1. $3(4x+5\pi) = P$일 때, $6(8x+10\pi)$는?

① $2P$ ② $4P$ ③ $6P$ ④ $8P$ ⑤ $18P$

해설

$6(8x+10\pi) = 6 \cdot 2(4x+5\pi) = 4 \cdot 3(4x+5\pi) = 4P$

2. x^4-6x^2+8를 인수분해하면? (단, 유리수 범위에서 인수분해 하여라.)

① $(x^2-2)(x^2-4)$
② $(x^2-2)(x-4)(x+4)$
③ $(x^2-2)(x-2)(x+2)$
④ $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-2)(x+2)$
⑤ $(x^2-\sqrt{2})(x-2)(x+2)$

해설

$$\begin{aligned} x^4-6x^2+8 &= (x^2)^2-6x^2+8 \\ &= (x^2-2)(x^2-4) \\ &= (x+2)(x-2)(x^2-2) \end{aligned}$$

해설

인수정리를 이용할 수 있다.
$f(x)=x^4-6x^2+8$
$f(2)=0,\ \ f(-2)=0,$
즉, $(x-2)(x+2)$로 나누어 떨어지므로
조립제법을 써서 인수분해하면 된다.

3. $3x^4-x^2-2$를 인수분해 하여라.

① $(3x^2-2)(x+1)(x-1)$ ② $(3x^2+2)(x-1)(x-1)$

③ $(3x^2+2)(x+1)(x+1)$ ④ $(3x^2+3)(x+1)(x-1)$

⑤ $(3x^2+2)(x+1)(x-1)$

해설

$A=x^2$로 치환하면

(준식) $=3A^2-A-2$

$=(3A+2)(A-1)$

$=(3x^2+2)(x+1)(x-1)$

4. $x^3 + x^2 - 8x - 12$를 인수분해하면 $(x-3)\boxed{}$ 이다. 이 때, □안에 알맞은 식은?

① $(x+2)^2$　　② $(x-2)^2$　　③ $(x+1)^2$
④ $(x-3)^2$　　⑤ $(x+3)^2$

해설

조립제법을 이용한다.

3	1	1	-8	-12
		3	12	12
-2	1	4	4	0
		-2	-4	
-2	1	2	0	
		-2		
	1	0		

$x^3 + x^2 - 8x - 12 = (x-3)(x+2)^2$

$\therefore \boxed{} = (x+2)^2$

5. 다항식 $2x^3+x^2+x+1$를 $2x-1$ 로 나눈 몫과 나머지를 순서대로 나열한 것은?

① $x^2+x+1,\ 1$
② $x^2+x+1,\ 2$
③ $2x^2+2x+2,\ 1$
④ $2x^2+2x+2,\ 2$
⑤ $4x^2+4x+4,\ 4$

해설

다항식 $2x^3+x^2+x+1$를 $2x-1$ 로 나눈 몫과 나머지를 각각 $Q(x)$, R이라고 하면

$$\begin{aligned} 2x^3+x^2+x+1 &= (2x-1)Q(x)+R \\ &= \left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot 2Q(x)+R \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{array}{c|cccc} \frac{1}{2} & 2 & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 2 & 2 & 2 & \boxed{2} \end{array}$$

$2Q(x)=2x^2+2x+2$

$\therefore\ Q(x)=x^2+x+1,\ R=2$

6. $\dfrac{1000^2}{252^2-248^2}$ 은?

① 62500 ② 1000 ③ 500

④ 250 ⑤ $\dfrac{1}{2}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{1000^2}{252^2-248^2} &= \frac{1000\cdot 1000}{(252+248)(252-248)}\\ &= \frac{1000}{500}\cdot\frac{1000}{4}\\ &= 500\end{aligned}$$

7. $(125^2 - 75^2) \div \{5 + (30 - 50) \div (-4)\}$ 의 값은?

