수가 아닌 것은?

① $a+b$ ② $b+c$ ③ $c+a$
④ $b-a$ ⑤ $-b-c$

해설
전개하여 a에 대한 내림차순으로 정리하면
$(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$
$=(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+bc(b+c)$
$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$
$=(b+c)(a+b)(a+c)$
$\therefore$ ④ $b-a$는 인수가 아니다

48. $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$을 인수분해 할 때, 다음 중 인수가 <u>아닌</u> 것은?

① $a+b$　　② $b+c$

③ $a+c$　　④ $a^2+ab+bc+ca$

⑤ $a^2+2ab+b^2$

해설

(준 식) $= \{(a+b+c)^3 - a^3\} - (b^3+c^3)$

$= (a+b+c-a)\{(a+b+c)^2 + (a+b+c)a + a^2\}$

$-(b+c)(b^2-bc+c^2)$

$= (b+c)(3a^2+3ab+3bc+3ca)$

$= 3(b+c)(a^2+ab+bc+ca)$

$= 3(b+c)\{a(a+b)+c(a+b)\}$

$= 3(a+b)(b+c)(c+a)$

49. x에 대한 두 다항식 $A = x(x-a-4)(x+a^2-1)$, $B = (x+3)(x+a)(x+a^2-5)$의 최대공약수가 x에 대한 이차식이 되도록 하는 정수 a에 대하여 a^2+a의 값을 구하면?

① 20 ② 16 ③ 10 ④ 5 ⑤ 2

해설

ⅰ) A의 인수 x를 최대공약수의 인수라고 하면
B에서 $x=0$을 대입하면
$3a(a^2-5)=0$, $a=0(\because a$가 정수$)$
$\Rightarrow$두 식의 최대공약수는 이차가 아니다.
ⅱ) B의 인수 $x+3$이 최대공약수의 인수라고 하면
A에서 $x=-3$을 대입하면
$-3(-a-7)(a^2-4)=0$, $a=-7, 2, -2$
$a=-7, 2$일 때 A, B의 최대공약수는 일차식
$a=-2$일 때
즉, $(x+3)(x-2)$가 최대공약수가 이차식이다.
$\therefore\ a=-2,\ a^2+a=2$

50. 두 다항식 $x^2 - x + p$ 와 $x^3 + x^2 + x + (p+3)$ 이 사차의 최소공배수를 갖도록 p 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

다항식 A, B 의 최소공배수를 L , 최대공약수를 G 라 하면
$AB = GL$ 에서 G 는 1차식이다.
$\therefore$ 최대공약수는 $x+1$
$x = -1$ 을 대입하면
$2 + p = 0$
$\therefore\ p = -2$