① 75　② 125　③ 900　④ 1000　⑤ 1225

해설

$$125^2 - 75^2 = (125 + 75)(125 - 75)$$
$$= 200 \times 50 = 10000$$
$$5 + (30 - 50) \div (-4) = 5 + -\frac{20}{-4} = 10$$

(준 식)$= 10000 \div 10 = 1000$

8. $2012 = k$라 할 때, 2013×2011을 k로 나타내면?

① $k^2 + k$ ② $k^2 - 1$ ③ $k^2 + k + 1$
④ $k^2 - k + 1$ ⑤ $k^2 - k$

해설

$$\begin{aligned} 2013 \times 2011 &= (k+1)(k-1) \\ &= k^2 - 1 \end{aligned}$$

9. $a^2b^3c^4$, $ab^2c^4e^3$ 의 최대공약수를 구하면?

① ab^2c^3　② ab^2c^4　③ ab^3c^4
④ $a^2b^3c^4$　⑤ $ab^2c^4e^3$

해설

두 식의 공통인수 중 낮은 차수를 선택하여 곱한다.
$a^2b^3c^4$, $ab^2c^4e^3$ 에서
공통인수는 a, b, c 이고
차수가 낮은 것은 각각 a, b^2, c^4 이다.
이들을 모두 곱하면 최대공약수는 ab^2c^4

10. 두 다항식 x^2+ax-2, x^2+3x+b의 최대공약수가 $x-1$일 때, 두 실수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

최대공약수가 $x-1$이므로 각각의 식에 $x=1$을 대입하면 0이 된다.

$\therefore\ 1+a-2=0,\ 1+3+b=0$에서 $a=1,\ b=-4$

$\therefore\ a+b=-3$

11. 다항식 $8x^3-1$을 $4x^2+2x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 할 때 $Q(x)$의 상수항의 계수는?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$8x^3-1=(2x)^3-1^3=(2x-1)\left(4x^2+2x+1\right)$

$\therefore Q(x)=2x-1$

$\therefore$ 상수항은 -1

12. $a^2b+b^2c-b^3-a^2c$을 인수분해하면?

① $(a+b)(a-b)(b+c)$ ② $(a-b)(b-c)(c+a)$
③ $(a-b)(a+b)(b-c)$ ④ $(a-b)(a+b)(c-a)$
⑤ $(a-b)(b+c)(c-a)$

해설

$a^2b+b^2c-b^3-a^2c$
$=a^2(b-c)-b^2(b-c)$
$=(a-b)(a+b)(b-c)$

13. 다음 중 $a^3 - b^2c - ab^2 + a^2c$ 의 인수인 것은?

① $a-b+c$ ② $c-a$ ③ $b+c$
④ $a-b$ ⑤ $c-b+a$

해설

$$\begin{aligned} a^3 - b^2c - ab^2 + a^2c &= a^3 - ab^2 + a^2c - b^2c \\ &= a(a^2-b^2) + (a^2-b^2)c \\ &= (a-b)(a+b)(a+c) \end{aligned}$$

14. 다음 중 다항식 x^4-5x^2+4를 인수분해 할 때, 나타나는 인수가 아닌 것은?

① $x-1$ ② $x-2$ ③ $x-3$ ④ $x+1$ ⑤ $x+2$

해설

$$\begin{aligned} x^4-5x^2+4 &= (x^2-1)(x^2-4) \\ &= (x+1)(x-1)(x+2)(x-2) \end{aligned}$$

15. $(x^4 - 8x^2 - 9) \div (x^2 - 9)$ 를 계산하여라.

① $x^2 + 1$　② $x^2 - 1$　③ $x^2 + 2$
④ $x^2 - 2$　⑤ $x^2 + 3$

해설
$x^4 - 8x^2 - 9 = (x^2 - 9)(x^2 + 1)$
$\therefore$ (준식)$= x^2 + 1$

16. 다항식 $(x-1)^3+27$을 바르게 인수분해한 것은?

① $(x-1)(x^2+3)$
② $(x-1)(x^2-x-2)$
③ $(x-1)(x^2+3x+3)$
④ $(x+2)(x^2+x+7)$
⑤ $(x+2)(x^2-5x+13)$

해설

$x-1$을 A로 치환하면
준 식 $=A^3+27=(A+3)(A^2-3A+9)$
다시 $x-1$을 대입하면 $(x+2)(x^2-5x+13)$

17. $x^4+3x^2+4=(x^2+x+2)(x^2+ax+b)$ 일 때, 상수 a, b 의 곱을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

(좌 변) $=(x^2+2)^2-x^2$

$=(x^2+x+2)(x^2-x+2)$

$\therefore\ a=-1,\ b=2$

$\therefore ab=-1\times 2=-2$

18. $x^4+4x^3-2x^2+ax+b$가 이차식의 완전제곱식이 될 때, 상수 a, b의 값은?

① $a=12,\ b=9$
② $a=-12,\ b=9$
③ $a=12,\ b=-9$
④ $a=-12,\ b=-9$
⑤ $a=9,\ b=12$

해설

$x^4+4x^3-2x^2+ax+b=(x^2+px+q)^2$ 으로 놓으면
이 식의 우변은
$x^4+2x^2(px+q)+(px+q)^2$
$=x^4+2px^3+(p^2+2q)x^2+2pqx+q^2$
좌변과 계수를 비교하면
$2p=4,\ p^2+2q=-2$
$p=2,\ q=-3$에서
$a=2pq=-12,\ b=q^2=9$

19. x^2-2x-y^2+2y를 인수분해 하였더니 $(x+ay)(x-by+c)$가 된다고 할 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

x^2-2x-y^2+2y
$=(x^2-y^2)-2(x-y)$
$=(x+y-2)(x-y)$
$=(x+ay)(x-by+c)$
계수를 비교하면
$a=-1, b=-1, c=-2$
$\therefore a+b+c=-1-1-2=-4$

20. x^3-4x^2+x+6을 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x+c)$이다. $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$f(x)=x^3-4x^2+x+6$이라 놓으면,
$x=-1$일 때, $-1-4-1+6=0$
따라서, $f(x)$는 $(x+1)$로 나누어 떨어진다.
즉, $f(x)$는 $(x+1)$의 인수를 갖는다.
즉, $f(x)=(x+1)Q(x)$ 몫
$Q(x)$는 조립제법으로 구한다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x^2-5x+6)(x+1)$
$\therefore\ f(x)=(x-3)(x-2)(x+1)$
$\therefore\ a^2+b^2+c^2=(-3)^2+(-2)^2+1^2=14$

21. x에 대한 다항식 x^3-2x^2-x+2가 $(x+a)(x+b)(x+c)$로 인수분해될 때, $a^2+b^2+c^2$의 값은? (단, a, b, c는 상수)

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

해설

$x^3-2x^2-x+2=(x+1)(x-1)(x-2)$

$a^2+b^2+c^2=(-1)^2+1^2+2^2=6$

22. 자연수 $N = p^n q^m r^l$ 로 소인수분해될 때, 양의 약수의 개수는 $(n+1)(m+1)(l+1)$ 이다. 이 때, $38^3 + 3 \cdot 38^2 + 3 \cdot 38 + 1$ 의 양의 약수의 개수는?

① 9 개　② 12 개　③ 16 개　④ 24 개　⑤ 32 개

해설

$38 = x$ 라 하면,

$$\begin{aligned} 38^3 + 3 \cdot 38^2 + 3 \cdot 38 + 1 &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ &= (x+1)^3 \\ &= 39^3 \\ &= 13^3 \cdot 3^3 \end{aligned}$$

$\therefore \quad (3+1)(3+1) = 16$

23. 두 다항식 $2x^2 + 2x - 4$와 $4x^3 - 4$에 관한 설명이다. 옳지 않은 것을 고르면?

① 두 다항식은 $(x-1)$로 나누어 떨어지므로, $(x-1)$은 두 다항식의 공약수이다.
② 두 다항식은 공약수가 있으므로 서로소가 아니다.
③ $4(x-1)^3(x+2)^2(x^2+x+1)$은 두 다항식의 공배수이다.
④ 두 다항식의 최대공약수는 $2(x-1)$이다.
⑤ 두 다항식의 최소공배수는 $(x+2)(x-1)^2(x^2+x+1)$이다.

해설

$2x^2 + 2x - 4 = 2(x-1)(x+2)$
$4x^3 - 4 = 4(x-1)(x^2+x+1)$
최대공약수 : $2(x-1)$
최소공배수 : $4(x-1)(x+2)(x^2+x+1)$

24. 두 다항식 x^3+1, x^3+2x^2-5x-6의 최대공약수를 구하면?

① x ② $x+1$ ③ $x+2$ ④ $x-1$ ⑤ $x-2$

해설

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$

$x^3+2x^2-5x-6=(x-2)(x+1)(x+3)$

따라서 최대공약수는 $x+1$

25. 세 개의 다항식 x^3+ax+b, x^3+cx^2+a, cx^2+bx+4, 의 공약수 중 하나가 $x-1$일 때, $a+b+c$의 값은?

① 2 ② -2 ③ 3 ④ -3 ⑤ 4

해설

$f(x)=x^3+ax+b \rightarrow f(1)=1+a+b=0\cdots$㉠
$g(x)=x^3+cx^2+a \rightarrow g(1)=1+c+a=0\cdots$㉡
$h(x)=cx^2+bx+4 \rightarrow h(1)=c+b+4=0\cdots$㉢
㉠ + ㉡ + ㉢에서 $2(a+b+c)+6=0$
$\therefore a+b+c=-3$

26. 두 다항식 $x^2-4x+3a+b$와 x^2+bx-6의 최대공약수가 $x-2$일 때, $a+b$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 8

해설

$f(x)=x^2-4x+3a+b$,
$g(x)=x^2+bx-6$이라 하면
$f(x)$와 $g(x)$는 모두 $x-2$로 나누어떨어지므로
$f(2)=g(2)=0$에서
$f(2)=4-8+3a+b=0,\ g(2)=4+2b-6=0$
$\therefore\ a=1,\ b=1\ \therefore\ a+b=2$

27. 두 다항식 $x^2 + ax + b$, $x^2 + 3bx + 2a$ 의 최대공약수가 $x - 1$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 2 ② 1 ③ 0 ④ −1 ⑤ −2

해설

최대공약수가 $x - 1$ 이므로
$x^2 + ax + b$ 와 $x^2 + 3bx + 2a$ 는
모두 $x - 1$ 로 나누어 떨어져야 한다.
$\therefore\ 1 + a + b = 0$ 이고 $1 + 3b + 2a = 0$
따라서, $a = -2,\ b = 1$
$\therefore\ a + b = -1$

28. $(x^2+x)(x^2+x-8)+12$를 인수분해 할 때, 다음 중 인수가 될 수 <u>없는</u> 것은?

① $x-1$　② $x+1$　③ $x-2$　④ $x+2$　⑤ $x+3$

해설

$x^2+x=A$로 놓으면 주어진 식은

$$\begin{aligned} A(A-8)+12 &= A^2-8A+12 \\ &= (A-2)(A-6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore(\text{준식}) &= (x^2+x-2)(x^2+x-6) \\ &= (x-1)(x+2)(x-2)(x+3) \end{aligned}$$

29. $16x^4 - 625y^4$을 옳게 인수분해한 것은?

① $(x+5y)(2x-5y)(4x^2+25y^2)$

② $(2x+y)(2x-5y)(4x^2+25y^2)$

③ $(2x+5y)(2x-5y)(4x^2+25y^2)$

④ $(x+5y)(x-5y)(4x^2+25y^2)$

⑤ $(2x+5y)(x-y)(4x^2+25y^2)$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (4x^2)^2 - (25y^2)^2 \\ &= (4x^2+25y^2)(4x^2-25y^2) \\ &= (2x+5y)(2x-5y)(4x^2+25y^2)\end{aligned}$$

30. $x^4 - 23x^2y^2 + y^4$ 을 인수분해 하면?

① $(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$

② $(x^2 + 2xy + y^2)(x^2 - 2xy + y^2)$

③ $(x^2 + 3xy + y^2)(x^2 - 3xy + y^2)$

④ $(x^2 + 4xy + y^2)(x^2 - 4xy + y^2)$

⑤ $(x^2 + 5xy + y^2)(x^2 - 5xy + y^2)$

해설

(준식) $= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 25x^2y^2$

$= (x^2 + y^2)^2 - (5xy)^2$

$= (x^2 + y^2 + 5xy)(x^2 + y^2 - 5xy)$

$= (x^2 + 5xy + y^2)(x^2 - 5xy + y^2)$

31. 다항식 $x^2+3xy+2y^2-x-3y-2$를 일차식의 곱으로 인수분해 하였을 때, 그 인수들의 합을 구하면?

① $x+2y+1$　② $x+y-3$　③ $2x+3y+2$
④ $x+y-2$　⑤ $2x+3y-1$

해설

$x^2+3xy+2y^2-x-3y-2$
$=x^2+(3y-1)x+2y^2-3y-2$
$=x^2+(3y-1)x+(y-2)(2y+1)$
$=(x+y-2)(x+2y+1)$

32. 서로 다른 세 실수 $x,\ y,\ z$에 대하여 $x^3+y^3+z^3=3xyz$ 를 만족할 때, $x+y+z$ 의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0$

$(x+y+z)=0$ 또는 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$

$\therefore\ x+y+z=0$ 또는 $\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}=0$

그런데 $x,\ y,\ z$ 가 서로 다른 세 실수$(x\neq y\neq z)$ 이므로

$x+y+z=0$

33. 두 다항식 $A = x^3 + 4x^2 - 3x - 18,\ B = x^2 - (k+2)x + 2k$ 의 최소공배수가 $(x+\alpha)^2(x+\beta)^2$ 일 때, 상수 k 의 값은?

① 2　　② -2　　③ 3　　④ -3　　⑤ -5

해설

$A = (x+3)^2(x-2),\ B = (x-2)(x-k)$
따라서 $A,\ B$ 의 최소공배수 L 은
$(x+3)^2(x-2)(x-k)$
이것이 $(x+\alpha)^2(x+\beta)^2$ 의 꼴이 되려면
$x - 2 = x - k$
$\therefore\ k = 2$

34. 두 상수 a와 b에 대하여 다음 두 다항식의 최대공약수가 $x-2$일 때, $a+b$의 값은?

$$x^2+ax-6,\quad x^2-ax+b$$

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

왼쪽의 식 $f(2)=4+2a-6=0$ $\therefore$ $a=1$
오른쪽의 식 $g(2)=4-2a+b=0$에서
$a=2$이므로 $b=-2$
$\therefore$ $a+b=1+(-2)=-1$

35. 이차항의 계수가 1인 두 다항식의 최대공약수가 $x-1$이고 최소공배수가 x^3+x^2-2x일 때, 두 이차식의 합은?

① $2x^2-2x$　② $2x^2+2x$　③ $2x^2+x$
④ $2x^2-2$　⑤ $2x^2+4$

해설

$A=Ga,\quad B=Gb(a,b\text{는 서로소}),\ L=Gab$

$\therefore\ G=(x-1),\quad L=(x-1)x(x+2)$

$$\begin{aligned}A+B=G(a+b)&=(x-1)(x+x+2)\\&=(x-1)(2x+2)\\&=2(x^2-1)\end{aligned}$$

36. 이차항의 계수가 1인 두 다항식 A, B의 최대공약수가 $x+1$이고, 최소공배수가 x^3-3x-2일 때, $A+B$를 구하면?

① $(x-1)(x+1)$
② $(x-1)(2x+1)$
③ $(x-1)(2x-1)$
④ $(x+1)(2x-1)$
⑤ $(x+1)(2x+1)$

해설

$A=Ga$, $B=Gb$(a , b는서로소), $L=Gab$

$$L = x^3-3x-2 = (x+1)(x^2-x-2)$$
$$= (x+1)(x-2)(x+1)$$
$$A+B = (x+1)(x+1)+(x+1)(x-2)$$
$$= (x+1)(x+1+x-2) = (x+1)(2x-1)$$

37. 두 이차 다항식 $f(x)$, $g(x)$의 최대공약수가 $x+2$, 최소공배수가 x^3+2x^2-x-2일 때, $f(x)+g(x)$를 구하면?

① $2x^2+5x+2$ ② $2x^2+3x-2$ ③ $2x^2+4x$
④ $2x^2+2x-4$ ⑤ $2x^2+6x+4$

해설

$x^3+2x^2-x-2=(x-1)(x+1)(x+2)$

$f(x)=(x+1)(x+2)$, $g(x)=(x-1)(x+2)$ 또는 $f(x)=(x-1)(x+2)$, $g(x)=(x+1)(x+2)$

$$\begin{aligned} f(x)+g(x) &= x^2+3x+2+x^2+x-2 \\ &= 2x^2+4x \end{aligned}$$

38. 이차항의 계수가 1인 두 다항식의 최대공약수가 $x-1$이고, 최소공배수가 x^3+x^2-2x일 때, 두 다항식의 합은?

① $2x^2-2$　② $2x^2+x+1$　③ $2x^2+x-1$
④ $2x^2+x+2$　⑤ $2x^2+x-2$

해설

최소공배수 : $x^3+x^2-2x=x(x-1)(x+2)$
최대공약수 : $(x-1)$
따라서 두 다항식은 $x^2-x,\ \ x^2+x-2$
$\therefore\ 2x^2-2$

39. 두 이차식의 합이 $2x^2 - x - 6$이고, 최소공배수가 $x^3 + x^2 - 4x - 4$일 때, 두 이차식의 최대공약수는?

① $x-1$ ② $x+1$ ③ $x-2$ ④ $x+2$ ⑤ $x+3$

해설

최대공약수는 합과 최소공배수의 공통인수

$2x^2 - x - 6 = (x-2)(2x+3)$

$x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x-2)(x+2)(x+1)$

40. 두 이차식의 $x^2+ax+2b,\ x^2+bx+2a$ 최대공약수가 일차식일 때 $a+b$ 의 값은?

① 0　　② 2　　③ −2　　④ 4　　⑤ 9

해설

일차식은 최대공약수를 $x-\alpha$ 라 놓으면
두 다항식은 각각 $x-\alpha$ 로 나누어 떨어지므로
$\alpha^2+a\alpha+2b=0\cdots$ ㉠
$\alpha^2+b\alpha+2a=0\cdots$ ㉡
㉠ − ㉡ 하면 $(a-b)\alpha-2(a-b)=0$
$\therefore\ (a-b)(\alpha-2)=0$
$a=b$ 이면 두 다항식이 같게 되어 조건이 어긋난다.
따라서 $\alpha=2$ 일 때 이 값을 ㉠에 대입하면
$\therefore\ a+b=-2$

41. 1999 개의 다항식 $x^2-2x-1,\ x^2-2x-2,\ \cdots,\ x^2-2x-1999$ 중에서 계수가 정수인 일차식의 곱으로 인수분해 되는 것은 모두 몇 개인가?

① 43 개　② 44 개　③ 45 개　④ 46 개　⑤ 47 개

해설

$x^2-2x-n=(x+a)(x-b)$ ($a,\ b$ 는 자연수) 라 하면 ($1 \le n \le 1999$ 인 자연수)

$ab=n,\ a=b-2$

$\therefore n=1\cdot 3,\ 2\cdot 4,\ 3\cdot 5,\ \cdots,\ 43\cdot 45(=1935)$ 의 43 개

42. $a^2 - b^2 = 1$ 일 때, $\{(a+b)^n + (a-b)^n\}^2 - \{(a+b)^n - (a-b)^n\}^2$ 의 값은? (단, n은 자연수)

① 2　② $2(a+b)^n$　③ 4

④ $4(a+b)^n$　⑤ $4(a-b)^n$

해설

$(A)^2 - (B)^2$ 형태이므로
합차공식을 사용하여 정리하면
(준식)$= 4(a+b)^n(a-b)^n = 4(a^2-b^2)^n = 4$

43. 다음 중 다항식 $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ 의 인수가 <u>아닌</u> 것은?

① $a-b$ ② $b-c$ ③ $c-a$

④ $a+b+c$ ⑤ $a-b+c$

해설

주어진 식을 a에 관하여 정리하면

(준식)$= a^3(b-c)-a(b^3-c^3)+bc(b^2-c^2)$

$= (b-c)\{a^3-a(b^2+bc+c^2)+bc(b+c)\}$

$= (b-c)\{b^2(c-a)+b(c^2-ca)-a(c^2-a^2)\}$

$= (b-c)(c-a)(b^2+bc-ac-a^2)$

$= (b-c)(c-a)\{c(b-a)+(b^2-a^2)\}$

$= (b-c)(c-a)(b-a)(a+b+c)$

44. 다음 보기 중 $ab(b-a)+ac(c-a)+bc(2a-b-c)$의 인수인 것을 모두 고르면?

㉠ $a-b$	㉡ $b+c$	㉢ $a-c$

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$ab(b-a)+ac(c-a)+bc(2a-b-c)$

$=ab^2-a^2b+ac^2-a^2c+2abc-b^2c-bc^2$

$=-(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a-bc(b+c)$

$=-(b+c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=-(b+c)(a-b)(a-c)$

$=(a-b)(b+c)(c-a)$

45. 세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형에 대하여 $(a^2+b^2)c+(a+b)c^2=(a+b)(a^2+b^2)+c^3$이 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① $b=c$인 이등변 삼각형
② a가 빗변인 직각삼각형
③ $a=c$인 이등변 삼각형
④ c가 빗변인 직각삼각형
⑤ 정삼각형

해설

준식을 c에 관한 내림차순으로 정리하면
$c^3-(a+b)c^2-(a^2+b^2)c+(a+b)(a^2+b^2)$에서
$c^2\{c-(a+b)\}-(a^2+b^2)\{c-(a+b)\}$
$=\{c-(a+b)\}\{c^2-(a^2+b^2)\}$
$=(c-a-b)(c^2-a^2-b^2)=0$
a ,b ,c 는 삼각형의 세변이므로
$c-a-b\neq 0$이고 $c^2-a^2-b^2=0$
즉 $c^2=a^2+b^2$이므로 c가 빗변인 직각 삼각형이다.

46. 모든 모서리의 길이의 합이 60이고, 대각선의 길이가 $\sqrt{77}$인 직육면체의 겉넓이는?

① 88　　② 100　　③ 124　　④ 148　　⑤ 160

해설

직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 x, y, z라고 하면
$4(x+y+z)=60$에서 $x+y+z=15$
또, 대각선의 길이는
$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{77}$이므로
$x^2+y^2+z^2=77$
이 때, 직육면체의 겉넓이는 $2(xy+yz+zx)$이고
$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$이므로
$77=15^2-2(xy+yz+zx)$
$\therefore\ 2(xy+yz+zx)=225-77=148$
따라서, 직육면체의 겉넓이는 148이다.

47. 두 실수 $a,\ b$에 대하여 $[a,\ b] = a^2 - b^2$라 할 때, $[x^2,\ x-1] + [2x+1,\ 3] + [0,\ 1]$을 인수분해하면 $(x-a)(x^3+x^2+bx+c)$이다. 이 때, 상수 $a,\ b,\ c$의 합 $a+b+c$의 값은?

① 5　　② 10　　③ 15　　④ 20　　⑤ 25

해설

$[x^2,\ x-1] + [2x+1,\ 3] + [0,\ 1]$
$= x^4 - (x-1)^2 + (2x+1)^2 - 9 + 0 - 1$
$= x^4 - x^2 + 2x - 1 + 4x^2 + 4x + 1 - 10$
$= x^4 + 3x^2 + 6x - 10$
$= (x-1)(x^3+x^2+4x+10)$
$= (x-a)(x^3+x^2+bx+c)$
따라서, $a = 1,\ b = 4,\ c = 10$이므로
$a+b+c = 15$

48. $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = x^2 + cx + d$가 다음 조건을 만족할 때, $ab - c + d$의 값은?

㉠ $f(x)$, $g(x)$의 최소공배수는 $x^3 + 3x^2 - 13x - 15$이다.
㉡ $f(1) = -4$, $g(0) = 5$

① -31　② -11　③ 5　④ 13　⑤ 29

해설

두 다항식의 최소공배수
$x^3 + 3x^2 - 13x - 15 = (x+1)(x+5)(x-3)$에서
인수들 중 적당한 두 인수들로 $f(1) = -4$,
$g(0) = 5$이 되도록 $f(x), g(x)$를 만들면
$f(x) = (x+1)(x-3) = x^2 - 2x - 3$
$g(x) = (x+1)(x+5) = x^2 + 6x + 5$
$a = -2, b = -3, c = 6, d = 5$
$\therefore\ ab - c + d = 5$

49. 두 다항식 $2x^2+px+q$, $4x^2+rx+s$의 최대공약수가 $2x+1$이고 곱이 $8x^4+4x^3-62x^2-61x-15$일 때, $p+q+r+s$의 합은?

① 1　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 9

해설

두 다항식을 $A=aG$, $B=bG$ (a, b는 서로소)라고 하면
$AB=abG^2$이므로
$8x^4+4x^3-62x^2-61x-15=ab(2x+1)^2$
$\therefore\ 8x^4+4x^2-62x^2-61x-15$
$=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2(8x^2-4x-60)$
$=(2x+1)^2(2x^2-x-15)$
$=(2x+1)^2(x-3)(2x+5)$
즉, $2x^2+px+q=(2x+1)(x-3)=2x^2-5x-3$,
$4x^2+rx+s=(2x+1)(2x+5)=4x^2+12x+5$이므로
$p=-5,\ q=-3,\ r=12,\ s=5$
$\therefore\ p+q+r+s=9$

50. 다음은 다항식 A 를 다항식 B 로 나누었을 때, 몫이 Q 이고 나머지가 R 이면, A, B 의 최대공약수는 B, R 의 최대공약수임을 보이는 과정을 나타낸 것이다.

> $A = BQ + R$ 이 성립한다. A, B 의 공약수를 g 라 하면
> $A = ag$, $B = bg$ (a, b, g 는 다항식)$\cdots$㉠로 쓸 수 있다.
> 이 때, $R = A - BQ = (a - bQ)g$ 에서 g 는 R 의 약수이다.
> $\therefore$ g 는 B, R 의 공약수이다. $\cdots$㉡
> 역으로, B, R 의 공약수를 g' 이라 하면
> $B = b'g', R = r'g'$ (b', r', g' 은 다항식)$\cdots$㉠′ 으로 쓸 수 있다.
> 이 때, $A = BQ + R = (b'Q + r')g'$ 에서 g' 은 A 의 약수이다.
> $\therefore$ g' 은 A, B 의 공약수이다. $\cdots$ ㉡′
> 이상에서 $\{g \mid g$ 는 A, B 의 공약수$\} = \{g' \mid g'$ 은 B, R 의 공약수$\}\cdots$ ㉢
> $\therefore$ A, B 의 최대공약수는 B, R 의 최대공약수이다. $\cdots$ ㉣

위 과정에서 옳지 <u>않은</u> 것은?

① ㉠, ㉠′　② ㉡, ㉡′　③ ㉢
④ ㉣　⑤ 없다.

해설

유클리드의 호제법의 원리를 설명한 것으로 옳지 않은 과정은 없다.